

Devoir libre n°5

Correction

1. Soit $y \in F$, $y = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (u - \lambda Id_E)^i(x)$. On a

$$\begin{aligned} u(y) &= \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i u[(u - \lambda Id_E)^i(x)] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (u - \lambda Id_E)^{i+1}(x) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \lambda_i (u - \lambda Id_E)^i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_i (u - \lambda Id_E)^{i+1}(x) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \lambda_i (u - \lambda Id_E)^i(x), \text{ car } (u - \lambda Id_E)^m(x) = 0. \end{aligned}$$

Donc $u(y) \in F$, d'où $u(F) \subset F$.

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (u - \lambda Id_E)^i(x) = 0$. Appliquons $(u - \lambda Id_E)^{m-1}$ à l'égalité précédente, on obtient $\alpha_0 (u - \lambda Id_E)^{m-1}(x) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$. On applique une autre fois $(u - \lambda Id_E)^{m-2}$, on obtient $\alpha_1 (u - \lambda Id_E)^{m-1}(x) = 0$, donc $\alpha_1 = 0$. De proche en proche on obtient $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$, donc la famille $(x, (u - \lambda Id_E)(x), \dots, (u - \lambda Id_E)^{m-1}(x))$ est libre et par suite $\dim F = m$.

2. Si $n = 1$, le résultat est trivial, dans ces $E = \text{Vect}(e)$ où e est un vecteur non nul.

3. Supposons u n'est pas inversible.

(a) On a $u(E) \subset F$, donc nécessairement $u(F) \subset F$, donc $A/F \in \mathcal{L}(F)$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit A/F avec $\dim F = n - 1$: il existe des sous-espaces vectoriels cycliques F_j , $1 \leq j \leq k$ tels que $F = \bigoplus_{j=1}^k F_j$, les F_j étant choisis de telle sorte que $\dim F_j \leq \dim F_{j+1}$.

(b) i. $u(y) \in F$, donc il existe des scalaires $(\alpha_{l,j})_{(1 \leq j \leq k, 1 \leq l \leq m_j - 1)}$ tels que

$$\begin{aligned} u(y) &= \sum_{l,j} \alpha_{l,j} (u - \lambda_j Id_E)^l(x_j) \\ &= \sum_{l,j \in S} \alpha_{l,j} (u - \lambda_j Id_E)^l(x_j) + \sum_{l,j \notin S} \alpha_{l,j} (u - \lambda_j Id_E)^l(x_j) \\ &= \sum_{j \in S} \alpha_{0,j} x_j + \sum_{l \geq 1, j \in S} \alpha_{l,j} u^l(x_j) + \sum_{l,j \notin S} \alpha_{l,j} (u - \lambda_j Id_E)^l(x_j) \end{aligned}$$

On a $\sum_{l \geq 1, j \in S} \alpha_{l,j} u^l(x_j) = u \left(\sum_{l \geq 1, j \in S} \alpha_{l,j} u^{l-1}(x_j) \right) \in u(F)$ et pour $j \notin S$, il suffit de montrer que $x_j \in u(F)$, car si $x_j \in u(F)$, alors $x_j = u(y_j)$ et donc

$$(u - \lambda_j Id_E)^l(x_j) = u \left((u - \lambda_j Id_E)^l(y_j) \right) \in u(F).$$

On a, pour $j \notin S$:

$$\begin{aligned} x_j &= -\lambda_j^{-1} (u - \lambda_j Id_E)(x_j) + \lambda_j^{-1} u(x_j) \\ &= -\lambda_j^{-1} (u - \lambda_j Id_E) \left[-\lambda_j^{-1} (u - \lambda_j Id_E)(x_j) + \lambda_j^{-1} u(x_j) \right] + \lambda_j^{-1} u(y_j) \\ &= (-\lambda_j)^{-2} (u - \lambda_j Id_E)^2(x_j) - \lambda_j^{-2} (u - \lambda_j Id_E)u(x_j) + \lambda_j^{-1} u(x_j) \end{aligned}$$

On applique une autre fois x_j dans la formule précédente et de proche en proche on obtient

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{l=0}^{m_j-1} (-1)^l \lambda_j^{-l-1} (u - \lambda_j)^l u(x_j), \text{ car } (u - \lambda_j)^{m_j}(x_j) = 0. \\ &= u \left(\sum_{l=1}^{m_j-1} (-1)^l \lambda_j^{-l-1} (u - \lambda_j)^l (x_j) \right) \in u(F). \end{aligned}$$

Donc $u(y) - \sum_{j \in S} \alpha_{0,j} x_j \in u(F)$.

ii. Si S est vide, la même technique faite à x_j , montre que $u(y) \in u(F)$.

(c) Si $z \in F$ tel que $u(y) = u(z)$, alors $y - z$ est non nul et $y - z \notin F$, sinon y serait dans F . Donc $\text{Vect}(y - z)$ est un supplémentaire de F , d'où $E = F \oplus \text{Vect}(y - z)$.

(d) • Soit $x \in H = \bigoplus_{j \in S, j \leq p-1} F_j$ tel que $x = \sum_{j \in S, j \leq p-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_k u^k(x_j)$, donc $u(x) = \sum_{j \in S, j \leq p-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_k u^{k+1}(x_j) \in H$. D'où $u(H) \subset H$.

