Devoir libre $n°6$
Correction

Partie I : Interpolation polynomiale

1. On montre facilement que l'application $\varphi : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$, d'après les lois des espaces vectoriels $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$. Ces deux espaces vectoriels sont de même dimension n. De plus

$$\ker \varphi = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = 0\}$$

P est un élément du noyau de φ si, et seulement si, les n réels distincts $a_1, \dots, a_n$ sont racines de P. P élément du noyau de φ admet donc plus de racines distinctes que son degré, P est donc le polynôme nul. On en déduit que $\ker \varphi = \{0\}$. Finalement, par le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^n = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \ker \varphi + \mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\varphi)$$

et donc $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^n$.
φ est donc injective ($\ker \varphi = \{0\}$) et surjective ($\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^n$), donc φ bien un isomorphisme.

2. On déduit de la bijectivité de φ que :

$$\forall b \in \mathbb{R}^n, \quad \exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } \varphi(P) = u,$$

c'est-à-dire, pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ unique tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$

3. *Exemple :*
$P_0 \in \mathbb{R}_3[X]$, $P_0(0) = 1$ donc $P_0(X) = 1 + XQ_0(X)$ avec $Q_0 \in \mathbb{R}_2[X]$.
$P_0(1) = 3 = 1 + Q_0(1)$ donc $Q_0(1) = 2$ et $Q_0(X) = 2 + (X-1)R_0(X)$ avec $R_0(X) \in \mathbb{R}_1[X]$.
$P_0(2) = 11 = 1 + 2(2 + R_0(2))$, donc $3 = R_0(2)$ et $R_0(X) = 3 + a(X-2)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
$P_0(3) = 31 = 1 + 3(2 + 2(3 + a))$ donc $a = 1$ et finalement :

$$P_0(X) = 1 + X\left(2 + (X-1)(3 + X - 2)\right) = X^3 + X + 1.$$

Partie II : Polynômes spéciaux

1. Le polynôme $P(X) = X^2$ est un élément de E puisque $\forall x \in]0, +\infty[, \quad P(x) = x^2 > 0$ et $P'(x) = 2x > 0$.

2. Par linéarité de la dérivation des polynômes et sachant que le produit et la somme de deux réels strictement positifs est toujours un réel strictement positif, on a immédiatement :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ P + Q \in E, \ \alpha P \in E, \ PQ \in E.$$

E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, car E n'est pas stable par la multiplication par un réel quelconque, en effet, si $\alpha \in \mathbb{R}^-$ et $P \in E$ alors $\alpha P \notin E$.

3. Soit $P \in E$. On note $P_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\mathrm{d}t$.
P_1 est donc la primitive de P qui s'annule en 0. On en déduit que P_1 est un élément de $\mathbb{R}[X]$. De plus puisque P est dans E, on a :

$$x > 0 \Rightarrow \forall t \in [0, x], \quad P(t) > 0 \Rightarrow P_1(x) > 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad P_1'(x) = P(x) > 0$$

donc P_1 est un élément de E.

4. Soit $P \in E$. On sait que $\forall t > 0,\ \ P'(t) > 0$, alors positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ P(x) - P(0) = \int_0^x P'(t)\mathrm{d}t > 0,$$

et donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ P(x) \geq P(0)$.

5. D'après le résultat de la question précédente, on sait que $\widehat{P}$ est une fonction polynômiale, définie et dérivable sur $[0,+\infty[$, avec

$$\forall x > 0,\ \ \widehat{P}'(x) = P'(x) > 0.$$

Alors $\widehat{P}$ est une fonction polynomiale définie, continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $\widehat{P}$ réalise une bijection croissante de $[0,+\infty[$ sur $\left[\widehat{P}(0), \lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{P}(x)\right[= [P(0),+\infty[$.

6. Si, de plus P est de degré au moins 2, l'application $\widehat{P}$ n'est pas toujours une fonction polynomiale : par exemple $P : x \mapsto x^2$ est dans E mais $\widehat{P}^{-1}$ est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui n'est pas polynomiale.

Partie III : Matrices symétriques positives

1. La matrice A est symétrique réelle, on sait d'après le cours qu'elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale (formée des valeurs propres de A) telles que $A = PD{}^tP$.

2. (a) On suppose que $A \in \mathscr{S}_n^+$, soit λ une valeur propre de A, donc il existe $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul tel que $AU = \lambda U$ et donc $\left({}^tUAU\right) = \lambda\left({}^tUU\right) = \lambda\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2$. Or $\left({}^tUAU\right) \geqslant 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$, donc $\lambda \geq 0$.

(b) Réciproquement, on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives, alors avec les notations introduites dans le résultat rappelé en question 1, et en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments de la diagonale de la matrice D (donc valeurs propres de A), on aura :

$$\forall U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ \left({}^tUAU\right) = \left({}^tYDY\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq 0$$

où $Y = ({}^tPU) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. A est donc bien une matrice symétrique positive.

