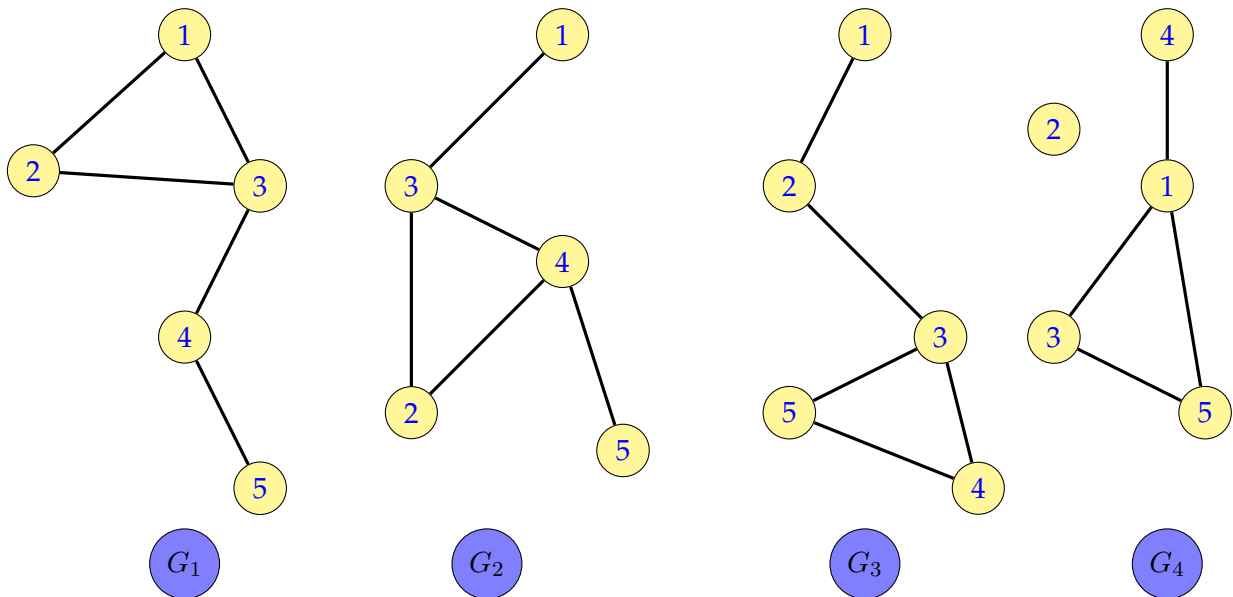


Devoir libre n°12

Correction

Nombre chromatique d'un graphe

1.



2. (a) Il suffit de considérer l'application $\varphi : S_1 \rightarrow S_3$ définie par $\varphi(1) = 5, \varphi(2) = 4, \varphi(3) = 3, \varphi(4) = 2$ et $\varphi(5) = 1$. On a bien φ est une bijection et $\forall (s, t) \in S_1, \{s, t\} \in A_1 \Leftrightarrow \{\varphi(s), \varphi(t)\} \in A_3$. Donc G_1 et G_2 sont isomorphes.

- (b) i. On a $\alpha_G(s) = \text{card}\{\{s, t\}/t \in S \text{ et } \{s, t\} \in A\}$. L'application

$$\varphi_s : V_G(s) \rightarrow \{\{s, t\}/t \in S \text{ et } \{s, t\} \in A\}$$

définie par $\varphi_s(t) = \{s, t\}$ est une bijection (vérification immédiate), donc

$$\text{card } V_G(s) = \text{card}\{\{s, t\}/t \in S \text{ et } \{s, t\} \in A\},$$

