Devoir libre $n°3$
Correction

Exercice 1

1. Supposons que la norme $\|.\|$ sur E découle d'un produit scalaire $(.|.)$. Il suffit alors de développer le membre de gauche

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\left(\|x\|^2+2(x|y)+\|y\|^2\right)+\left(\|x\|^2-2(x|y)+\|y\|^2\right)=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

2. (a) Les applications $(x,y)\mapsto f(x,y)=x+y$ et $(x,y)\mapsto g(x,y)=x-y$ sont linéaires sur $E\times E$ telles que

$$\forall x,y\in E,\quad \|f(x,y)\|\leq \|(x,y)\|_\infty$$

et

$$\forall x,y\in E,\quad \|g(x,y)\|\leq \|(x,y)\|_\infty.$$

Donc f et g sont continues sur $E\times E$ muni de la norme produit. De plus $x\mapsto\|x\|$ est continue sur E (1-lipschitzienne), donc φ, comme composé d'applications continues, est continue sur $E\times E$.

(b) On commence par appliquer trois fois l'identité du parallélogramme aux couples $(x+y,z)$, $(x+z,y)$ et $(y+z,x)$ et on somme l'ensemble pour obtenir

$$3\|x+y+z\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+\|x+y\|^2+\|x+z\|^2+\|y+z\|^2\right)$$
$$-\|x+y-z\|^2-\|x-y+z\|^2-\|-x+y+z\|^2$$

On applique maintenant trois fois l'identité du parallélogramme aux couples $(x-z,y)$, $(x-y,z)$ et $(y-z,x)$, on somme et on simplifie par 2 pour obtenir

$$\|x-z+y\|^2+\|x-z-y\|^2+\|x-y+z\|^2=\|x-z\|^2+\|x-y\|^2+\|y-z\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2$$

Enfin, on applique trois fois l'identité du parallélogramme aux couples (x,y), (y,z) et (x,z) et on somme pour obtenir

$$\|x-z\|^2+\|x-y\|^2+\|y-z\|^2=4(\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2)-\|x+z\|^2-\|x+y\|^2-\|y+z\|^2$$

En rassemblant les trois identités obtenues ci-dessus, et en simplifiant par 3, on obtient bien l'identité demandée.

(c) Par définition, on a

$$\varphi(x+y,z)=\frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2\right),$$

et en appliquant l'égalité de la question précédente aux triplets (x,y,z) et $(x,y,-z)$, on obtient par soustraction

$$\varphi(x+y,z)=\frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2+\|y+z\|^2-\|x-z\|^2-\|y-z\|^2\right)=\varphi(x,z)+\varphi(y,z),$$

ce qui montre le résultat.

(d) D'après la définition il est claire que :

$$\varphi(-x,y)=\varphi(x,y),\quad \forall x,y\in E\quad (*)$$

On écrit maintenant, en utilisant l'additivité de φ établie plus haut

$$\varphi(2x,y)=\varphi(x+x,y)=\varphi(x,y)+\varphi(x,y)=2\varphi(x,y),\quad \forall x,y\in E.$$

Par une récurrence immédiate nous obtenons

$$\varphi(nx, y) = n\varphi(x, y), \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \forall x, y \in E.$$

Donc on peut déduire avec $(*)$

$$\varphi(nx, y) = n\varphi(x, y), \;\; \forall n \in \mathbb{Z}, \;\; \forall x, y \in E \;\; (**)$$

Soit maintenant $\lambda = \dfrac{p}{q}$ un nombre rationnel. En appliquant $(**)$ avec $\dfrac{x}{q}$ à la place de x et $n = q$, nous avons

$$\varphi(x, y) = q\varphi\left(\frac{1}{q}x, y\right), \;\; \forall x, y \in E.$$

On applique cette nouvelle formule avec px au lieu de x et on obtient

$$p\varphi(x, y) = \varphi(px, y) = q\varphi\left(\frac{1}{q}x, y\right), \;\; \forall x, y \in E,$$

ce qui finalement donne

$$\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y), \;\; \forall \lambda \in \mathbb{Q}, \;\; \forall x, y \in E.$$

(e) On se donne maintenant un réel λ quelconque. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers λ. D'après ce qui précède nous avons, pour $x, y \in E$ fixés

$$\varphi(\lambda_n x, y) = \lambda_n\varphi(x, y).$$

Par ailleurs, $(\lambda_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λx dans E car nous avons

$$\|\lambda_n x - \lambda x\| = |\lambda_n - \lambda|\|x\|.$$

Par continuité de φ par rapport à sa première variable, on peut donc passer à la limite dans la formule ci-dessus et obtenir la propriété d'homogénéité :

$$\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y), \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \;\; \forall x, y \in E.$$

Ceci conclut la preuve de la bilinéarité de φ et donc la preuve du résultat demandé.

