Devoir surveillé $n°1$
Correction

Exercice 01

1. (a) Remarquons que $f_1^2 = f_2^2 = f_3^2 = f_4^3 = id$ et que $f_4^2 = f_5$. On peut représenter la loi du groupe G par un tableau à 6 lignes et 6 colonnes portant dans la case d'intersection de la ligne indexé par un élément f_i de G et de la colonne indexé par un élément f_j de G la valeur du produit $f_i \circ f_j$.

$\circ$	id	f_4	$f_4^2 = f_5$	f_1	f_2	f_3
id	id	f_4	f_4^2	f_1	f_2	f_3
f_4	f_4	f_4^2	id	f_3	f_1	f_2
$f_4^2 = f_5$	f_4^2	id	f_4	f_2	f_3	f_1
f_1	f_1	f_2	f_3	id	f_4	f_4^2
f_2	f_2	f_3	f_1	f_4^2	id	f_4
f_3	f_3	f_1	f_2	f_4	f_4^2	id

(b) Il est facile de vérifier que tout élément de G apparait une fois et une seule dans chaque ligne et chaque colonne de la table. La table montre donc que $(G, \circ)$ est un groupe.

(c) Il est clair qu'un groupe fini est abélien si et seulement si sa table est symétrique par rapport à la diagonale principale. On peut remarquer aussi que, par exemple, $f_3 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_3$, donc $(G, \circ)$ est un groupe non commutatif.

2. Le groupe symétrique S_3 est d'ordre $3! = 6$. On peut d'écrire explicitement ses six éléments.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut alors dresser la table du groupe symétrique S_3. On en déduit en particulier que le groupe S_3 n'est pas abélien.

$\circ$	e	γ	γ^2	τ_1	τ_2	τ_3
e	e	γ	γ^2	τ_1	τ_2	τ_3
γ	γ	γ^2	e	τ_3	τ_1	τ_2
γ^2	γ^2	e	γ	τ_2	τ_3	τ_1
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	e	γ	γ^2
τ_2	τ_2	τ_3	τ_1	γ^2	e	γ
τ_3	τ_3	τ_1	τ_2	γ	γ^2	e

On sait qu'un isomorphisme de groupes conserve les propriétés algébriques comme l'ordre d'un élément ... on peut vérifier facilement que l'application φ de G dans $\mathscr{S}_3$ définie par :

$$\varphi(id) = e,\ \ \varphi(f_1) = \tau_1,\ \ \varphi(f_2) = \tau_2,\ \ \varphi(f_3) = \tau_3,\ \ \varphi(f_4) = \gamma,\ \ \varphi(f_5) = \gamma^2$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice 02

Il suffit de montrer que tous les éléments non nuls de A sont inversibles. Soit $a \in A$ non nul et soit φ l'application de A dans A définie par :

$$\forall x \in A, \ \ \varphi(x) = ax.$$

φ est injective, en effet si $\varphi(x) = \varphi(y)$, alors $ax = ay$ ou encore $a(x-y) = 0_A$ et comme A est intègre et $a \neq 0$, alors $x - y = 0_A$.
D'autre part A étant fini donc φ est bijective, et donc surjective, et par conséquent il existe $a' \in A$ tel que $aa' = 1_A$, en plus

$$a(a'a) = (aa')a = a,$$

puis, par intégrité, $a'a = 1_A$. Donc a est inversible.

Exercice 03

1. Il est clair que si $f, g \in E$, $f \oplus g \in E$ et que $f \oplus g = g \oplus f$, donc la loi $\oplus$ est commutative.
Montrons que la loi $\oplus$ est associative. Soient $f, g, h \in E$, on a, pour tout $x \in S$:

$$[(f \oplus g) \oplus h](x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) = h(x) = 0 \\ f(x) = g(x) = 1, \ \ h(x) = 0 \\ f(x) = 0, g(x) = h(x) = 1 \\ f(x) = 1, g(x) = 0, h(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow [f \oplus (g \oplus h)](x) = 0$$

