Devoir libre $n°13$
Correction

1. Au bout d'un nombre pair de sauts le point lumineux ne peut se trouver qu'en P_{-2}, P_0 ou P_2 et au bout d'un nombre impair de sauts il ne peut se trouver qu'en P_{-1}, P_1 ou P_2.

(a) Soit A_n l'événement « de $t = 0$ à $t = n$ le point lumineux ne s'est positionné ni en P_{-2} ni en P_2 ».
Soit D_n l'événement « le n-ième saut est un saut vers la droite. »
Soit G_n l'événement « le n-ième saut est un saut vers la gauche. »
Si A_{2k} est réalisé alors à l'instant $t = 2k$ le point lumineux est en P_0 est donc A_{2k+1} est réalisé. D'où $p(A_{2k+1}) = p(A_{2k})$.
D'autre part, on a :

$$A_{2k} = (A_{2k-2} \cap G_{2k-1} \cap G_{2k}) \cup (A_{2k-2} \cap D_{2k-1} \cap G_{2k})$$

et donc

$$p(A_{2k}) = p(A_{2k-2}) \times \frac{1}{4} + p(A_{2k-2}) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}p(A_{2k-2}).$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, d'où $p(A_{2k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k p(A_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ p(A_{2k+1}) = p(A_{2k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(b) Soit B_n l'événement « De l'instant $t = 0$ à l'instant $t = n$, $n > 0$, le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et il se positionnera en P_2 pour la première fois à l'instant $t = n$ ».
On a $p(B_{2k+1}) = 0$
et

$$B_{2k} = A_{2k-2} \cap D_{2k-1} \cap D_{2k}$$

et donc

$$p(B_{2k}) = \frac{1}{4}p(A_{2k-2}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

(c) Soit C l'événement « le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et se positionne en P_2 pour la première fois ».
On a $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ et donc $p(C) = \sum_{n=1}^{\infty} p(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(B_{2n}) = \sum_{n=}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}$.

2. (a) À l'instant $t = 0$ le point lumineux se trouve en P_0, donc $E(X_0) = V(X_0) = 1$. X_1 ne peut prendre que les valeurs 1 et -1 avec $p(X_1 = -1) = p(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, donc $E(X_1) = 0$ et $V(X_1) = 1$.
Le tableau suivant donne les lois de probabilités des variables X_2, X_3 et X_4.

k	-1	-1	0	1	2
$p(X_2 = k)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$
$p(X_3 = k$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$p(X_4 = k)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$

D'où

k	2	3	4
$E(X_k)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$V(X_k)$	2	$\frac{27}{16}$	$\frac{39}{16}$

(b) Pour calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_3, X_4) dressons le tableau de loi du couple (X_3, X_4) en utilisant la formule :

$$p(X_3 = i, X_4 = j) = p(X_4 = j/X_3 = i)p(X_3 = i)$$

X_3 \ X_4	-2	0	2
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{4}$

$\text{Cov}(X_3, X_4) = E(X_3X_4) - E(X_3)E(X_4))$ et $E(X_3X_4) = \displaystyle\sum_{-2\leq i,j\leq 2} ijp(X_3 = i, X_4 = j) = \frac{7}{4}$. Donc $\text{Cov}(X_3, X_4) = \frac{27}{16}$. D'où

$$\rho(X_3, X_4) = \frac{\text{Cov}(X_3, x_4)}{\sqrt{V(X_3)}\sqrt{V(X_4)}} = \sqrt{\frac{27}{39}}.$$

3. (a) On a $p(X_{n+1} = j) = \displaystyle\sum_{i=-2}^{2} p(X_{n+1} = j/X_n = i)p(X_n = i), \quad j \in [\![-2, 2]\!]$. D'où le relations suivantes :

$$\begin{aligned}
p(X_{n+1} = -2) &= \frac{1}{2}p(X_n = -1) && (1)\\
p(X_{n+1} = -1) &= p(X_n = -2) + \frac{1}{2}p(X_n = 0) && (2)\\
p(X_{n+1} = 0) &= \frac{1}{2}p(X_n = -1) + \frac{1}{2}p(X_n = 1) && (3)\\
p(X_{n+1} = 1) &= \frac{1}{2}p(X_n = 0) && (4)\\
p(X_{n+1} = 2) &= \frac{1}{2}p(X_n = 1) + p(X_n = 2) && (5)
\end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on a, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
p(X_{n+2} = 0) &= \frac{1}{2}p(X_{n+1} = -1) + \frac{1}{2}p(X_{n+1} = 1)\\
&= \frac{1}{2}\left[p(X_n = -2) + \frac{1}{2}p(X_n = 0)\right] + \frac{1}{4}p(X_n = 0)\\
&= \frac{1}{2}p(X_n = 0) + \frac{1}{2}p(X_n = -2)\\
&= \frac{1}{2}p(X_n = 0) + \frac{1}{2}\left[p(X_n = 0) - \frac{1}{4}p(X_{n-2} = 0)\right]
\end{aligned}$$

d'où $\forall n \geq 2, \;\; a_{n+2} - a_n + \frac{1}{8}a_{n-2} = 0$ ou encore $8a_{n+2-8a_n+a_{n-2}} = 0$.

(c) Les suites vérifiant $8u_{n+1-8u_n+u_{n-1}} = 0$ sont données par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n = \lambda\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^n + \mu\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^n, \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(d) Posons $a_{2n} = u_n$ et $a_{2n+1} = 0$. Alors $a_{2n} = \lambda\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^n + \mu\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^n$ et déterminons λ et μ grâce aux conditions initiales $a_0 = 1 = \lambda + \mu$ et $a_2 = \frac{1}{2} = \lambda\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) + \mu\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$. On obtient

$$a_{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^n.$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

•••••••••••