• $u^{m_p}(x) = \sum_{j \in S, j \leq p-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_k u^{k+m_p}(x_j) = 0$, car $u^{l+m_p}(x_j) = 0$. Donc $u^{m_p}(H) = \{0\}$.

• $y - z = \alpha_p a$, $u(y - z) = \alpha_p u(a) = \sum_{j \in S} \alpha_j x_j$, donc $u(a) = \sum_{j \in S} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} x_j = \sum_{j \in S, j \neq p} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} x_j + x_p$. Donc $u(a) \notin H$, car sinon x_p serait dans H ce qui est absurde. $u(a) \in H \oplus F_p$. Donc il suffit de montrer que la famille $(u^i(a))_{1 \leq i \leq m_p}$ est libre.

Soit $\beta_1, \dots, \beta_{m_p}$ des scalaires tels que :

$$\sum_{i=1}^{m_p} \beta_i u^i(a) = 0.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{m_p} \beta_i u^{i-1} \left(\sum_{j \in S} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} x_j \right) = \sum_{i=1}^{m_p} \sum_{j \in S, j \neq p} \beta_i u^{i-1} \left(\sum_{j \in S} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} x_j \right) + \sum_{i=1}^{m_p} \beta_i u^{i-1}(x_p) = 0.$$

Or $\sum_{i=1}^{m_p} \sum_{j \in S, j \neq p} \beta_i u^{i-1} \left(\sum_{j \in S} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} x_j \right) \in H$ et $\sum_{i=1}^{m_p} \beta_i u^{i-1}(x_p) \in F_p$, alors $\sum_{i=1}^{m_p} \beta_i u^{i-1}(x_p) = 0$, donc $\beta_1 = \dots = \beta_{m_p} = 0$. Donc

$$H \oplus F_p = H \oplus \text{Vect}\{u(a), u^2(a), \dots, u^{m_p}(a)\}.$$

(e) On a $a \neq 0$ et $a \notin F$, car $y \notin F$, donc $E = F \oplus \text{Vect}\{a\}$ et $F = \bigoplus_{j \neq p} F_j \oplus F_p$. Donc

$$E = \bigoplus_{j \neq p} F_j \oplus F_p \oplus \text{Vect}\{a\} = \bigoplus_{j \neq p} F_j \oplus \text{Vect}\{a, u(a), \dots, u^{m_p}(a)\}.$$

4. $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, alors u admet au moins une valeur propre λ . Donc $u' = u - \lambda \text{Id}_E$ est non inversible, donc il suffit de considérer l'endomorphisme u' .

5. • Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & X & 1 \\ 0 & 2 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X+1)^2(X-1)(X-2)$$

(en développant le déterminant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne).

$$E_1(u) = \ker(u - Id_{\mathbb{C}^4}) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Vect}(f_1), \quad f_1 = {}^t(0, 0, 1, -1).$$

$$E_2(u) = \ker(u - 2Id_{\mathbb{C}^4}) = \ker \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(f_2), \quad f_2 = {}^t(0, 0, 1, -2).$$

$$E_{-1}(u) = \ker(u + Id_{\mathbb{C}^4}) = \ker \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \text{Vect}(e_1), \quad e_1 = {}^t(1, 0, 0, 0).$$

Comme $\dim E_{-1}(u) \neq 2$ (2 est la multiplicité de -1 comme racine de χ_u), l'endomorphisme u n'est donc pas diagonalisable. Cependant, le Lemme des noyaux et le Théorème de Cayley-Hamilton nous permettent d'écrire :

$$\mathbb{C}^4 = \ker(u + Id_{\mathbb{C}^4})^2 \oplus \ker(u - Id_{\mathbb{C}^4}) \oplus \ker(u - 2Id_{\mathbb{C}^4}).$$

Reste à donner une base de jordanisation correspondant à la valeur propre -1 : on a la suite de noyaux itérés :

$$\ker(u + Id_{\mathbb{C}^4}) \subsetneq \ker(u + Id_{\mathbb{C}^4})^2.$$

On détermine donc une base du supplémentaire U_2 de $\ker(u + Id_{\mathbb{C}^4})$ dans $\ker(u + Id_{\mathbb{C}^4})^2$, c'est-à-dire tout simplement ici un vecteur non nul f_4 de $\ker(u + Id_{\mathbb{C}^4})^2 \setminus \ker(u + Id_{\mathbb{C}^4})$. Pour cela, on calcule $\ker(u + Id_{\mathbb{C}^4})^2$, tous calculs faits, on pose $f_4 = {}^t(0, 1, -1, 1)$. On fait agir $(u + Id_{\mathbb{C}^4})$ sur f_4 :

$$f_3 = (u + Id_{\mathbb{C}^4})(f_4) = (A + I_4)f_4 = (-1, 0, 0, 0) \in E_{-1}(u).$$

On a donc la base de jordanisation $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ et ainsi $J = \text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la

réduite de Jordan de A (à trois blocs) et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage associée.

• On a $u(e_2) = e_1$, $u^2(e_2) = e_3$, $u^3(e_2) = e_4$ et $u^4(e_2) = 0$. D'où $\mathbb{C}^5 = \text{Vect}\{e_2, u(e_2), u^2(e_2), u^3(e_2)\} \oplus \text{Vect}\{e_5\}$. La matrice de u dans une base adaptée à la décomposition précédente est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(réduite de Jordan à deux blocs).

• • • • •