Exercice 2

1. Remarquons que $|f| \geq f$, et donc $|f| - f \geq 0$. On en déduit que $u(|f|) \geq u(f)$. De même, on a $|f| \geq -f$, soit $|f| + f \geq 0$ et donc $u(|f|) \geq u(-f) = -u(f)$.
Finalement, on obtient bien que $|u(f)| \leq u(|f|)$.

2. On sait que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, ce qui s'écrit encore $\|f\|_\infty e - |f| \geq 0$. Ainsi, on a

$$|u(f)| \leq u(|f|) \leq u(\|f\|_\infty e) \leq u(e)\|f\|_\infty.$$

Ceci prouve que u est continue, avec $\|u\| \leq u(e)$. De plus, pour $f = e$, on a exactement $u(f) = u(e)\|e\|_\infty$, ce qui prouve qu'en réalité $\|u\| = u(e)$.

Exemple : L'application linéaire $u : f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ vérifie les hypothèses de l'exercice. D'ailleurs on peut vérifier que u est continue sur $\mathcal{C}(I)$ et que $\|u\| = b - a$.

Exercice 3

1. On a, pour $v \neq 0$, en posant $t = \dfrac{u}{v}$:

$$(u-v)^2 + v^2 - \frac{1}{4}(u^2+v^2) = \frac{1}{4}(3u^2+7v^2-8uv) = \frac{v^2}{4}(3t^2-8t+7)$$

et puisque le discriminant $\triangle' = 42 - 3\times 7 = -5 < 0$, le trinôme $3t^2-8t+7$ est toujours positif. L'inégalité cherchée s'en déduit alors. Et pour $v=0$, on a bien $u^2 \geq \dfrac{1}{4}u^2$.

2. (a) On déduit de ce qui précède que $x^4+2y^4-2x^2y^2 = (x^2-y^2)^2+(y^2)^2 \geq \dfrac{1}{4}(x^4+y^4)$, donc que $f(x,y) \geq \dfrac{1}{4}(x^4+y^4) - x^2 - 2y^2 = \dfrac{1}{4}((x^2-2)^2+(y^2-4)^2-20)$. Et cette dernière quantité tend vers $+\infty$ lorsque $\|(x,y)\|_1$ tend vers l'infini.

(b) D'après a), il existe $R>0$ tel que $f(x,y)>0$ si $\|(x,y)\|_1 > R$. Il en résulte que l'ensemble $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)\leq 0\}$ est contenu dans $[-R,R]\times[-R,R]$, donc est borné. Et comme la fonction polynômiale f est continue, $K = f^{-1}(]-\infty,0])$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Donc K est compact.

(c) La fonction continue f atteint son minimum sur K en un point (x_0,y_0). Puisque $(0,0)\in K$, on a $f(x_0,y_0)\leq f(0,0)=0$. Et pour tout point $(x,y)\notin K$, on a $f(x,y)>0\geq f(x_0,y_0)$, ce qui montre que f atteint en (x_0,y_0) son minimum sur $\mathbb{R}^2$.

3. (a) Les points critiques de f sont les points où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'annulent simultanément. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3-4xy^2-2x = 2x(2x^2-2y^2-1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y^3-4x^2y-4y = -4y(x^2-2y^2+1)$$

On a donc, pour un point critique (x,y) : — soit $x=y=0$ — soit $x=0$ et $2y^2=1$ — soit $y=0$ et $2x^2=1$ — soit $2x^2-2y^2=1$ et $x^2-2y^2=-1$, c'est-à-dire $x^2=2$ et $y^2=\dfrac{3}{2}$. Il y a donc 9 points critiques :

$$M_0=(0,0), M_1=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_3=\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),$$

$$M_5=\left(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), M_6=\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), M_7=\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), M_8=\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

(b) On a $r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-4y^2-2$, $s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-8xy$, $t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=24y^2-4x^2-4$ Et la matrice hessienne de f en (x,y) est $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} r & s\\ s & t\end{pmatrix}$.

Donc $H_f(M_0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$, $H_f(M_1)=H_f(M_2)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$, $H_f(M_3)=H_f(M_4)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$,
$H_f(M_5)=H_f(M_8)=\begin{pmatrix}16 & -8\sqrt{3}\\ -8\sqrt{3} & 24\end{pmatrix}$, $H_f(M_6)=H_f(M_7)=\begin{pmatrix}16 & 8\sqrt{3}\\ 8\sqrt{3} & 24\end{pmatrix}$.

(c) L'étude des différentes matrices montre que :
- f admet un maximum local en M_0 qui vaut $f(M_0)=0$,
- les points $(M_i)_{1\leq i\leq 4}$ sont des cols,
- f admet des minimums locaux. Et on a $f(M_i)=-\dfrac{5}{2}$.

Le minimum global de f est minimum local, c'est donc $-\dfrac{5}{2}$, atteint en les quatre points M_i pour $5\leq i\leq 8$.

• • • • • • • • • • •