Devoir libre n°4

Correction

-I-

- Pour $x \neq 0$, $f_1'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, donc $f_1'(0) = 0$.
 On a $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0, il est de même pour f_1' , donc f_1' est discontinue en 0.
- On a $\lim_{x \rightarrow 0} (x, x^2) = (0, 0)$ et $\mathbb{R}^* \ni x \mapsto f(x, x^2) = \frac{1}{x^2}$ ne tend pas vers 0, donc f_2 est discontinue en $(0, 0)$.
 Posons, pour $t \neq 0$, $k_{(x,y)}(t) = \frac{f_2((0,0) + t(x,y)) - f_2(0,0)}{t}$. L'application $k_{(x,y)}$ vérifie $k_{(0,y)}(t) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} k_{(x,y)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} f_2(tx, ty) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 x^6}{t^6 x^8 + (y - tx^2)^2} = 0$, donc l'application linéaire nulle $u = 0$ est la différentielle de Gâteaux de f_2 en $(0, 0)$.
- De même on pose $k_{(x,y)}(t) = \frac{f_3((0,0) + t(x,y)) - f_3(0,0)}{t}$ pour $t \neq 0$. L'application $k_{(x,y)}$ vérifie $k_{(0,0)}(t) = 0 = f_3(0,0)$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $k_{(x,y)}(t) = f_3(x,y)$, d'où pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{t \rightarrow 0} k_{(x,y)}(t) = f_3(x,y)$, mais f_3 n'est pas une application linéaire, donc f_3 n'a pas de différentielle de Gâteaux en $(0, 0)$.

-II-

- Pour $x \in E \setminus \{0\}$, $h_x = \frac{\beta x}{2\|x\|}$ vérifie $\|h_x\| = \frac{\beta}{2} < \beta$, donc $\varepsilon \geq \frac{\|u(h_x)\|}{\|h_x\|} = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, d'où, par passage à la borne supérieure, $\varepsilon \geq \|u\|$.
- (a) i. f est différentiable par hypothèse, et df_a est linéaire, donc elle est différentiable, d'où la différentiabilité de $k = f - df_a$.
 Si $\|dk_z\| \leq \varepsilon$ pour tout $z \in B(a, \eta)$, alors, par l'inégalité des accroissements finis, si $\|x - a\| < \eta$ et $\|y - a\| < \eta$, alors

$$\|f(y) - f(x) - df_a(y - x)\| = \|k(y) - k(x)\| \leq \varepsilon \|y - x\|.$$

- ii. A. f est strictement différentiable en a donc il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|x - a\| < \eta$ et $\|y - a\| < \eta$, alors

$$\|f(y) - f(x) - df_a(y - x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|y - x\|.$$

Si $\|x - a\| < \delta$ et $\|h\| < \delta$ où $\delta = \frac{\eta}{2}$, on a $\|x - a\| < \eta$ et $\|x + h - a\| < \eta$, d'où, pour $h \neq 0$,

$$\|g(x, h)\| = \frac{\|f(x + h) - f(x) - df_a(h)\|}{\|(x + h) - x\|} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par différentiabilité de f en x , il existe $\alpha_x > 0$ tel que, si $0 < \|h\| < \alpha_x$, alors $\|t_x(h)\| < \frac{\varepsilon}{2}$

- B. Soit δ et α_x définie en A et $\beta_x = \min(\delta, \alpha_x)$, soit $x \in B(a, \delta)$, si $0 < \|h\| < \beta_x$, alors on a $\|x - a\| < \delta$, $\|h\| < \delta$, $\|h\| < \alpha_x$, d'où, d'après A, $\|g(x, h)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|t_x(h)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc par inégalité triangulaire,

$$\|df_x \delta(h) - df_a(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

- (b) Supposons df continue en a , $k = f - df_a$ vérifie $dk_z = d(f - df_a) = df_z - df_a$, soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|z - a\| < \eta$, alors $\|dk_z\| = \|df_z - df_a\| \leq \varepsilon$, donc, d'après 1)a), si $\|x - a\| < \eta$ et $\|y - a\| < \eta$, alors

$$\|f(y) - f(x) - df_a(y - x)\| = \|k(y) - k(x)\| \leq \varepsilon \|y - x\|$$

f est strictement différentielle en a .

Supposons f strictement différentielle en a , soit $\varepsilon > 0$, d'après 1)b), il existe $\delta > 0$ vérifiant : pour tout $x \in B(a, \delta)$, il existe $\beta_x > 0$ tel que, si $\|h\| < \beta_x$, alors $\|df_x(h) - df_a(h)\| \leq \varepsilon \|h\|$, soit $x \in B(a, \delta)$, d'après A), $\|df_x - df_a\| \leq \varepsilon$. df est continue en a .

-III-

1. (a) $i \implies ii$: On a $\lim_{h \rightarrow 0} (a, a + h) = (a, a)$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{f(y) - f(x) - u(y - x)}{\|y - x\|} = 0$, donc, par composition

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - u(h)}{\|h\|} = 0.$$

Donc f est différentiable en a et $df_a = u$.

$ii \implies iii$: $df_a \in \mathcal{L}(E, F)$ et, pour tout $v \in E$, $D_v f(a) = df_a(v)$, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = df_a(v).$$

Donc df_a est différentielle de Gâteaux de f en a .

$iii \implies iv$: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = u(v)$ signifie $u(v) = D_v f(a)$, c'est-à-dire $u(v)$ est le vecteur dérivée de f en a suivant v .

- (b) D'après I) : *non* $i \Leftarrow ii$: $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable donc différentiable, en particulier en 0, mais f'_1 n'est pas continue en 0 donc df_1 non plus, d'où, d'après II), f_1 n'est pas strictement différentielle en 0.

non $ii \Leftarrow iii$: 0 est différentielle de Gâteaux de f_2 en $(0, 0)$, mais f_2 n'est pas continue en $(0, 0)$, donc elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

non $iii \Leftarrow iv$: pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $f_3(v)$ est dérivée suivant v de f_3 en $(0, 0)$, mais f_3 n'a pas de différentielle de Gâteaux en $(0, 0)$.

2. Si f est $\mathcal{C}^1$, alors d'une part f est différentiable, d'autre part, pour tout $x \in D$, df est continue en x , donc, d'après II, f est strictement différentiable en x , f est donc strictement différentiable sur D .

Si f est strictement différentiable, alors d'une part f est différentiable d'après III (a), d'autre part, pour tout $x \in D$, f est strictement différentiable en x , donc d'après II), df est continue en x , df est donc continue sur D , d'où f est $\mathcal{C}^1$.

●●●●●●●●●●