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

1. (a) On peut écrire $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$, alors $P(S) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i S^i$ et par conséquent

$$SA = SP(S) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i S^{i+1} = P(S)S = A.$$

On aura alors :

$$SA = Q\Delta Q^{-1}QDQ^{-1} = Q\Delta DQ^{-1} \text{ et } A.S = QDQ^{-1}Q\Delta Q^{-1} = QD\Delta Q^{-1},$$

donc
$$Q\Delta DQ^{-1} = QD\Delta Q^{-1},$$
et finalement par multiplication à gauche par Q^{-1} et multiplication à droite par Q on a bien
$$\Delta D = D\Delta.$$

(b) Notons $\Delta = (\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\Delta D = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $D\Delta = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = (d_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque D est une matrice diagonale, on a :
$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2\,,\ \ a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} d_{kj} = \delta_{ij}\lambda_j$$
et $\Delta D = D\Delta$ donc $a_{ij} = b_{ij}$ donc
$$i \neq j \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)\,\delta_{ij} = 0 \text{ or } \lambda_i \neq \lambda_j$$
alors $\delta_{ij} = 0$. La matrice Δ est donc diagonale.
D'après $\Delta = QSQ^{-1}$, on sait que les éléments diagonaux de Δ sont les valeurs propres de S, et S étant élément de $\mathscr{S}_n^+$ ses valeurs propres sont positives ou nulles. Δ est donc une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont positifs ou nuls.

2. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+$, on sait que l'on peut choisir Q orthogonale telle que $A = QDQ^{-1} = QD^tQ$ avec D diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de A, qui sont toutes positives. Par le résultat de la question précédente, on sait que si $S \in \mathscr{S}_n^+$ vérifie $P(S) = A$ alors $S = Q\Delta Q^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont positifs ou nuls. Notons alors $\beta_1,\ldots,\beta_n$ les éléments diagonaux de Δ.

En notant $\forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i$, on a : $P(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta^i$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les réels $P(\beta_1),\ldots,P(\beta_n)$. De plus
$$QP(\Delta)Q^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q\Delta^i Q^{-1},$$
or $\forall i \in \mathbb{N},\ \ Q\Delta^i Q^{-1} = \left(Q\Delta Q^{-1}\right)^i$, donc finalement :
$$QP(\Delta)Q^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(Q\Delta Q^{-1}\right)^i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S^i = P(S).$$
D'autre part, $QDQ^{-1} = A = P(S) = QP(\Delta)Q^{-1}$, alors on a $P(\Delta) = D$ et par identification des éléments de la diagonale de ces deux matrices on a nécessairement :
$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,,\ \ P(\beta_i) = \lambda_i$$
On en déduit que s'il existe une matrice $S \in \mathscr{S}_n^+$ telle que $P(S) = A$ alors S est unique et égale à $Q.\Delta.Q^{-1}$ avec Δ matrice diagonale dont les éléments diagonaux $\beta_1,\ldots,\beta_n$ vérifient $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,,\ \ P(\beta_i) = \lambda_i$.

Avec les conditions données sur les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de la matrice $A \in S_n^+$ et d'après la bijection $\widehat{P}$ de $[0,+\infty[$ sur $[P(0),+\infty[$, on sait que :
$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,,\quad \exists!\beta_i,\quad \text{tel que } \widehat{P}(\beta_i) = \lambda_i$$

On a $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\,,\ \ \beta_i = \widehat{P}^{-1}(\lambda_i)$.
En posant $S = Q\Delta Q^{-1} = Q\Delta\left({}^tQ\right)$, avec Δ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les réels positifs $\widehat{P}^{-1}(\lambda_1), \ldots, \widehat{P}^{-1}(\lambda_n)$, on obtient $S \in \mathscr{S}_n^+$ et

$$P(S) = QP(\Delta)Q^{-1} = QDQ^{-1} = A.$$

Il y a donc bien existence et unicité de la solution de $P(S) = A$ dans $\mathscr{S}_n^+$ et S est la matrice $Q\Delta Q^{-1}$ où Δ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les réels positifs $\widehat{P}^{-1}(\lambda_1), \ldots, \widehat{P}^{-1}(\lambda_n)$.

3. *Exemple :*

(a) Il est clair que $\forall x \in]0, +\infty[,\ \ P(x) > 0$. De plus $P'(x) = 3x^2 + 1$, donc $\forall x > 0,\ \ P'(x) > 0$. P est bien un élément de E.

(b) Il est clair que A est une matrice symétrique.
On remarque que P est le polynôme P_0 trouvé en partie I.

On peut remarquer que $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc 1 est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

On peut remarquer que $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\31\\31\end{pmatrix}$, donc 31 est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

On peut remarquer que $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$, donc 3 est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

On peut remarquer que $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\11\\-11\end{pmatrix}$, donc 11 est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
A étant un élément de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ ne peut avoir plus de quatre valeurs propres distinctes. Nous avons donc trouvé toutes les valeurs propres de A.
$A \in \mathscr{S}_4$ admet les quatre valeurs propres positives distinctes deux à deux $1, 3, 11, 31$, donc $A \in \mathscr{S}_4^+$.

(c) De plus les quatre vecteurs propres trouvés précédemment forment une famille orthogonale pour le produit scalaire canonique, ces vecteurs sont de norme égale à $\sqrt{2}$, on en déduit que $A = QDQ^{-1} = QD\left({}^tQ\right)$ avec

$$D = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&11&0\\0&0&0&31\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}.$$

(d) Le polynôme P donné est P_0 et vérifie donc $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 11$ et $P(3) = 31$, alors par les résultats de la question précédente, on sait que l'unique solution $S \in \mathscr{S}_4^+$ de l'équation $P(S) = A$ est $S = Q\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\left({}^tQ\right)$. Donc $S = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&5&1\\0&0&1&5\end{pmatrix}$.

• • • • • • • • • •