

Devoir surveillé n°4

Correction

Exercice

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^\pi \cos(\alpha x) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(\alpha - n)x + \cos(\alpha + n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha - n} \sin(\alpha - n)x \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha + n} \sin(\alpha + n)x \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha - n} \sin(\alpha - n)\pi + \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha + n} \sin(\alpha + n)\pi \\ &= \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \alpha \sin(\alpha\pi). \end{aligned}$$

D'où $|u_n| = \left| \frac{(-1)^n \alpha \sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2} \right| \simeq \frac{|\alpha \sin(\alpha\pi)|}{n^2}$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge car elle converge absolument.

2. On a $a_n(x) = \operatorname{Re} \left(\sum_{p=1}^n (e^{ix})^p \right)$. Pour $x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $e^{ix} \neq 1$ et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n (e^{ix})^p &= e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\ &= e^{i \frac{(n+1)x}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } a_n(x) = \cos \frac{(n+1)x}{2} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \text{ Donc } C_1 = -C_2 = -\frac{1}{2}.$$

3. Il est évident que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\alpha \sin(\alpha x)}{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = 0 = F(0)$. Donc F est continue en 0. D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\alpha x) - 1}{x \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{(\alpha x)^2}{2} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -\alpha^2.$$

En conclusion, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n u_p &= \int_0^\pi \cos(\alpha x) \sum_{p=1}^n \cos(px) dx = \int_0^\pi \cos(\alpha x) a_n(x) dx \\ &= \int_0^\pi \cos(\alpha x) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(\alpha x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha x) \sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha x) - 1}{\sin\frac{x}{2}} \sin(2n+1)\frac{x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\alpha} + \frac{1}{2} \int_0^\pi F(x) \sin(2n+1)\frac{x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\alpha} + \frac{1}{2} I_n + \frac{1}{2} J_n. \end{aligned}$$

5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi F(x) \sin(2n+1) \frac{x}{2} dx = \left[-\frac{F(x) \cos(2n+1) \frac{x}{2}}{\frac{2n+1}{2}} \right]_0^\pi + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi F'(x) \cos(2n+1) \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi F'(x) \cos(2n+1) \frac{x}{2} dx \end{aligned}$$

D'où $|I_n| \leq \frac{2M\pi}{2n+1}$ où $M = \sup_{x \in [0, \pi]} |F'(x)|$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

6. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_0^\pi \frac{\sin(2n+3) \frac{x}{2} - \sin(2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos(n+1)x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= 2 \int_0^\pi \cos(n+1)x dx = 0 \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = J_0 = \pi$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{p=1}^n u_p = -\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\alpha} + \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}J_n$. D'où

$$\sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p \alpha \sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - p^2} = -\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\alpha} + \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}J_n.$$

Quand n tend vers l'infini, on obtient :

$$\sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^p \alpha \sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - p^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\alpha\pi)}{2\alpha}$$

ou encore

$$\sum_{p=1}^\infty \frac{2(-1)^{n-1} \alpha}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha}.$$

Problème

Partie I : Propriétés élémentaires

1. (a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\| \frac{u^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|u\|^n}{n!}$ converge, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ converge absolument et comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, alors la série converge dans $\mathcal{L}(E)$.

Soit $r > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| \leq r$, on a $\left\| \frac{u^n}{n!} \right\| \leq \frac{r^n}{n!}$. Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ converge normalement

et donc uniformément sur tout compact de $\mathcal{L}(E)$ et comme les applications $u \mapsto \frac{u^n}{n!}$ sont continues, alors exp est continue sur tout compact de $\mathcal{L}(E)$, donc elle est continue sur $\mathcal{L}(E)$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathcal{L}(E)$ on note $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$. Comme u et v commutent, on a :

$$\frac{(u+v)^n}{n!} = \sum_{i+j=n} \frac{\mathbb{C}_k^i}{i!} u^i v^j = \sum_{i+j=n} \frac{u^i}{i!} \frac{v^j}{j!}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \|S_n(u+v) - S_n(u)S_n(v)\| &= \left\| \sum_{k=0}^n \frac{(u+v)^k}{k!} - \sum_{i=0}^n \frac{u^i}{i!} \sum_{j=0}^n \frac{v^j}{j!} \right\| \\
 &= \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} \frac{u^i}{i!} \frac{v^j}{j!} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{u^i}{i!} \frac{v^j}{j!} \right\| \\
 &= \left\| \sum_{n+1 \leq i+j \leq 2n} \frac{u^i}{i!} \frac{v^j}{j!} \right\| \leq \sum_{n+1 \leq i+j \leq 2n} \frac{\|u\|^i}{i!} \frac{\|v\|^j}{j!} \\
 &\leq \sum_{k=0}^n \frac{(\|u\| + \|v\|)^k}{k!} - \sum_{i=0}^n \frac{\|u\|^i}{i!} \sum_{j=0}^n \frac{\|v\|^j}{j!}.
 \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, ce dernier terme tend vers $e^{\|u+v\|} - e^{\|u\|}e^{\|v\|} = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(u+v) - S_n(u)S_n(v)] = 0,$$

d'où $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$. On a de même $\exp(u+v) = \exp(v+u) = \exp(v)\exp(u)$.

