Devoir surveillé $n°2$
Correction

Problème 1 [1]

Première partie

1. Si $P(x)=\sum_{p=0}^{n}a_px^p$, il vient :

$$L(P)=\int_{-1}^{1}P(x)dx=\sum_{p=0}^{n}a_p\int_{-1}^{1}x^pdx=\sum_{p=0}^{n}a_p\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_{-1}^{1}=\sum_{p=0}^{n}\frac{a_p}{p+1}(1-(-1)^{p+1})=2\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}\frac{a_{2k}}{2k+1},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
L'application L étant une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan de dimension n ($\dim E=n+1$), qui contient tous les fonctions polynômes impairs $x\mapsto x^{2k+1}$, $0\leq 2k+1\leq n$, ainsi que les fonctions polynômes pairs $x\mapsto 1-(2k+1)x^{2k}$, $0<2k\leq n$. On a ainsi n polynômes indépendants dans $\ker L$, c'est une base du noyau de L.

2. (a) Puisque $\dim E=\dim\mathbb{R}^{n+1}$, alors l'application linéaire Φ est un isomorphisme si, et seulement si, Φ est injective. Soit donc $P\in E$ tel que $\Phi(P)=0$, alors $P(x_i)=0$ pour tout $0\leq i\leq n$, donc, P étant de degré n et admettant $n+1$ racines, est nulle. L'application est donc bijective. L'unique polynôme P_i, antécédent de e_i, vérifie $P_i(x_i)=1$ et $P_i(x_j)=0$ si $i\neq j$. P_i $(0\leq i\leq n)$ n'est autre que le i-ème polynôme de Lagrange :

$$P_i(X)=\prod_{j\neq i}\frac{X-x_j}{x_i-x_j}.$$

(b) On sait que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ forme une base de E, comme image réciproque d'une base par un isomorphisme. Pour tout $P\in E$, il existe des scalaires α_i, $0\leq i\leq n$ tel que :

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_iP_i(x).$$

Or $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $P(x_j)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_iP_i(x_j)=\alpha_j$, d'où

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}P(x_i)P_i(x).$$

Donc

$$L(P)=\sum_{i=0}^{n}P(x_i)\int_{-1}^{1}P_i(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\lambda_iP(x_i)$$

Ainsi $\lambda_i=\int_{-1}^{1}P_i(x)\mathrm{d}x,\quad(0\leq i\leq n).$

1. Source : ups concours maths

3. L'égalité (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$ est vérifiée pour tout $P \in E$. Considérons $P \in E$ et $Q : x \mapsto P(-x)$. Calculons $L(Q)$ de deux façons :

$$L(Q) = \int_{-1}^{1} P(-x)\mathrm{d}x = -\int_{1}^{-1} P(u)\mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} P(u)\mathrm{d}u = L(P)$$

et

$$L(Q) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(-x_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n-i} P(x_i)$$

puisque $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \ x_{n-i} = -x_i$.
On a donc

$$\forall P \in E,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n-i} P(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

et l'unicité des $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ donne : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \ \lambda_{n-i} = \lambda_i$.

On suppose n pair, on pose $n = 2p$. On a $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{2p+1}\mathrm{d}x = 0$. D'autre part, les conditions sur les points x_i imposent $x_p = 0$ et

$$\sum_{i=0}^{2p} \lambda_i x_i^{2p+1} = \sum_{i=0}^{p-1} (\lambda_i x_i^{2p+1} + \lambda_{2p-i}(-x_i)^{2p+1}).$$

En utilisant $\lambda_i = \lambda_{2p-i}$ on obtient $\displaystyle\sum_{i=0}^{2p} \lambda_i x_i^{2p+1} = 0$. La relation (1) est donc vérifiée par X^{2p+1} et par linéarité de l'intégrale, (1) est valable pour tout polynôme de degré inférieur à $n+1$.

