

Devoir libre n°11

Correction

1-Étude de $I(f)$ sur quelques exemples simples

1. (a) La fonction $t \mapsto e^{(a-x)t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $a - x < 0$, donc $f_1 \in E$, $I(f) =]a, +\infty[$ et $\sigma_1(f) = a$.
- (b) On a $|f_2(x)e^{-xt}| = e^{(a-x)t}$, donc $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $a - x < 0$, d'où $f_2 \in E$, $I(f_2) =]a, +\infty[$ et $\sigma(f_2) = a$.
- (c) Si $x > 0$, $t \mapsto t^a e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $t^a e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Si $x \leq 0$, $t^a e^{-xt} \geq t^a$ pour tout $t > 0$, donc $t \mapsto t^a e^{-xt}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.
Donc $f_3 \in E$, $I(f_3) =]0, +\infty[$ et $\sigma(f_3) = 0$.
- (d) Si $x > 0$, on a :

$$\left| e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-xt}.$$

Donc $t \mapsto e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Si $x = 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est non intégrable, en effet, on a :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Comme la série harmonique est divergente, ceci montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ est divergente.

Pour $x < 0$, posons

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

Alors

$$\begin{aligned} |u_n| &= |(-1)^n \int_0^{n\pi} e^{-x(t+n\pi)} \frac{\sin t}{t+n\pi} dt| = \int_0^{n\pi} e^{-x(t+n\pi)} \frac{\sin t}{t+n\pi} dt \\ &\geq \frac{e^{-xn\pi}}{(n+1)\pi} \int_0^{n\pi} \sin t dt = 2 \frac{e^{-xn\pi}}{(n+1)\pi} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = +\infty$.

On a donc trouvé une suite $x_n = n\pi$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt \right| = +\infty$$

Posons

$$H(x) = \int_0^X e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

La suite $(H(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas une suite de Cauchy, et donc H n'admet pas de limite en $+\infty$.

En conclusion, $f_5 \in E$, $I(f) =]0, +\infty[$ et $\sigma(f) = 0$.

2. (a) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{t^2}, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ alors $f \in E$, $I(f) = [0, +\infty[$ et $\sigma(f) = 0$.
- (b) $f(t) = e^{t^2}$, $I(f) = \emptyset$, car pour $x \in \mathbb{R}$ et pour t assez grand $|f(t)e^{-xt}| > \frac{1}{t}$.
- (c) $f(t) = e^{-t^2}$, $f \in E$ et $I(f) = \mathbb{R}$, car la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $|f(t)e^{-xt}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

2-Étude de $I(f)$ dans le cas général

1. Si $x_0 \in I(f)$, alors $t \mapsto f(t)e^{-x_0 t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc si $x > x_0$, alors

$$|f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)e^{-x_0 t}|$$

et donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où $x \in I(f)$.

2. On en déduit $I(f) = [\sigma(f), +\infty[$ si $\sigma(f) \in I(f)$ et $I(f) =]\sigma(f), +\infty[$ si $\sigma(f) \notin I(f)$.

3-Propriétés de la transformée de Laplace

1. TRANSFORMÉE D'UNE DÉRIVÉE

- (a) Soient $x \in \mathbb{R}$, $(\varepsilon, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto e^{-xt}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$, donc une intégration par parties donne

$$\int_{\varepsilon}^A f'(t)e^{-xt} dt = [f(A)e^{-xA} - f(\varepsilon)e^{-x\varepsilon}] + x \int_{\varepsilon}^A f(t)e^{-xt} dt.$$

Or d'après les hypothèses, les fonctions f et f' admettent chacune une limite à droite en 0, d'où en faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$(*) \quad \int_0^A f'(t)e^{-xt} dt = [f(A)e^{-xA} - f(0^+)] + x \int_0^A f(t)e^{-xt} dt.$$

- (b) Si $x \geq \max(\sigma(f), \sigma(f'))$, $t \mapsto f'(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$, alors la relation (*) précédente permet d'affirmer que $A \mapsto f(A)e^{-xA}$ admet une limite l en $+\infty$. Si $l \neq 0$, alors $f(t)e^{-xt} \sim l$ quand t tend vers $+\infty$ et par suite $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ serait non intégrable sur $]0, +\infty[$, ceci est absurde donc $l = 0$. En faisant tendre A vers $+\infty$, il vient $G(x) = xF(x) - f(0^+)$ ou encore