ou encore

$$\alpha_G(s) = \text{card}(V_G(s)).$$

- ii. Considérons l'application ψ de $V_G(s)$ dans $V_{G'}(\phi(s))$ définie par $\forall t \in V_G(s), \psi(t) = \phi(t)$.
 • ψ est injective, car ϕ est injective.
 • Soit $t' \in V_{G'}(\phi(s))$ et $t \in S$ tel que $\phi(t) = t'$. On a $\{\phi(s), t'\} = \{\phi(s), \phi(t)\} \in A'$ et comme ϕ est un isomorphisme de graphes entre G et G' , alors $\{s, t\} \in A$ et donc $t \in V_G(s)$.
 En conclusion, il existe $t \in V_G(s)$ tel que $\psi(t) = t'$. D'où ψ est surjective.
 Donc ψ est bijective et par conséquent $\text{card}(V_G(s)) = \text{card}(V_{G'}(\phi(s)))$ et d'après la question précédente, on a :

$$\alpha_{G'}(\phi(s)) = \alpha_G(s).$$

- (c) Non, en effet, supposons qu'il existe un isomorphisme φ entre G_1 et G_2 . On a :

$$V_{G_1} = \{t \in S_1/\{1, t\} \in A_1\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\},$$

donc $\text{card}(V_{G_1}(1)) = 2$. D'après la question précédente, $\text{card}(V_{G_1}(\varphi(1))) = 2$. Donc nécessairement $\varphi(1) = 2$. Le même raisonnement montre que $\varphi(2) = 2$. Ceci est absurde car φ est une bijection.

3. (a) On a $n_G = \text{card } S_G$, donc S_G et $\llbracket 1, n_G \rrbracket$ ont le même nombre d'éléments, donc il existe une bijection ψ de S_G dans $\llbracket 1, n_G \rrbracket$. En particulier, $\forall \{s, t\} \in A_G$, $s \neq t$ et donc $\psi(s) \neq \psi(t)$, c'est-à-dire ψ est un bon p -coloriage de G et donc $\psi \in B(n_G, G)$, d'où $f_G(n_G) = \text{card } B(n_G, G) \geq 1$ ou encore $n_G \in E(G)$.
- (b) Soit $p \in E(G)$. Fixons $\varphi_p : E \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ un bon p -coloriage. Tout d'abord, comme $p+1 > p$, on a $\varphi_p(x) \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$. On peut donc définir une application $\varphi_{p+1} : E \rightarrow \llbracket 1, p+1 \rrbracket$ en posant $\varphi_{p+1}(x) = \varphi_p(x)$. Alors comme $\varphi_{p+1}(x) = \varphi_p(x)$ pour tout $x \in S$, on a :

$$\forall (s, t) \in S^2, \{s, t\} \in A \Rightarrow \varphi_{p+1}(s) \neq \varphi_{p+1}(t).$$

Par suite φ_{p+1} est un bon $p+1$ -coloriage, donc un élément de $B(p+1, G)$. Ceci montre que $p+1 \in E(G)$.

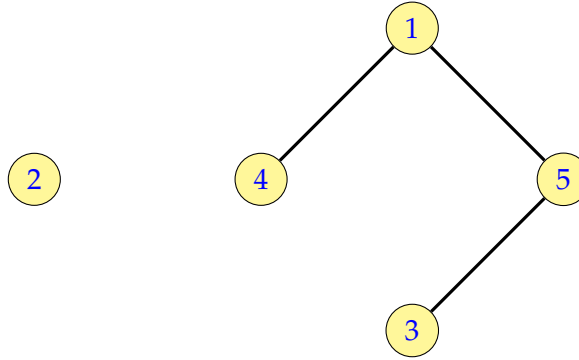
- (c) $E(G)$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ (il contient n_G). Soit donc θ_G le plus petit élément de $E(G)$ (toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément). D'où, d'après la question précédente :

$$E(G) = \mathbb{N} \cap [\theta_G, +\infty[.$$

4. (a) Si $A_G = \emptyset$, alors toute application de S_G dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ est un bon p -coloriage, donc $B(p, G)$ est l'ensemble de toutes les applications de S_G dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. D'où