4. (a) Soit $P_f = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i)P_i$ le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)P_i(x) \Rightarrow \int_{-1}^{1} P_f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Écrivons l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre n pour f. Pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Posons $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Comme $P - P_f$ est un polynôme de degré n :

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)\right| &= \left|\int_{-1}^{1}[f(x)-P(x)]\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}[P_f(x)-P(x)]\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left|\int_{-1}^{1}(P_f(x)-P(x))\mathrm{d}x\right| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{2}{n+2} \\ &\leq \left|\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(P_f(x_i)-P(x_i))\right| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{2}{n+2} \\ &\leq \left|\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(f(x_i)-P(x_i))\right| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{2}{n+2} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n}|\lambda_i||f(x_i)-P(x_i)| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{2}{n+2} \\ &\leq M_{n+1}\left(\frac{2}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n}|\lambda_i|\right)\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = \dfrac{2}{(n+2)!}$ et $\beta = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

(b) Recommençons la même argumentation avec $f \in \mathscr{C}^{n+2}$ et tenons compte des hypothèses faites sur f et les (x_i), on a, en développant f à l'ordre $n+1$,

$$\forall x \in [-1,1],\ \ |f(x) - Q(x)| \leq M_{n+2}\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

où $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}X^k$, partie polynomiale du développement de Taylor de f, est de degré inférieur à $n+1$ et vérifie donc, d'après 3.

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i Q(x_i).$$

Comme à la question précédente, on en déduit

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)\right| \leq M_{n+2}\left(\frac{2}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+2)!}\sum_{i=0}^{n}|\lambda_i|\right).$$

5. (a) Le choix des points x_i assure $\lambda_0 = \lambda_4$ et $\lambda_1 = \lambda_3$. Les polynômes interpolateurs de Lagrange sont, dans cet exemple,

$$P_0 = \frac{2}{3}(X^2 - X)\left(X^2 - \frac{1}{4}\right),\ \ P_1 = -\frac{8}{3}(X^2-1)\left(X^2 - \frac{1}{2}X\right),\ \ P_2 = 4(X^2-1)\left(X^2 - \frac{1}{4}\right),$$

et le calcul des $\lambda_i = L(P_i)$ donne :

$$\lambda_0 = \lambda_4 = \frac{7}{45}, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{32}{45}, \quad \lambda_2 = \frac{4}{15}.$$

(b) Il suffit d'appliquer ce qui précède à la fonction $f : x \mapsto e^{(\frac{x}{2})^4}$. Il vient donc

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{4} \lambda_i f(x_i)\right| \leq \frac{M_6}{6!}\left(\sum_{i=0}^{4} |\lambda_i| + \frac{2}{7}\right) = \frac{16M_6}{7 \times 720}$$

Les calculs donnent : $f^{(6)}(x) = \left(\frac{x^6}{8^6} + \frac{15x^4}{8^5} + \frac{45x^2}{8^4} + \frac{15}{8^3}\right)e^{\frac{x^2}{16}}$. On obtient alors $M_6 = f^{(6)}(1) = \frac{10681}{8^6}e^{\frac{1}{16}}$ puis la majoration

$$\left|\int_{-1}^{1} e^{(x/4)^2} - \sum_{i=0}^{4} \lambda_i e^{(x_i/4)^2}\right| \leq \frac{21362}{8^5 7!}e^{\frac{1}{16}} \approx 1,4.10^{-4}.$$

Deuxième partie

6. (a) L'application $P \mapsto |L(P)|$ est continue. La boule unité fermée B d'un espace vectoriel normé de dimension finie étant compacte, $\sup\limits_{P \in B} |L(P)|$ existe et est atteint.

Supposons que la borne supérieure soit atteint en Q tel que $N(Q) < 1$. Posons $Q_1 = \frac{Q}{N(Q)}$. Alors $N(Q_1) = 1$ et :

$$|L(Q_1)| = \frac{|L(Q)|}{N(Q)} = \frac{\mathcal{N}(L)}{N(Q)} > \mathcal{N}(L).$$

Contradiction.

