Devoir libre $n°9$
Correction

PARTIE I. GÉNÉRALITÉS

1. (a) Exemple de suite (a_n) vérifiant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$:

   Soit (a_n) telle que $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ car la série alternée $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge et vérifie $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ln(1+x)$ pour $|x| < 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ existe et vaut $\ln 2$.

   (b) Exemple de suite (a_n) qui ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$:

   la suite (a_n) telle que : $a_n = (-1)^n$ ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ car $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge et elle vérifie $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \dfrac{1}{1+x}$ pour $|x| < 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

   (c) Exemple de suite (a_n) qui ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$:

   la suite (a_n) telle que $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ car $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge (série harmonique) et elle ne vérifie pas $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\ln(1-x)$ pour $|x| < 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

   (d) Soit $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[$ vers $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a $R_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_n x^n = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ et par conséquent $\sup\limits_{x\in]-1,1[} |R_n(x)| = +\infty$. Donc la converge de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ ne peut pas être uniforme .

2. On suppose que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ est absolument convergente. Soit $f_n : x \to a_n x^n$, alors on a :

$$\forall x \in [0,R],\ \ |f_n(x)| \leq |a_n R^n|\,.$$

   Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,R]$ et puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = a_n R^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il en résulte que $\lim\limits_{x\to R^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to R^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

3. *Exemple*

   Si l'on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$, pour $n \geq 2$. Puisque $|a_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum\limits_{n\geq 2} a_n$ converge

absolument, il en résulte, d'après la question précédente, que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ existe et vaut $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$.
Or pour tout $n \geq 2$, on a

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

donc , pour $x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\ &= (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - x \\ &= (x+1)\ln(1+x) - x. \end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2\ln(2) - 1$ et puis $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = 2\ln(2) - 1$.

PARTIE II. THÉORÈME D'ABEL

4. (a) Pour tout $t \in [0,1]$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n (Rt)^n$ converge. Posons $b_n = a_n R^n$. On doit montrer que $\lim\limits_{t\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = S$, c'est-à-dire $\lim\limits_{t\to 1^-} g(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

   (b) Considérons $t \in [0,1[$. On a, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} b_k t^k - \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k (t^k - 1) = \sum_{k=1}^{n} (r_{k-1} - r_k)(t^k - 1) = \sum_{k=0}^{n} r_k (t^{k+1} - t^k) + r_n (1 - t^{n+1}).$$

   Comme la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car elle est convergente (de limite nulle), on en déduit que

$$g(t) - S = (t-1) \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n.$$

   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier n_0 tel que $|r_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n > n_0$, d'où :

$$|g(t) - S| \leq (1-t) \left| \sum_{n=0}^{n_0} r_n t^n \right| + (1-t)\,\varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{\infty} t^n = (1-t) \left| \sum_{n=0}^{n_0} r_n t^n \right| + \varepsilon t^{n_0+1}.$$

(d) Le majorant tend vers ε quand t tend vers 1, donc il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\alpha < t < 1 \Rightarrow \left|(1-t)\left|\sum_{n=0}^{n_0} R_n t^n\right| + \varepsilon t^{n_0+1} - \varepsilon\right| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\alpha < t < 1 \Rightarrow |g(t) - S| \leq 2\varepsilon.$$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} g(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ou encore $\lim\limits_{x\to R^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

5. On suppose que $\lim\limits_{x\to R^-} f(x) = +\infty$. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ diverge car sinon, $\lim\limits_{x\to R^-} f(x)$ serait finie.

6. (a) On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan)(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

et par intégration, on obtient :

$$\arctan(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

car $\arctan(0) = 0$.

Pour tout $\forall x \in]-1, 1[$ on pose $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge (série alternée vérifiant le critère spécial). Par la question 4., il en résulte que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-}\arctan(x) = \frac{\pi}{4}.$$

(b) i. Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_0 = v_0 = 0$ et $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ pour $n \geq 1$. Posons $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ pour $n \geq 0$, alors $c_0 = c_1 = 0$ et pour tout $n \geq 2$:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{k^{\frac{1}{4}}(n-k)^{\frac{1}{4}}} = (-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k(n-k))^{\frac{1}{4}}}$$

Or pour $k \in [1, n-1]$, on a $k(n-k) \leq \dfrac{n^2}{4}$, donc $|c_n| \geq \dfrac{n-1}{(\frac{n^2}{4})^{\frac{1}{4}}}$, par suite la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ diverge, car son terme général ne tend pas vers 0.

ii. On considère les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n x^n$ associées respectivement aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme les trois séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ convergent, alors les rayons de convergence des séries entières associées sont au moins égaux à 1.

Par le théorème d'Abel, on déduit que $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ et que $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$.

Or pour $x \in]0,1[$, les séries numériques $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n x^n$ convergent absolument et que pour tout $n \in N$, $w_n x^n = \sum_{k=0}^{n} u_k x^k v_{n-k} x^{n-k}$, donc (d'après le cours sur le produit de Cauchy de deux séries entières) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n\right),$$

et par passage à la limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

• • • • • • • • • • •