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0^+).$$

- (c) Théorème de la valeur finale : la fonction f est bornée sur $[0, +\infty[$, donc pour $x > 0$ la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Écrivons

$$xF(x) - l = \int_0^{+\infty} x(f(t) - l)e^{-xt} dt.$$

Soit M un majorant de $t \mapsto |f(t) - l|$ sur $[0, +\infty[$. Pour tout $A > 0$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} |xF(x) - l| &\leq \left| \int_0^A xe^{-xt}(f(t) - l) dt \right| + \left| \int_A^{+\infty} xe^{-xt}(f(t) - l) dt \right| \\ &\leq M \int_0^A xe^{-xt} dt + \left| \int_A^{+\infty} xe^{-xt}(f(t) - l) dt \right| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, fixons $A > 0$ tel que $|f(t) - l| \leq \varepsilon$ dès que $t \geq A$, donc

$$|xF(x) - l| \leq M(1 - e^{-xA}) + \varepsilon e^{-xA},$$

et par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

- (d) Soit $H(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ avec $x > 0$. H est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc bornée sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto H(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t)e^{-xt} = 0$, donc par une intégration par parties

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = x \int_0^{+\infty} H(t)e^{-xt} dt$$

d'où

$$\mathcal{L}(f)(x) = x\mathcal{L}(H)(x)$$

La transformée $\mathcal{L}(H)$ est définie au moins sur $]0, +\infty[$ et continue sur $]0, +\infty[$: en effet, si on fixe $x_0 > 0$, la fonction $t \mapsto H(t)e^{-x_0 t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et une domination évidente montre la continuité de $\mathcal{L}(H)$ sur $[x_0, +\infty[$. Grâce à (*), on déduit la continuité de $\mathcal{L}(H)$ et donc de $\mathcal{L}(f)$ sur $]0, +\infty[$.

En fin

$$\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \lim_{x \rightarrow 0} x\mathcal{L}(H) = \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x).$$

- (e) D'après ce qui précède la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ est continue sur $]0, +\infty[$. Montrons que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, en effet, posons $g(x, t) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$. On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin t$ et si $x > a$ on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at},$$

ceci prouve que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$ et

$$\Phi'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t = - \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc $\Phi(x) = c - \arctan x$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$, car $\left| e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-xt}$ et donc $|\Phi(x)| \leq \frac{1}{x}$, ainsi $c = \frac{\pi}{2}$, d'où $\forall x > 0, \Phi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = \Phi(0)$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

2. DÉRIVABILITÉ D'UNE TRANSFORMÉE DE LAPLACE

- (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$\begin{aligned} \varphi_n : [n, n+1] \times]\sigma(f), +\infty[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\longmapsto f(t)e^{-xt} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} : [n, n+1] \times]\sigma(f), +\infty[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\longmapsto -tf(t)e^{-xt} \end{aligned}$$

sont continues, donc U_n est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x > \sigma(f)$,

$$U_n(x) = - \int_n^{n+1} tf(t)e^{-xt} dt$$

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sigma(f) < b < a$. Alors pour $x \geq a$ et $t \geq 0$, on a

$$|tf(t)e^{-xt}| \leq t|f(t)|e^{-at} \leq |f(t)|e^{-bt}te^{-(a-b)t}.$$

La fonction $t \mapsto te^{-(a-b)t}$ étant continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 à l'infini, donc elle est bornée par une constante positive K , d'où

$$|tf(t)e^{-xt}| \leq K|f(t)|e^{-bt}.$$

(c) $\forall x \geq a$, on a

$$|U'_n(x)| \leq \int_n^{n+1} |tf(t)e^{-xt}| dt \leq K \int_n^{n+1} |f(t)|e^{-bt} dt = Kv_n,$$

avec $v_n = \int_n^{n+1} |f(t)|e^{-bt} dt$. La série $\sum v_n$ est convergente, car

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = \int_0^n |f(t)|e^{-bt} dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-bt} dt$$

donc la série $\sum U'_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. On a donc

- $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]\sigma(f), +\infty[$.
- La série $\sum U_n$ converge simplement sur $]\sigma(f), +\infty[$ vers F .
- La série $\sum U'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et pour tout $x > \sigma(f)$, $F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U'_n(x) = \int_0^{+\infty} (-tf(t))e^{-xt} dt$.

3. LIMITE À L'INFINI D'UNE TRANSFORMÉE DE LAPLACE

(a) Soit $A > 0$, f est continue sur $[0, A]$, donc bornée sur $[0, A]$ et il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0, A]$, $|f(t)| \leq M$ et par suite

$$\int_0^A f(t)e^{-xt} dt \leq M \int_0^A e^{-xt} dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{M}{x}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t)e^{-xt} dt = 0$.

(b) Soit $a > \sigma(f)$ fixé et $x > a$, alors on a :

$$\left| \int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt \right| \leq \int_A^{+\infty} |f(t)e^{-at}| e^{(a-x)t} dt \leq e^{(a-x)A} \int_A^{+\infty} |f(t)e^{-at}| dt$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(a-x)A} = 0$, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = 0$.

(c) On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = 0$.

4. INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

(a) i. Soit $x \in I(f)$ et $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} L(f)(x+a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(x+a)t} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) e^{-at} dt \\ &= \int_0^{+\infty} g'(t) e^{-at} dt \\ &= [e^{-at} g(t)]_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} g(t) e^{-at} dt \\ &= a \int_0^{+\infty} g(t) e^{-at} dt \end{aligned}$$

car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} g(t) = 0$ (g est bornée sur $]0, +\infty[$.)