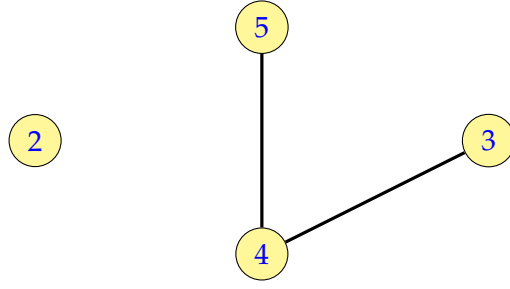
$$f_G(p) = \text{card } B(p, G) = p^{n_G}.$$

- (b) i. • $R(G_4) = \{1, 3\} \cup \{1, 4\} \cup \{1, 5\} \cup \{3, 5\} = \{1, 2, 4, 4\}$, d'où $\sigma(G_4) = 1$.
 • $\{t \in S_4 / \{1, t\} \in A_4\} = \{3, 4, 5\}$, donc $\tau(G_4) = 3$.
- ii. • $\begin{cases} S_{\lambda(G)} = S_{G_4} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ A_{\lambda(G_4)} = A_{G_4} \setminus \{\{1, 3\}\} = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}\} \end{cases}$



Graphe $\lambda(G_4)$

- et
- $\begin{cases} S_{\mu(G)} = \{2, 3, 4, 5\} \\ A_{\lambda(G_4)} = \{\{3, 4\}, \{3, 5\}\} \end{cases}$


 Graphe $\mu(G_4)$

- iii. Il est clair que $\text{card } A_{\lambda(G)} = \text{card } A_G - 1 < \text{card } A_G$. Vérifions d'abord que $A_{\mu(G)}$ est bien un ensemble de paires. Si $\{s, t\} \in A_{\mu(G)}$ et $\kappa(s) = \kappa(t)$, on aurait $\{s, t\} = \{\sigma(G), \tau(G)\}$ ce qui est exclu d'après la définition de $A_{\mu(G)}$. L'application κ induit une surjection de $A_{\lambda(G)}$ sur $A_{\mu(G)}$, il en découle que

$$\text{card } A_{\mu(G)} = \text{card}\{\{\kappa(s), \kappa(t)\} / (s, t) \in A_{\lambda(G)}\} \leq \text{card } A_{\lambda(G)} < \text{card } A_G.$$

- iv. A. Les bons p -coloriage de G et les bons p -coloriage de $\mu(G)$ n'ont pas le même domaine de définition, donc $B(p, G) \cap B(p, \mu(G)) = \emptyset$.
 B. On a $S_{\lambda(G)} = S_G$. Soit ψ un bon p -coloriage de G , donc ψ est une application de S_G dans $[1, p]$ qui vérifie

$$\forall (s, t) \in S_G^2, \{s, t\} \in A_G \Rightarrow \psi(s) \neq \psi(t),$$

et comme $A_{\lambda(G)} \subset A_G$, alors

$$\forall (s, t) \in S_{\lambda(G)}^2, \{s, t\} \in A_G \Rightarrow \psi(s) \neq \psi(t).$$

Donc ψ est un bon p -coloriage de $\lambda(G)$. D'où $B(p, G) \subset B(p, \lambda(G))$.

- C. Remarquons que $\tilde{\psi} = \psi \circ \kappa$. Soit $\{s, t\} \in A_{\lambda(G)}$. Alors $\{\kappa(s), \kappa(t)\} \in A_{\mu(G)}$. Comme ψ est un bon p -coloriage pour $\mu(G)$, on a $\psi(\kappa(s)) \neq \psi(\kappa(t))$, c'est-à-dire $\tilde{\psi}(s) \neq \tilde{\psi}(t)$. Ainsi, $\tilde{\psi}$ est un bon p -coloriage pour $\lambda(G)$: $\tilde{\psi} \in B(p, \lambda(G))$.

