Devoir libre n°8

Correction

Partie I. Produit de convolution

1. La fonction $t \mapsto \varphi(t)f(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle hors de $[-a, a]$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f(x-t)dt = \int_{-a}^{+a} \varphi(t)f(x-t)dt$$

ce qui prouve que $(\varphi * f)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-a}^{+a} \varphi(t)f(x-t)dt \quad (1)$$

$$= \int_{x-a}^{x+a} \varphi(x-u)f(u)du \quad (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-u)f(u)du \quad (3)$$

$$= (\varphi * f)(x) \quad (4)$$

2. (a) La fonction g_n dont la restriction à $[-1, 1]$ est polynômiale et continue sur $\mathbb{R}$ puisque $g_n(1) = g_n(-1) = 0$. Son support est $[-1, 1]$ et g_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, car 1 et -1 sont des racines d'ordre n de $(1-x^2)^n$.

(b) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)dt = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = a_n$$

Le réel a_n est positif, car $(1-t^2)^n \geq 0$. Un changement de variable $t = \cos u$ donne une intégrale de Wallis. Donc, la fonction h_n vérifie la condition demandée.

Partie II. Convergence uniforme

1. Remarquons que

$$a_n = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq 2 \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{2}{n+1}$$

Donc, si $\delta \leq x \leq 1$

$$0 \leq h_n(x) \leq u_n = \frac{n+1}{2}(1-\delta^2)^n$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, car $0 < 1 - \delta^2 < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\delta, 1]} h_n(x) = 0$ La fonction h_n étant paire, on a également

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, -\delta]} h_n(x) = 0$$

2. Utiliser théorème de Heine : Toute fonction continue sur I , elle y est uniformément continue.

3. (a) Comme $\int_{-1}^1 h_n(t)dt = 1$, on a

$$f(x) - (h_n * f)(x) = \int_{-1}^1 (f(x) - f(x-t))h_n(t)dt.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $0 < \delta < 1$ tel que $|t| \leq \delta \implies |f(x) - f(x-t)| \leq \varepsilon$. On a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (f(x) - f(x-t))h_n(t)dt &= \int_{-1}^{-\delta} (f(x) - f(x-t))h_n(t)dt + \int_{-\delta}^{\delta} (f(x) - f(x-t))h_n(t)dt \\ &\quad + \int_{\delta}^1 (f(x) - f(x-t))h_n(t)dt. \end{aligned}$$

Notons I_1, I_2, I_3 ces trois intégrales et $M = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

• il existe n_1 tel que si $n \geq n_1$ (la question II.1)

$$|I_1| = \left| \int_{-1}^{-\delta} (f(x) - f(x-t))h_n(t)dt \right| \leq 2M \int_{-1}^{-\delta} h_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

• il existe n_2 tel que si $n \geq n_2$ (la question II.1)

$$|I_3| = \left| \int_{\delta}^1 (f(x) - f(x-t))h_n(t)dt \right| \leq 2M \int_{\delta}^1 h_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

• il existe n_3 tel que si $n \geq n_3$ (la question II.2)

$$|I_2| = \left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x) - f(x-t))h_n(t)dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, si $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$, si $n \geq n_0$, et pour tout x réel

$$|f(x) - (h_n * f)(x)| \leq \varepsilon.$$

4. Si $x, t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $x-t \in [-1, 1]$ ce qui implique que

$$g_n(x-t) = (1 - (x-t)^2)^n$$

donc

$$|x| \leq \frac{1}{2} \implies (f * h_n)(x) = \frac{1}{a_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(1 - t^2 + 2xt - x^2)^n dt$$

ce qui donne un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à $2n$.

5. (a) Il suffit de définir f_1 de façon affine sur $[c, a]$ et $[b, d]$. Soit

$$x \in [c, a] \implies f_1(x) = (x-c) \frac{g(a)}{a-c}$$

$$x \in [b, d] \implies f_1(x) = (x-d) \frac{g(b)}{b-d}$$