(b) Pour tout $P \in E$: $\frac{|L(P)|}{N(P)} \leq K$. Par définition du sup, $\mathcal{N}(L) \leq K$. S'il existe Q tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = K$, alors la borne supérieure est atteint.

7. Si $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$, alors :

$$N_\infty(P) \leq N_2(P)) \leq \sqrt{n+1}N_\infty(P).$$

On ne peut obtenir mieux. Pour $P(x) = x^p$, on a égalité dans la première inégalité, et pour $P(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p$, on a égalité dans la seconde inégalité.

8. (a) Posons $Q(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$. Alors :

$$|L(Q)| = \left|2\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{a_{2p}}{2p+1}\right| \leq \left(2\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{1}{2p+1}\right) N_\infty(Q)$$

Ainsi $\mathcal{N}_\infty(L) \leq 2\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{1}{2p+1}$. On a égalité avec $Q_\infty(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p$. D'après la question 6.b. on peut conclure $\mathcal{N}_\infty(L) = 2\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{1}{2p+1}$.

(b) Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a les majorations :

$$|L(P)| = 2\left|\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{a_{2p}}{2p+1}\right| \leq 2\left(\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2p}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\left(\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} N_2(P),$$

et pour $Q_2(x) = \dfrac{1}{\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{2p}}{2p+1}\right)$, on a $N_2(Q) = 1$ et

$$L(Q_2) = 2\left(\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut alors

$$\mathcal{N}_2(L) = 2\left(\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(2^p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Troisième partie

9. (a) Il suffit de prendre $P_k(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} x^p$. On a $N_\infty(P_k) = 1$ et $|L(P_k)| = \displaystyle\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2}{2p+1}$. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n+1}$ étant divergente à termes positifs, la suite $L(P_k)$ tend vers $+\infty$.

(b) L'application L n'est pas continue puisqu'on a trouvé une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur la sphère unité tels que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} L(P_k) = +\infty$.

10. (a) D'après les majorations de 8.b. on a, pour tout P de F,

$$|L(P)| \leq 2\left(\sum_{p=0}^{E\left(\frac{\deg P}{2}\right)} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} N_2(P).$$

La série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2p+1)^2}$ étant convergente, et pour $P \in F$, on a $|L(P)| \leq 2\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{1/2} N_2(P)$, donc L est bornée sur la sphère unité de (F, N_2), L est continue pour N_2, $|||L|||$ est défini et $|||L||| \leq 2\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(b) Considérons les polynômes Q_n définis par $Q_n(x) = \dfrac{1}{\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{2k}}{2p+1}\right)$. Ces polynômes sont dans la sphère unité de (F, N_2) et $L(Q_n)$ tend vers $2\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ce qui prouve $|||L||| = 2\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. (on utilise $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$).

On remarque par ailleurs que l'inégalité $|L(Q)| \leq 2\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} N_2(Q)$ est stricte dès que Q est non nul, donc $|||L|||$ n'est pas une valeur prise par L sur la sphère unité de (F, N_2). En effet, supposons qu'il existe $Q(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ polynôme tel que $N_2(Q) = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = |L(Q)| &\leq 2\left(\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2p}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{2p+1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq N_2(Q)\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On a donc égalité dans toutes ces inégalités. Donc $a_{2p} = \frac{\lambda}{2p+1}$ et $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2\left(\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, ce qui est impossible puisque $\frac{1}{(2p+1)^2} > 0$.