De même

$$[(f \oplus g) \oplus h](x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, g(x) = 1, h(x) = 0 \\ f(x) = 1, g(x) = 0, \ \ h(x) = 0 \\ = f(x) = 0, g(x) = 0, h(x) = 1 \\ f(x) = 1, g(x) = 1, h(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f \oplus (g \oplus h)(x) = 1$$

D'où, $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$, donc la loi $\oplus$ est associative.
Désignons par θ l'application nulle de S dans $\{0, 1\}$. On a, pour tout $f \in E$,

$$\forall x \in S, \ \ (f \oplus \theta)(x) = f(x),$$

donc θ est l'élément neutre pour la loi $\oplus$. En plus, $f \oplus f = \theta$.
En conclusion $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif, dans lequel chaque élément est son propre inverse.

2. (a) On peut vérifier que $(F, \bigtriangleup)$ est un groupe.
Soient A et B deux partis de F, on a :

$$(\chi_A \oplus \chi_B)(x) = \begin{cases} 0 \ \text{si} \ \ \chi_A(x) = \chi_B(x) \\ 1 \ \text{si} \ \ \chi_A(x) \neq \chi_B(x) \end{cases}$$

Mais $\chi_A(x) = \chi(B)$ si, et seulement si, $x \in A \cap B$ ou $x \notin A \cup B$ ou encore si, et seulement si, $x \notin A \bigtriangleup B$ et $\chi_A(x) \neq \chi_B(x)$ si, et seulement si, $x \in A \bigtriangleup B$, donc on peut conclure que

$$\chi_A \oplus \chi_B = \chi_{A \bigtriangleup B},$$

ceci est équivalent à dire que $\varphi(A \bigtriangleup B) = \varphi(A) \oplus \varphi(B)$.
Il est évident que $\chi_A = \chi_B$ si, et seulement si, $A = B$; donc φ est injective, en plus si $f \in E$, on pose $A = \{x \in S / f(x) = 1\}$, on voit bien que $\chi_A = f$, donc l'application φ est un morphisme de groupes bijectif, donc est un isomorphisme.

(b) Puisque $(F, \triangle)$ et $(E, \oplus)$ sont isomorphes, alors F et E ont exactement les mêmes propriétés algébriques. En particulier, F est abélien et chaque élément coïncide avec son inverse.

Exercice 04

1. On a $0 \in A$, donc l'ensemble A est non vide. Il suffit donc de vérifier que A est un sous-groupe pour l'addition, et que la multiplication est stable.
Soient m, n, m', n' quatre éléments de $\mathbb{Z}$.

$$(m + n\sqrt{2}) - (m' + n'\sqrt{2}) = (m - m') + (n - n')\sqrt{2} \in A.$$

De même

$$(m + n\sqrt{2}) \times (m' + n'\sqrt{2}) = (mm' + 2nn') + (mn' + m'n)\sqrt{2} \in A.$$

2. Remarquons d'abord que pour tout élément a de A, $\varphi(\varphi(a)) = a$. Donc φ est une bijection, puisque tout élément de A a pour antécédent $\varphi(a)$.
Il évident que $\varphi(1) = 1$.
Montrons maintenant que φ est un morphisme pour l'addition.

$$\begin{aligned} \varphi((m + n\sqrt{2}) + (m' + n'\sqrt{2})) &= \varphi((m + m') + (n + n')\sqrt{2}) \\ &= (m + m') - (n + n')\sqrt{2} \\ &= (m - n\sqrt{2}) + (m' - n'\sqrt{2}) \\ &= \varphi(m + n\sqrt{2}) + \varphi(m' + n'\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Montrons enfin que φ est un morphisme pour la multiplication.

$$\begin{aligned} \varphi((m + n\sqrt{2}) \times (m' + n'\sqrt{2})) &= \varphi((mm' + 2nn') + (mn' + m'n)\sqrt{2}) \\ &= (mm' + 2nn') - (mn' + m'n)\sqrt{2} \\ &= (m - n\sqrt{2}) \times (m' - n'\sqrt{2}) \\ &= \varphi(m + n\sqrt{2}) \times \varphi(m' + n'\sqrt{2}). \end{aligned}$$