- D. Injectivité : Soient $\psi_1, \psi_2 \in B(p, G) \cup B(p, \mu(G))$ tels que $\Gamma(\psi_1) = \Gamma(\psi_2)$.

- Si $\psi_1, \psi_2 \in B(p, G)$, alors $\Gamma(\psi_1) = \psi_1$ et $\Gamma(\psi_2) = \psi_2$, donc $\psi_1 = \psi_2$.
- Si $\psi_1, \psi_2 \in B(p, \mu(G))$, alors $\Gamma(\psi_1) = \tilde{\psi}_1$ et $\Gamma(\psi_2) = \tilde{\psi}_2$, donc $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2$ et donc $\psi_1(s) = \psi_2(s)$ pour tout $s \neq \sigma(G)$ ceci implique que $\psi_1(s) = \psi_2(s)$ pour tout $s \in S_{\mu(G)}$, donc $\psi_1 = \psi_2$.
- Si $\psi_1 \in B(p, G)$ et $\psi_2 \in B(p, \mu(G))$ alors nécessairement $\psi_1 \neq \psi_2$ (d'après ?). On a

$$\tilde{\psi}(\sigma(G)) = \tilde{\psi}_2(\sigma(G)) = \psi_2(\tau(G))$$

et si $s \neq \sigma(G)$, $\psi_1(s) = \tilde{\psi}_2(s) = \psi_2(s)$ en particulier

$$\psi_1(\tau(G)) = \psi_2(\tau(G)) = \psi_1(\sigma(G))$$

ce qui est absurde, car $\{\sigma(G), \tau(G)\} \in A_G$, donc $\psi_1(\tau(G)) \neq \psi_1(\sigma(G))$. En conclusion, l'application Γ est injective.

Surjectivité : Soit φ un bon p -coloriage de $\lambda(G)$, deux cas sont possibles :

- $\varphi(\sigma(G)) \neq \varphi(\tau(G))$.
- $\varphi(\sigma(G)) = \varphi(\tau(G))$.

Si $\varphi(\sigma(G)) \neq \varphi(\tau(G))$, alors φ est un bon p -coloriage de G et donc $\Gamma(\varphi) = \varphi$.

Si $\varphi(\sigma(G)) = \varphi(\tau(G))$, alors $\tilde{\varphi} = \varphi$, en effet $\begin{cases} \tilde{\varphi}(\sigma(G)) = \varphi(\tau(G)) \\ \tilde{\varphi}(s) = \varphi(s) \text{ si } s \neq \sigma(G). \end{cases}$

D'où $\tilde{\varphi} = \varphi$ et par conséquent $\tilde{\varphi} = \Gamma(\varphi)$.

En conclusion, Γ est une bijection et par comparaison des cardinaux, on obtient :

$$\text{card } B(p, G) + \text{card } B(p, \mu(G)) = \text{card } B(p, \lambda(G))$$

$$\text{car } B(p, G) \cap B(p, \mu(G)) = \emptyset.$$

v. L'égalité précédente, entre cardinaux, s'écrit encore sous la forme :

$$f_G(p) + f_{\mu(G)}(p) = f_{\lambda(G)}$$

et ceci $\forall p \in \mathbb{N}^*$. D'où :

$$f_G = f_{\lambda(G)} - f_{\mu(G)}.$$

5. On va procéder par récurrence sur $\text{card } A_G$ (le nombre d'arêtes).

- Si $\text{card } A_G = 0$, c'est-à-dire $A_G = \emptyset$, $f_G(p) = p^{n_G}$ (d'après la question 6.)
- Supposons maintenant $\text{card } A \geq 1$. D'après ce qui précède

$$f_G = f_{\lambda(G)} - f_{\mu(G)}.$$

Les graphes $\lambda(G)$ et $\mu(G)$ contiennent tous deux $\text{card } A - 1$ arêtes. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des entiers $a_0, a_1, \dots, a_{n_G}$ tels que

$$f_{\lambda(G)}(p) = \sum_{k=0}^{n_G} a_k p^k, \quad (\text{card } S_g = \text{card } S_{\lambda(G)} = n_G)$$

avec $a_{n_G} \neq 0$.