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout $x \in I(f)$, $\mathcal{L}(f)(x) = 0$, on a en particulier, pour tout $x \in I(f)$ et $a > 0$ fixés $\mathcal{L}(f)(x + (n+1)a) = 0$. En remplaçant a par $(n+1)a$ dans i), on obtient

$$\mathcal{L}(f)(x + (n+1)a) = (n+1)a \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)at} g(t) dt = (n+1) \int_0^1 u^n g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) du,$$

en posant $u = e^{-at}$. D'où

$$\int_0^1 u^n g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) du = 0.$$

iii. Soit h l'application définie sur $[0, 1]$ par :

$$h(u) = \begin{cases} g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) & \text{si } u \in]0, 1] \\ \int_0^{+\infty} e^{-xv} f(v) dv & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

est continue sur $[0, 1]$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n h(u) du = 0$ et d'après le théorème de Weierstrass h est nulle sur $[0, 1]$. En effet, puisque tout polynôme est combinaison linéaire de monômes, on a pour tout polynôme P : $\int_a^b P(t)h(t)dt = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers h sur $[1, 0]$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_a^b (h(x))^2 dx = \int_a^b (h(x) - P_n(x)) h(x) dx \leq (b-a) \|h - P_n\|_{\infty} \|h\|_{\infty}$$

Comme la suite $(\|h - P_n\|_{\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, on déduit que $\int_a^b (h(x))^2 dx = 0$, d'où, puisque h est continue sur $[1, 0]$, $h = 0$ puis $g = 0$.

(b) Puisque $g = 0$ et que $\forall t \geq 0$, $g'(t) = e^{-xt} f(t)$, on conclut que $f = 0$.

4-Résolution d'une équation différentielle du second ordre

1. Soit une solution et $F = \mathcal{L}(y)$. On a

$$\mathcal{L}(y')(x) = x\mathcal{L}(y)(x) - y(0) = xF(x) + 3$$

et

$$\mathcal{L}(y'')(x) = x^2F(x) - (xy(0) + y'(0)) = x^2F(x) + 3x - 5$$

on a donc par linéarité de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(y'')(x) - 3\mathcal{L}(y')(x) + 2\mathcal{L}(y) = 4\mathcal{L}(e^{2t})(x)$$

donc

$$(x^2 - 3x + 2)F(x) + 3x - 14 = \frac{4}{x - 2}$$

donc

$$F(x) = \frac{-3x^2 + 20x - 24}{(x - 1)(x - 2)^2} = \frac{-7}{x - 1} + \frac{4}{(x - 1)^2} + \frac{4}{x - 2} = \mathcal{L}(-7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t})(x)$$

par l'injectivité de la transformée de Laplace, on obtient

$$y(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}.$$

2. En appliquant la transformée de laplace à (s) on obtient

$$\begin{cases} s\mathcal{L}(x)(s) + 2s^2\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s+1} \\ s\mathcal{L}(x)(s) + 2\mathcal{L}(x)(s) - \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

D'où

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s+1)(2s^2 + 4s + 1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}.$$

Donc

$$x(t) = 1 + e^{-t} - e^{\alpha t} - e^{\beta t},$$

et puis

$$y(t) = x'(t) + 2x(t) - 1 = 1 + e^{-t} + \beta e^{\alpha t} + \alpha e^{\beta t}.$$

$$\text{où } \alpha = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \text{ et } \beta = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}$$

3. (a) Soient $x > 0$ et $A > 0$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^A te^{-xt} f''(t) dt = Ae^{-xA} f'(A) - \int_0^A (1 - xt) e^{-xt} f'(t) dt$$

Une nouvelle intégration par parties donne :

$$\int_0^A te^{-xt} f''(t) dt = Ae^{-xA} f'(A) - (xA - 1)e^{-xA} f(A) + 1 + \int_0^A (x^2 t - 2x) e^{-xt} f(t) dt$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} Ae^{-xA} f'(A) = 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} (xA - 1)e^{-xA} f(A) = 0$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} te^{-xt} f''(t) dt = 1 + \int_0^{+\infty} (x^2 t - 2x) e^{-xt} f(t) dt = 1 - x^2 F'(x) - 2xF(x).$$

(b)

$$\begin{cases} ty'' + 2y' + ty = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Laplace au système on obtient

$$1 - x^2 F'(x) - 2x F(x) + 2x F(x) - 2 - F'(x) = 0,$$

c'est à dire $(1 + x^2)F'(x) + 1 = 0$, donc $F(x) = c - \arctan(x)$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ ce qui assure que $c = \frac{\pi}{2}$ d'où, $F(x) = \mathcal{L}(y)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, donc $y(t) = \frac{\sin t}{t}$.

• • • • •