3. Soit $x = m + n\sqrt{2}$ un élément quelconque de A.

$$N(x) = x\varphi(x) = (m + n\sqrt{2}) \times (m - n\sqrt{2}) = m^2 - 2n^2.$$

Donc N est bien une application de A dans $\mathbb{Z}$. Montrons que c'est un morphisme pour la multiplication. Soient x et x' deux éléments de A.

$$N(xx') = xx'\varphi(xx') = xx'\varphi(x)\varphi(x') = (x\varphi(x))(x'\varphi(x')) = N(x)N(x'),$$

en utilisant le fait que φ est un morphisme pour la multiplication.

4. Si $N(x) = x\varphi(x) = 1$, alors $\varphi(x)$ est inverse de x, et si $N(x) = x\varphi(x) = -1$, alors $-\varphi(x)$ est inverse de x. La condition est donc suffisante.

Montrons qu'elle est nécessaire. Soit x un élément inversible de A, alors il existe y tel que $xy = 1$. Mais comme N est un morphisme pour la multiplication, $N(x)N(y) = 1$. Or $N(x)$ et $N(y)$ sont des entiers. Les seuls éléments de $\mathbb{Z}$ inversibles pour la multiplication sont 1 et -1. D'où le résultat.

5. Il suffit de calculer l'image par N, et d'appliquer le résultat de la question précédente. $N(3+2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$. L'inverse de $3 + 2\sqrt{3}$ est donc $3 - 2\sqrt{2}$.

Problème

1. (a) On a d'abord $\mathcal{C} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice nulle commute avec F, donc $\mathcal{C} \neq \emptyset$, en plus $\forall (M,N) \in \mathcal{C}^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(M+\lambda N)F = MF + \lambda NF = FM + \lambda FN = F(M+\lambda N),$$

d'où $M + \lambda N \in \mathcal{C}$ et par suite, $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Tout calcul fait on a :

$$FM = \begin{pmatrix} ax-bz & ay-bt \\ bx+cz & by+ct \end{pmatrix}, \quad MF = \begin{pmatrix} ax+by & -bx+cy \\ az+bt & -bz+ct \end{pmatrix}$$

Donc

$$MF = FM \Leftrightarrow \begin{cases} ax-bz = ax+by \\ ay-bt = -bx+cy \\ bx+cz = az+bt \\ by+ct = -bz+ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ b(x-t) = (c-a)y \end{cases}$$

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ alors

$$M = \begin{pmatrix} x-t+t & y \\ -y & t-x+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c-a}{b}y+t & y \\ -y & -\frac{c-a}{b}y+x \end{pmatrix},$$

d'autre part

$$uI + vF = \begin{pmatrix} u+va & vb \\ -vb & u+vc \end{pmatrix}.$$

Donc pour avoir $M = uI + vF$ il suffit de prendre $v = -\dfrac{y}{b}$ et $u = x + \dfrac{ay}{b}$

(d) D'après la question précédente (I,F) est une famille génératrice de $\mathcal{C}$, elle est en plus libre, car I et F ne sont pas proportionnelles, donc (I,F) est une base de $\mathcal{C}$.

2. (a) $F^2 \in \mathcal{C}$, donc il existe des scalaires α_2 et β_2 tels que $F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$. D'autre part, on a :

$$F^2 = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -ab-bc \\ ab+bc & -b^2+c^2 \end{pmatrix}.$$

D'où, par identification des coefficients, $\alpha_2 = a+c$ et $\beta_2 = -ac-b^2$.

(b) Puisque $F^n \in \mathcal{C}$, alors il existe des scalaires α_n et β_n tels que $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$.
Cherchons la relation de récurrence liant les α_n. L'égalité $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$ entraine :

$$F^{n+1} = F(\alpha_n F + \beta_n I) = \alpha_n F^2 + \beta_n F = \alpha_n(\alpha_2 F + \beta_2 I) + \beta_n F = (\alpha_n \alpha_2 + \beta_n)F + \alpha_n \beta_2 I.$$

Il suffit donc de prendre $\alpha_{n+1} = \alpha_n \alpha_2 + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = \alpha_n \beta_2$.