De même, il existe des entiers $b_0, b_1, \dots, b_{n_G-1}$ tels que

$$f_{\mu(G)}(p) = \sum_{k=0}^{n_G-1} b_k p^k, \quad (\text{card } S_g = \text{card } S_{\mu(G)} = n_G - 1)$$

avec $b_{n_G-1} \neq 0$. D'où

$$f_G(p) = a_{n_G} p^{n_G} + \sum_{k=1}^{n_G-1} (a_k - b_k) p^k.$$

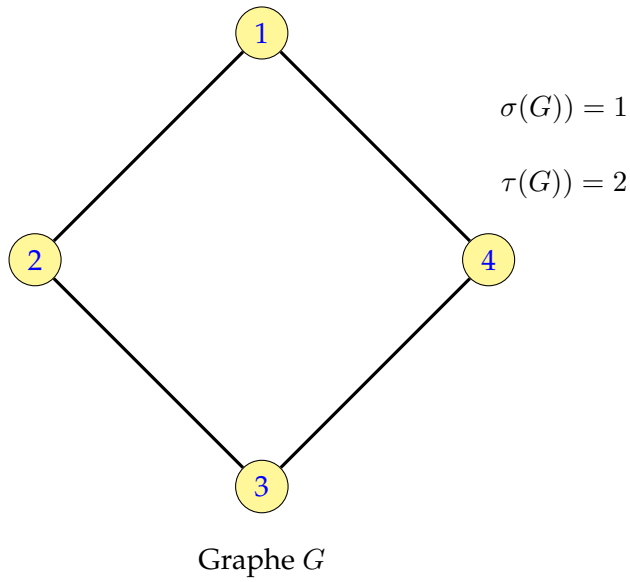
Donc f_G est une fonction polynomiale en p de degré n_G .

6. Si ϕ est un isomorphisme de G sur G' , alors on vérifie que :

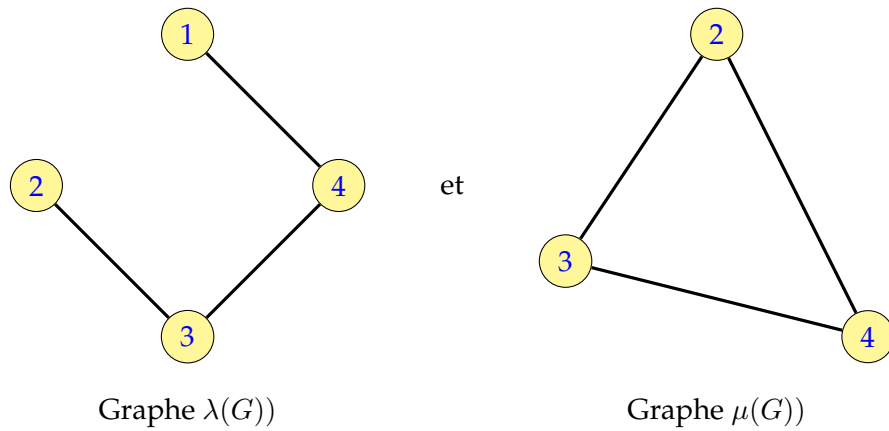
- Si ψ' est un bon p -coloriage de G' , $\psi' \circ \phi$ est un bon p -coloriage de G .
- Si ψ est un bon p -coloriage de G , $\psi \circ \phi^{-1}$ est un bon p -coloriage de G' .

L'application $\psi \mapsto \psi \circ \phi^{-1}$ définit donc une bijection de $B(p, G)$ vers $B(p, G')$, qui ont donc même nombre d'éléments. Par suite $f_{G'} = f_G$ si G et G' sont deux graphes isomorphes.