Problème 2[2]

Préliminaires

1. $(x, y) \in D$ si, et seulement si, $y \neq 1$, $y \neq -1$ et $(x+y)(1+xy) > 0$. Les points de $\mathbb{R}^2$ où $(x+y)(1+xy) > 0$ sont ceux pour lesquels les deux quantités $x+y$ et $1+xy$ sont non nulles et de même signe. Leur ensemble apparait en gris dans le dessin ci-dessous. Cet ensemble D' ne rencontre pas la droite $y = -1$ mais il rencontre la droite $y = 1$. Il faut ôter de D' les points de cette droite pour obtenir l'ensemble de définition D de f.
L'ensemble $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x+y)(1+xy) > 0\}$ peut être vu comme l'image réciproque de $]0, +\infty[$, ouvert de $\mathbb{R}$, par l'application $(x, y) \in \mathbb{R} \mapsto (x+y)(1+xy) \in \mathbb{R}$. Cette application est polynomiale, donc continue, donc D' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
De même, l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 1\}$ peut être vu comme l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, par l'application continue $(x, y) \in \mathbb{R} \mapsto y - 1 \in \mathbb{R}$. Comme intersection de deux ouverts, D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. $\forall (x, y) \in D,\ 1 + xy \neq 0$, donc $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{1+xy}$, quotient de deux fonctions polynômes, est $\mathscr{C}^1$ sur D, à valeurs sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition par $\ln$, qui est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $(x, y) \mapsto \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ est $\mathscr{C}^1$ sur D.
$\forall (x, y) \in D,\ 1 - y^2 \neq 0$, donc $(x, y) \mapsto \frac{1}{1-y^2}$ est $\mathscr{C}^1$ sur D. Comme produit de fonctions $\mathscr{C}^1$, la fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur D.

3. Pour tout $(x, y) \in D$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(1-y^2)}\left[\frac{1}{x+y} - \frac{y}{1+xy}\right] = \frac{1}{(x+y)(1+xy)}$$