(c) D'après la question précédente, on a :

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}\alpha_2 + \beta_{n+1} = \alpha_{n+1}\alpha_2 + \alpha_n \beta_2,$$

c'est donc la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'équation caractéristique $r^2 - \alpha_2 r - \beta_2 = 0$ et de discriminant $\Delta = \alpha_2^2 + 4\beta_2 = (a+c)^2 - 4(ac+b^2)$.

(d) Dans ce cas $\Delta = 9$ et par suite $\alpha_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où $r_1 = 2$ et $r_2 = -1$ solutions de l'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ et λ et μ sont des constantes qu'on peut trouver à l'aide des conditions initiales $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$. On trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_n = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^n).$$

(e) Dans ce cas $\Delta = 0$ et par suite $\alpha_n = (\lambda + \mu n)r^n$ où $r = 2$ solution double de l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ et λ et μ sont des constantes qu'on peut trouver à l'aide des conditions initiales $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$. On trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_n = n2^{n-1}.$$

3. (a) Soit $(M, N) \in \mathcal{C}^2$, alors il existe des scalaires u, v, u', v' tels que $M = uI + vF, N = u'I + v'F$, d'où :

$$\begin{array}{rcl} MN & = & uu'I + (uv' + vu')F + vv'F^2 \\ & = & uu'I + (uv' + vu')F + vv'(\alpha_2 F + \beta_2 I) \\ & = & (uu' + vv'\beta_2)I + (uv' + vu' + vv'\alpha_2)F \in \mathcal{C}, \end{array}$$

ainsi $\mathcal{C}$ est stable pour le produit matriciel.

(b) Soit $M = uI + vF \in \mathcal{C}$, alors M est inversible si, et seulement si, $\det(M) = u^2 + (a + c)uv + (ac + b^2)v^2 \neq 0$.

(c) Toutes les matrices sont inversibles si, et seulement si,

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \ u^2 + (a + c)uv + (ac + b^2)v^2 \neq 0$$

si, et seulement si,

$$\left(u + \frac{a+c}{2}v\right)^2 + \left(ac + b^2 - \frac{(a+c)^2}{4}\right)v^2 \neq 0$$

si, et seulement si,

$$ac + b^2 - \frac{(a+c)^2}{4} > 0$$

si, et seulement si,

$$4b^2 - a^2 - c^2 + 2ac > 0$$

si, et seulement si,

$$4b^2 > (a - c)^2.$$

(d) Dans le cas où $a = 3, b = -2, c = -2$ on a $16 = 4b^2 < (a - c)^2 = 25$, et avec les notations précédentes $M = uI + vF$ est non inversible si, et seulement si, u et v solutions de l'équation :

$$\left(u + \frac{a+c}{2}v\right)^2 + \left(ac + b^2 - \frac{(a+c)^2}{4}\right)v^2 = 0$$

c'est à dire $\left(u - \frac{1}{2}v\right)^2 - \frac{9}{4}v^2 = 0$ si, et seulement si, $u - \frac{1}{2}v = -\frac{3}{2}v$ ou $u - \frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v$ si, et seulement si, $u = -v$ ou $u = 2v$, donc toutes les matrices sont inversibles sauf celles de la forme $u(I - F)$ ou $v(2I + F)$, c'est à dire non proportionnelles ni à $I - F$ ni à $2I + F$

4. (a) Il suffit de montrer que Φ est injective si, et seulement si, F inversible. En effet si F inversible alors

$$M \in \ker \Phi \Leftrightarrow FM = 0$$

et donc $F^{-1}FM = M = 0$, d'où Φ est injective.
Inversement, si Φ est automorphisme, en particulier Φ est surjective et donc il existe $M \in \mathcal{C}$ tel que $MF = I$, donc F est inversible.

(b) $\Phi(I) = F$ et $\Phi(F) = F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$, d'où :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b^2 - ac \\ 1 & a + c \end{pmatrix}.$$

●●●●●●●●●●●