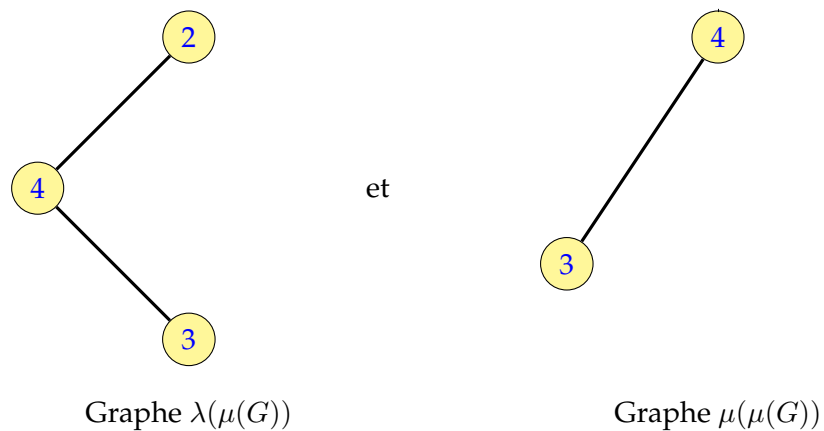
7. (a)



D'où



Ensuite, $\sigma(\mu(G)) = 2$ et $\tau(\mu(G)) = 3$, ce qui donne :



D'après la relation de la question précédente, on a :

$$f_G(p) = f_{\lambda(G)}(p) - f_{\mu(G)}(p)$$

et

$$f_{\mu(G)}(p) = f_{\lambda(\mu(G))}(p) - f_{\mu(\mu(G))}(p)$$

D'où

$$f_G(p) = f_{\lambda(G)}(p) - f_{\lambda(\mu(G))}(p) + f_{\mu(\mu(G))}(p).$$

Soit φ un bon p -coloriage de $\lambda(G)$, il y a p choix possibles pour $\varphi(1)$, $p-1$ choix pour $\varphi(2)$, $\varphi(3)$ et $\varphi(4)$. D'où

$$f_{\lambda(G)}(p) = p(p-1)^3.$$

De même

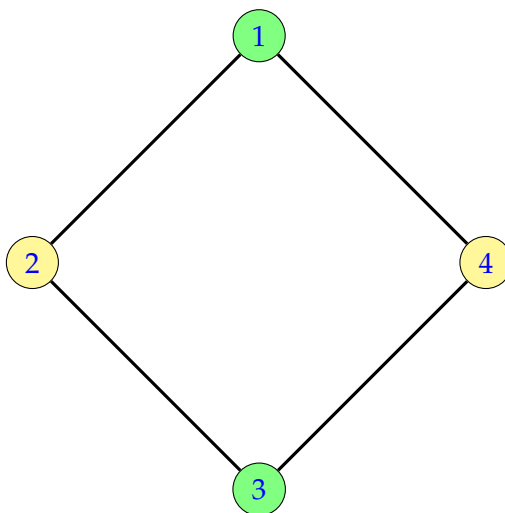
$$f_{\lambda(\mu(G))}(p) = p(-1)^2$$

et $f_{\mu(\mu(G))}(p) = p(p-1)$ ce qui donne :

$$f_G(p) = p(p-1)^3 - p(p-1)^2 + p(p-1) = p(p-1)(p^3 - 3p + 3).$$

(b) On a $f_G(1) = 0$ et $f_G(2) \neq 0$, d'où :

$$\theta_G = \min\{p \in \mathbb{N}^* / f_G(p) \neq 0\} = 2.$$



Remarque : Le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier chaque sommet du graphe G de façon que deux sommets adjacents quelconques soient de couleurs différentes est 2, c'est le nombre chromatique θ_G .

• • • • •