Devoir libre $n°2$
Correction

Exercice 1

1. Montrons d'abord que l'application $x \mapsto d(x, A)$ de E dans $\mathbb{R}$ est continue. En effet, soit x et y deux éléments de E, on a :

$$\forall z \in A,\ \ d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

donc, en passant à la borne inférieure dans le second membre,

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A),$$

x et y jouent des rôles symétriques, on obtient donc de même

$$d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A).$$

D'où, $\forall (x, y) \in E^2,\ \ |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. L'application $x \mapsto d(x, A)$ est donc lipschitzienne et, par suite, continue sur E.

L'application $f : x \mapsto d(x, B) - d(x, A)$ de E dans $\mathbb{R}$ est continue, comme différence d'applications continues, comme $C = f^{-1}(\{0\})$ et $D = f^{-1}(]0, +\infty[)$, alors C est un fermé de E et D est un ouvert de E.

2. Soit $x \in A$, alors $x \notin B = \overline{B}$, donc $d(x, \overline{B}) = d(x, B) \neq 0$, c'est-à-dire $\forall x \in A$, $d(x, A) = 0 < d(x, B)$, et par suite, $A \subset D \subset$. On peut définir, de même $G = \{x \in E / d(x, A) > d(x, B)\}$ c'est un ouvert tel que $B \subset G$.

D et G sont deux ouverts disjoints, l'un contient A et l'autre contient B.

Exercice 2

1. • Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, $\|P\| \geq 0$ et si $\|P\| = 0$ alors $\forall k \in [\![0, n]\!],\ |a_k| = 0$ et donc $P = 0$ et $\|0\| = 0$.

• Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\| = \sum_{k=0}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |a_k| = |\lambda| \|P\|$.

• Soient $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$ deux polynômes de E (les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont nulles à partir d'un certain rang). Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|,$$

et donc $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|y$.

En conclusion $\|.\|$ est une norme sur E.

2. F est la boule fermée de centre 0 (polynôme nul) et de rayon 1. C'est donc une partie fermée de E.

3. (a) $\|P_n\| = 1$, donc $P_n \in F$.
On a $P_i - P_j = X^i - X^j$. On en déduit, pour $i \neq j$, $\|P_i - P_j\| = 2$.

(b) Soit $(P_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ une sous-suite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, d'après la question précédente, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p \neq q$, $\|P_{\varphi(p)} - P_{\varphi(q)}\| = 2$. Toute suite extraite est donc divergente.
Dans la partie F, il existe donc une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont aucune suite extraite n'est convergente.
Il en résulte que F n'est pas une partie compacte de E.

Exercice 3

1. L'image Im(u) est un sous-espace vectoriel de F de dimension r, notons $(a_1, a_2, ..., a_r)$ une base de Im(u), donc pour tout $x \in E$, on peut trouver des scalaires $l_1(x), l_2(x), ..., l_r(x)$ tels que

$$u(x) = \sum_{i=1}^{r} l_i(x) a_i.$$

De la linéarité de u et de l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on déduit que les applications l_i sont linéaires.

Supposons que la famille $\{l_1, l_2, ..., l_r\}$ est liée avec , par exemple, $l_1 = \sum_{i=2}^{r} \lambda_i l_i$. On a alors, pour tout $x \in E$:

$$u(x) = \left(\sum_{i=2}^{r} \lambda_i l_i(x)\right) a_1 + \sum_{i=2}^{r} l_i(x) a_i = \sum_{i=2}^{r} l_i(x)(\lambda_i a_1 + a_i)$$

Donc la famille de $r-1$ vecteurs $\{\lambda_i a_1 + a_i\}$ engendre Im(u), ce qui est en contradiction avec $\dim(\text{Im}(u) = r$.

2. Si $p = 1$, il faut montrer que pour tout vecteur non nul $a \in E$, $H = F + \mathbb{R}a$ est fermé. Si $a \in F$, alors $H = F$ est fermé. On suppose donc $a \notin F$ et dans ce cas

$$H = F \oplus \mathbb{R}a$$

Tout vecteur $x \in H$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$x = y + l(x)a$$

avec $y \in F$ et $x \mapsto l(x) \in \mathbb{R}$ une forme linéaire sur H (à vérifier). De plus $\ker l = F$ est un fermé de E, donc aussi un fermé de H, donc l est continue de H dans $\mathbb{R}$ (voir l'exercice 5 de la série 3).

Montrons donc que H est un fermé. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H qui converge vers x. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in F$ tel que $x_n = y_n + l(x_n)a$. On sait que l'image d'une suite de Cauchy par une application continue est une suite de Cauchy, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (suite convergente), alors $(l(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Le corps $\mathbb{R}$ étant complet, on déduit que la suite $(l(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ. On déduit alors que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y = x - \lambda a \in F$, car F est fermé.
Donc $x = y + \lambda a \in H$, on a donc montré que H est un fermé.

Supposons maintenant le résultat est vrai pour tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension $p \geq 1$ et soit G un sous-espace vectoriel de dimension $p+1$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ une base de G, donc

$$H = F + G = \left(F + \bigoplus_{j=1}^{p} \mathbb{R}a_j\right) + \mathbb{R}a_{p+1}$$

et on conclut facilement avec l'hypothèse et récurrence et l'étude du cas $p = 1$.

3. Si u est continue alors $\ker u = u^{-1}\{0\}$ est un fermé de E.
Réciproquement, supposons que $\ker u$ est fermé dans E. L'application u étant de rang fini, alors il existe des formes linéaires $l_1, l_2, ..., l_r$ linéairement indépendants et une famille libre $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{r} l_i a_i.$$

On alors pur tout $j \in [1, r]$, $\ker u = \bigcap_{j=1}^{r} \ker(l_j) \subset \ker(l_i)$. On peut alors écrire

$$\ker(l_i) = \ker(u) \oplus H_i$$

et la restriction de u à H_i est injective de H_i dans Imu qui est de dimension finie. En conclusion, pour tout i le sous-espace vectoriel H_i est de dimension finie dans E et $\ker(l_i) = \ker(u) \oplus H_i$ est fermé, c'est-à-dire les formes linéaires l_i sont continues. D'où la continuité de u.

4. Dans ce cas toute application linéaire de E dans F est de rang fini. Comme $\dim E = \dim \ker u + \dim$ Imu, alors $\ker u$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, il est donc fermé et u est continue.

• • • • • • • • • • •