Devoir libre $n°7$
Correction

Partie I. Étude de la série harmonique

1. (a) Puisque f est une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, alors la plus petite valeur que peut prendre la somme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f(k)$ est obtenue lorsque $\{f(k)/n < k \leq 2n\} = \{1, 2, ..., n\}$. Donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite de somme partielles. On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{f(k)}{k^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) = \frac{n(n+1)}{8n^2} \geq \frac{1}{8}$$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est donc divergente, car si elle était convergente vers S, on aurait $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. La série $\sum u_n$ est donc divergente.

(c) On prend pour f l'application identique de $\mathbb{N}^*$. On obtient donc la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ qui est divergente.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta \in]k, k+1[$ tel que $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln'(\theta) = \dfrac{1}{\theta} \in \left]\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right[$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0.$$

De plus, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante et minorée converge vers une limite γ.

3. (a) Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$, donc

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

ou encore

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2}$$

D'où, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

(b) L'expression $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série de Riemann convergente, donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0$.
En utilisant les inégalités précédentes pour k variant de $n+1$ à N on obtient :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N},$$

d'où, quand N tend vers l'infini,

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}.$$

On a donc $\lim_{n} n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0$. Autrement dit, $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est équivalente à $\frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Les hypothèses sur les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraînent l'existence des restes des deux séries.

$$a_n \sim b_n \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_0 : (1-\varepsilon) b_k \leq a_k \leq (1+\varepsilon) b_k.$$

On a alors, $\forall m \geq n \geq n_0$:

$$(1-\varepsilon) \sum_{k=n+1}^{m} b_k \leq \sum_{k=n}^{m} a_k \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=n}^{m} b_k$$

ce qui donne, en faisant tendre m vers l'infini :

$$\forall n \geq n_0, \;\; (1-\varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} b_k$$

et par conséquent :

$$\sum_{k=n}^{\infty} b_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} a_k.$$

(d) v_n représente la somme partielle d'ordre n de la série de terme général $b_n = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln(n)$ pour $n \geq 2$ avec $v_1 = 1$. On a

$$b_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc b_n est équivalent à $\frac{-1}{n^2}$. Mais $\gamma - v_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$. En prenant $a_n = \frac{-1}{2n^2}$ la question précédente permet de conclure que $\gamma - v_n$ est équivalent à $-\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, donc à $-\frac{1}{2n}$ au voisinage de $+\infty$.

(e) L'entier n étant suffisamment grand on peut admettre que l'erreur commise, lorsqu'on prend comme valeur approchée de γ la valeur v_n, est de l'ordre de $\dfrac{1}{2n}$.

4. *Application :*

(a) Soit $x \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[$. On sait que la suite $(s_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers γ, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n - \ln(n) \geq \gamma$$

ce qui implique

$$u_n \leq x^{\gamma + \ln(n)}$$

car l'application $t \mapsto x^t = e^{t\ln(x)}$ est décroissante pour $x > 1$. Or

$$x^{\gamma+\ln(n)} = x^\gamma x^{\ln(n)}$$

et

$$x^{\ln(n)} = e^{\ln(x)\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln(x)} = n^{\ln(x)}$$

Finalement, $x^{\gamma+\ln(n)} = x^\gamma n^{\ln(x)}$, donc

$$0 \leq u_n \leq x^\gamma \frac{1}{n^{-\ln(x)}}$$

et $x < \dfrac{1}{e}$ implique $-\ln(x) > 1$. Donc la série de terme général $\dfrac{1}{n^{-\ln(x)}}$ est une série de Riemann convergente. Donc, il est de même de la série de terme général u_n.

(b) Soit $x = \dfrac{1}{e}$. La suite de terme général $s_n - \ln(n)$ est convergente et a pour limite γ. Il existe donc une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ qui tend vers 0 vérifiant

$$s_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n.$$

Donc

$$u_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{s_n} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln(n)} \left(\frac{1}{e}\right)^{\gamma} \left(\frac{1}{e}\right)^{\varepsilon_n} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\gamma} \left(\frac{1}{e}\right)^{\varepsilon_n} \frac{1}{n},$$

et don on a

$$\lim_{n\to\infty} n u_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{\gamma}.$$

En utilisant la règle de Riemann, on voit bien que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est divergente.

Pour $x > \dfrac{1}{e}$, $u_n > \left(\dfrac{1}{e}\right)^{s_n}$. Donc, par comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Partie II. Étude de la série harmonique alternée

1. (a) Montrons que les deux suite suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} = S_{2n} - |u_{2n+1}| \leq S_{2n},$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0.$$

Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, de même , la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$$

ce qui permet de conclure.

(b) Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergentes et de même limite, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi convergente vers la même limite.

2. (a) Soit n un entier naturel et $t \in [0,1]$. On a :

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}.$$

(b) Par la linéarité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-1)^k t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = S_n.$

Or

$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = \ln(2) + (-1)^n I_n.$$

Donc

$$S_n = \ln(2) + (-1)^n I_n.$$

3. Sur l'intervalle $[0,1]$, on a

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}.$$

Donc $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+2}$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. On en déduit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2).$$

Partie III. Étude de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$

1. Puisque $t \neq 2k\pi$, alors $e^t \neq 1$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} &= e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} \\ &= e^{it}\frac{e^{\frac{int}{2}}}{e^{\frac{it}{2}}}\frac{e^{\frac{-int}{2}} - e^{\frac{int}{2}}}{e^{\frac{-it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{t}{2}}\frac{\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)},\end{aligned}$$

et

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) = \frac{\cos(n+1)\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)\dfrac{t}{2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

Pour $t = 0$, comme $\cos(kt) = 1$ pour tout entier naturel, on obtient $c_n(0) = n$.

2. Une intégration par parties, montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$. Grâce à la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) c_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}.$$

D'après ce qui précède, on peut écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\mathrm{d}t$, mais

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\cos(n+1)\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\dfrac{t}{2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\dfrac{t}{2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\right]\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\sin(2n+1)\dfrac{t}{2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t.$$

3.

(a) et (b) Montrons le résultat suivant (lemme de Riemann) : Si u est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$, alors :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b u(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b u(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = 0.$$

En effet, une intégration par parties donne

$$\int_a^b u(t)\sin\lambda t dt = \frac{1}{\lambda}\left[u(a)\ \cos a - u(b)\ \cos(\lambda b) + \int_a^b u'(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t\right].$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, le fait que $\forall t \in \mathbb{R},\ \ |\cos t| \leq 1$ et l'inégalité du cours $\displaystyle\left|\int_a^b u(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |u(t)|\mathrm{d}t$, on obtient la majoration

$$\left|\int_a^b u(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(|u(a)| + |u(b)| + \int_a^b |u'(t)\mathrm{d}t|\right),$$

donc une inégalité de la forme $\left|\int_a^b u(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{C}{|\lambda|}$, où C est une constante indépendante de n, ce qui permet de conclure.
Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et que $\forall t \in]0,\pi]$,

$$f'(t) = \frac{\left(1-\dfrac{t}{\pi}\right)2\sin\dfrac{t}{2} - \left(t-\dfrac{t^2}{2\pi}\right)\cos\dfrac{t}{2}}{\sin^2\dfrac{t}{2}}.$$

- $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 2$, donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- $\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t) = \dfrac{-1}{\pi}$, donc f est dérivable en 0, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, d'après le théorème du prolongement de la dérivée.

On obtient, en utilisant le résultat précédent (lemme de Riemann),

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}.$$

• • • • • • • • • •