Devoir libre $n°10$
Correction

EXERCICE 1

1. La fonction $(x,t) \mapsto \ln(1+x^2-2x\cos t)$ est continue sur $[-\pi,\pi]\times]-1,1[$, puisque $1+x^2-2x\cos t > 0$ sur $[\pi,\pi]\times]-1,1[$. De plus elle admet une dérivée partielle par rapport à x

$$(x,t) \longmapsto \frac{2(x-\cos t)}{1+x^2-2x\cos t}$$

continue sur $[-\pi,\pi]\times]-1,1[$. Par application le théorème de cours, la fonction F est donc continue et dérivable sur $]-1,1[$, et on a :

$$F'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(x-\cos t)}{1+x^2-2x\cos t}\mathrm{d}t.$$

2. Par le changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$, on obtient, pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x - 2\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+x^2-2x\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)+(x+1)u^2}{((x-1)^2+(x+1)^2u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}+\frac{x^2-1}{(x-1)^2+(x+1)^2u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{x}\left[\arctan u + \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}u\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

3. Comme $F'(0) = 0$, alors F est constante sur $]-1,1[$ et puisque $F(0) = 0$, alors $\forall x \in]-1,1[, F(x) = 0$.

4. Si $|x| > 1$, alors $\frac{1}{x} \in]-1,1[$ et donc :

$$0 = F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\pi} \ln\left(1-\frac{2}{x}\cos t + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}[\ln(1-2x\cos t+x^2]-\ln(x^2))\mathrm{d}t = F(x)-2\pi\ln|x|.$$

D'où $F(x) = 2\pi\ln|x|$.

Remarque : Si $x = 1$, pour tout réel $t \in [-\pi,\pi]$ on a $x^2-2x\cos t+1 = 2-2\cos t = 4\sin^2\frac{t}{2}$. La fonction $\theta \mapsto \ln\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right)$ est continue sur $[-\pi,0[\cup]0,\pi]$ et quand t tend vers 0

$$\ln\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right) = 2\ln 2 + 2\ln\left|\sin\frac{t}{2}\right| \sim 2\ln\left|\frac{t}{2}\right| \sim 2\ln|t| = o\left(\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right).$$

On en déduit que la fonction $\theta \mapsto \ln\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right)$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$ et donc que $F(1)$ existe. Finalement, F est définie sur $[0,+\infty[$ et par parité F est définie sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

1. La fonction $(t,x) \mapsto \varphi(t,x) = \sqrt{|1 - x\cos t|}$ est continue sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}$, donc $t \mapsto \varphi(t,x)$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On calcule $f(-x)$ en posant $u = \pi - t$:

$$f(-x) = \int_0^\pi \sqrt{|1 + x\cos t|}\mathrm{d}t = -\int_0^\pi \sqrt{|1 - x\cos u|}\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{|1 - x\cos u|}\mathrm{d}u = f(x).$$

3. La fonction $x \mapsto \varphi(t,x)$ est deux fois dérivable $]-1,1[$ avec :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) = \frac{-\cos t}{\sqrt{1 - x\cos t}}$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t,x) = \frac{-(\cos t)^2}{4(1 - x\cos t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc f est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = \int_0^\pi \frac{-\cos t}{\sqrt{1 - x\cos t}}\mathrm{d}t$$

et

$$f''(x) = \int_0^\pi \frac{-(\cos t)^2}{4(1 - x\cos t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t.$$

On peut alors calculer :

$$4x(x^2-1)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) - x\varphi(t,x)$$
$$= \frac{-x(x^2-1)\cos^2 t - (x^2-1)\cos t(1 - x\cos t) - x(1 - x\cos t)^2}{(1 - x\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{-x(\cos^2 t + 1) + 2\cos t}{(1 - x\cos t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, on vérifie que

$$R(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{1 - x\cos t}}\right) = \frac{-2\cos t(1 - x\cos t) - \sin^2 t}{(1 - x\cos t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x(\cos^2 t + 1) + 2\cos t}{(1 - x\cos t)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'où l'égalité :

$$4x(x^2-1)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) - x\varphi(t,x) = R(t,x),$$

qui implique bien l'égalité cherchée par intégration en t sur $[0,\pi]$.

4. Puisque

$$\int_0^\pi R(t,x)\mathrm{d}t = \left[\frac{2\sin t}{\sqrt{1 - \cos t}}\right]_0^\pi = 0,$$

on en déduit bien que f vérifie l'équation différentielle :

$$4x(x^2-1)f''(x) + 4(x^2-1)f'(x) - xf(x) = 0.$$

EXERCICE 3

1. La fonction $(t,x) \mapsto \varphi(t,x) = e^{-x\sin t}$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \ t \mapsto \varphi(t,x)$ intégrable sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à x sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) = -\sin t e^{-x\sin t}.$$

Donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = -\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t e^{-x\sin t} \mathrm{d}t.$$

3. La fonction $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à x sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x) = x\sin^2 t e^{-x\sin t}\mathrm{d}t.$$

Donc f est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f''(x) = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t e^{-x\sin t}\mathrm{d}t.$$

On intègre par partie l'intégrale définissant f', en posant :

$$u(t) = e^{-x\sin t},\ \ u'(t) = -x\cos t e^{x\sin t},\ \ v'(t) = -\sin t,\ \ v(t) = \cos t,$$

et on obtient :

$$f'(x) = \left[\cos t e^{-x\sin t}\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 t e^{-x\sin t}\mathrm{d}t$$

$$= 0 + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin^2 t)e^{-x\sin t}\mathrm{d}t = xf(x) - xf''(x).$$

4. En suivant les mêmes étapes, on trouve que g vérifie l'équation différentielle :

$$xg''(x) + g'(x) - xg(x) = 0,$$

avec les conditions initiales $g(0) = \pi$ et $g'(0) = 0$. On en déduit que $f = g$, puisque f vérifie la même équation différentielle avec les mêmes conditions initiales.
En effectuant le changement de variable $t = u - \dfrac{\pi}{2}$ dans l'intégrale définissant g, on peut voir directement que $g = f$.

• • • • • • • • • • •