et

2. Source : ups concours maths

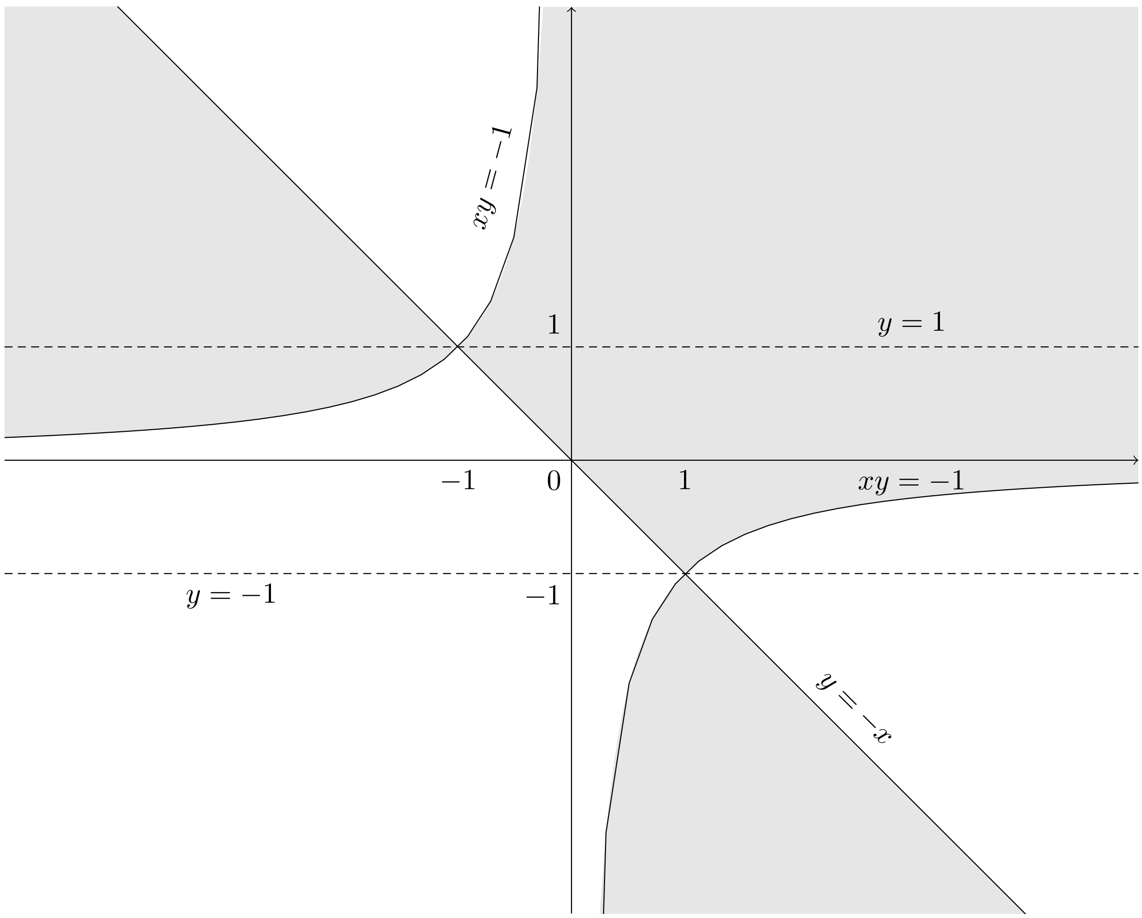

FIGURE 1 – Domaine de définition de la fonction f

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y}{(1-y^2)^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)+\frac{1}{(1-y^2)}\left[\frac{1}{x+y}-\frac{x}{1+xy}\right]=\frac{2y}{(1-y^2)^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\\ &\quad+\frac{1}{(1-y^2)}.\frac{1-x^2}{(x+y)(1+xy)}.\end{aligned}$$

Donc

$$(1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-2yf(x,y)=\frac{1-x^2}{(x+y)(1+xy)}=(1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),$$

ce qui prouve que f est solution de (E) sur l'ouvert D.

Résolution de (E)

4. (a) Posons $u=x+y$ et $v=xy$, donc $\Psi(x,y)=(u,v)$. $\forall(x,y)\in\Omega$, $u^2-4v=(x-y)^2>0$: Ψ est bien à valeurs dans Ω'.

Réciproquement, (u,v) étant fixé dans Ω', cherchons (x,y) vérifiant : $u=x+y,\ v=xy, y<x$. Cela équivaut à dire que x et y sont les racines de l'équation X^2-uX+v, x étant la plus grande. Comme cette équation admet un discriminant u^2-4v strictement positif, cette équation admet effectivement deux racines distinctes.

Le couple (u,v) admet donc un antécédent unique par Ψ, Ψ est donc une bijection de Ω vers Ω'.

Cette bijection est de classe $\mathscr{C}^1$ car ses deux composantes sont polynomiales. Ψ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω sur Ω'.

(b) D'après la question précédente Ψ^{-1} est définie sur Ω' par :

$$\forall (u,v)\in\Omega',\ \Psi^{-1}(u,v)=(x,y)=\left(\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2},\frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2}\right).$$

On voit bien que, par composition, Ψ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω'. Donc Ψ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω sur Ω'

5. (a) On donne g de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω vers $\mathbb{R}$. Posons $h=g\circ\Psi^{-1}$, donc h est de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω' vers $\mathbb{R}$ et $g=h\circ\Psi$, autrement dit $g(x,y)=h(x+y,xy)$.

(b) En utilisant le théorème de dérivation d'une fonction composée, on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial u}(x+y,xy)+y\frac{\partial h}{\partial v}(x+y,xy)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial u}(x+y,xy)+x\frac{\partial h}{\partial v}(x+y,xy).$$

L'égalité sur Ω de $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ équivaut donc à la nullité de $(y-x)\frac{\partial h}{\partial v}(x+y,xy)$ sur Ω, ou encore, puisque $y-x$ est non nul sur Ω, à celle de $\frac{\partial h}{\partial v}(x+y,xy)$ sur Ω ou enfin, par composition par Ψ^{-1}, à celle de $\frac{\partial h}{\partial v}$ sur Ω'.

6. (a) La fonction th est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et H est $\mathscr{C}^1$ sur Ω_1. Par composition et produit, $(u,v)\mapsto G(u,v)=(1-\operatorname{th}^2 v)H(\operatorname{th}u,\operatorname{th}v)$ est donc $\mathscr{C}^1$ sur Ω et :

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,v)=(1-\operatorname{th}^2 v)(1-\operatorname{th}^2 u)\frac{\partial H}{\partial x}(\operatorname{th}u,\operatorname{th}v)$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u,v)=-2\operatorname{th}v(1-\operatorname{th}^2 v)H(\operatorname{th}u,\operatorname{th}v)+(1-\operatorname{th}^2 v)^2\frac{\partial H}{\partial y}(\operatorname{th}u,\operatorname{th}v).$$

(b) H vérifie (E) sur l'ouvert Ω_1 ; nous pouvons donc recopier l'égalité (E) en remplaçant φ par H et le couple (x,y) par un couple quelconque $(\operatorname{th}u,\operatorname{th}v)$ tel que $\operatorname{th}v<\operatorname{th}u$, autrement dit $v<u$.

En utilisant **6.a)**, l'égalité obtenue équivaut à $\forall(u,v)\in\Omega$, $\frac{\partial G}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial G}{\partial v}(u,v)$.

Utilisons la question **5)** en y remplaçant les lettres u et v par U et V puisque, l'énoncé utilise deux fois la notation (u,v) pour désigner des choses différentes.

La propriété $\forall(u,v)\in\Omega$, $\frac{\partial G}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ équivaut à $\forall(U,V)\in\Omega'$, $\frac{\partial h}{\partial V}(U,V)=0$, avec ici $G=h\circ\Psi$.

Cela équivaut à dire que h est une fonction F de U seulement et comme, quand (U,V) décrit Ω', U prend toute valeur réelle, cette fonction F doit être $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, quand (u,v) décrit Ω, $G(u,v)$ est de la forme $F(u+v)$ avec F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc

$$H(\operatorname{th}u,\operatorname{th}v)=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2 v}F(u+v).$$

Posons alors $\Phi=F\circ\operatorname{th}^{-1}$. Par composition, Φ est $\mathscr{C}^1$ de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$ et

$$H(\operatorname{th} u, \operatorname{th} v) = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 v}\Phi(\operatorname{th}(u+v)) = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 v}\Phi\left(\frac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1+\operatorname{th} u \operatorname{th} v}\right),$$

quel que soit le couple (u, v) tel que $v < u$.

Pour tout (x, y) dans Ω_1, on a donc $H(x,y) = \dfrac{1}{1-y^2}\Phi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$. Résumons Il existe une fonction Φ qui est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ telle que $\forall (x,y) \in \Omega_1, H(x,y) = \dfrac{1}{1-y^2}\Phi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

7. Réciproquement, si Φ est C^1 de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$, la fonction H définie par la formule précédente est solution de (E) sur Ω_1. En effet :

• D'abord, pour $(x,y) \in \Omega_1$, on peut interpréter x et y comme u et v, ce qui fait apparaître $\dfrac{x+y}{1+xy}$ comme étant $(u+v)$ et assure son appartenance à $]-1,1[$. H est donc bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur G_1.

• Ensuite

$$(1-x^2)\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = (1-x^2)\left[\frac{1}{(1+xy)^2}\Phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right]$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{(1-y^2)^2}\Phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) + \frac{1}{1-y^2}.\frac{1-x^2}{(1+xy)^2}\Phi'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

si bien que $(1-y^2)\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 2yH(x,y) + (1-x^2)\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)$: H vérifie (E) sur Ω_1. Les solutions de (E) sur Ω_1 sont les fonctions H de la forme précédente.

• • • • • • • • • • •