En particulier, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\exp(u)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et $\exp(u)^{-1} = \exp(-u)$, donc $\exp(\mathcal{L}(E)) \subset \text{GL}(E)$.

- (c) Par définition $\exp(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(u)$ et comme $S_n(u) \in \mathbb{C}[u]$ et $\mathbb{C}[u]$ de dimension finie, alors $\mathbb{C}[u]$ est un fermé et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(u) = \exp(u) \in \mathbb{C}[u]$.
- (d) Il est clair que φ_v est linéaire et comme $\dim \mathcal{L}(E)$ est finie, alors φ_v est continue. On peut vérifier facilement que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(v^{-1}uv)^k = v^{-1}u^k v$, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
 \exp(v^{-1}uv) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{v^{-1}u^k v}{k!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[v^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \right) v \right] \\
 &= v^{-1} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} v^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \right) \right] v \text{ par continuité de } \varphi_v \\
 &= v^{-1} \exp(u) v
 \end{aligned}$$

- (e) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u , u étant trigonalisable, il existe P inversible telle que :

$$\text{Mat}(u) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc $\text{Sp}(\exp(u)) = \{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}\}$, en particulier

$$\det(\exp(u)) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\text{tr}(u)}.$$

2. Supposons qu'il existe A tel que $B = \exp(A)$. On sait que, d'après 1.e), $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)} \in \mathbb{R}^+$, car A est une matrice à coefficients réels, or $\det(\exp(A)) = \det B = -1 < 0$ ce qui est absurde. Donc il n'existe aucune matrice réelle A telle que $B = \exp(A)$.

3. • $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'où $\exp(A) = I + A = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- De même $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'où $\exp(B) = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. On peut vérifier par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $(A + B)^{2p} = I_2$ et $(A + B)^{2p+1} = A + B$, d'où :

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A + B)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(A + B)^{2p}}{p!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(A + B)^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} \right) I_2 + \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \right) (A + B) \\ &= \operatorname{ch}(1) I_2 + \operatorname{sh}(1) (A + B) \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(1) & \operatorname{sh}(1) \\ \operatorname{sh}(1) & \operatorname{ch}(1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- $\exp(A) \exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\exp(B) \exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Partie II : Surjectivité de exp dans le cas complexe

A-Cas où A est diagonalisable

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = |z| e^{i\theta}$. $|z| \in \mathbb{R}^{+*}$, donc il existe $r > 0$ tel que $|z| = e^r$. D'où $z = e^{r+i\theta} = e^{z'}$ avec $z' = r + i\theta$.
2. (a) Puisque $\dim E = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, alors l'application linéaire Φ est un isomorphisme si, et seulement si, Φ est injective.
Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P) = 0$, alors $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$, donc, P étant de degré r et admettant r racines, est nulle. Donc $\ker \varphi = \{0\}$. L'application est donc bijective. L'unique polynôme L , antécédent de $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ vérifie $L(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.
- (b) i. Il est clair que $l_i(\lambda_i) = 1$ et $l_i(\lambda_j) = 0$ si $i \neq j$.
ii. Les polynômes l_i forment une base de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$, donc il existe des scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ tel que $L = \sum_{i=1}^r \beta_i l_i$. D'après la question précédente $\mu_i = L(\lambda_i) = \beta_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.
3. A étant diagonalisable, donc il existe $P \in \operatorname{GL}(E)$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Soit, grâce à la surjectivité de $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_i = e^{\mu_i}$, $1 \leq i \leq r$. D'où

$$A = P \begin{pmatrix} e^{\mu_1} I_{\alpha_1} & & & \\ & e^{\mu_2} I_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mu_r} I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P \begin{pmatrix} \frac{\mu_1^k}{k!} I_{\alpha_1} & & & \\ & \frac{\mu_2^k}{k!} I_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\mu_r^k}{k!} I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

On sait qu'il existe $L \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$ tel que $\mu_i = L(\lambda_i)$ $1 \leq i \leq r$. D'où :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} P \begin{pmatrix} \frac{L(\lambda_1)^k}{k!} I_{\alpha_1} & & & \\ & \frac{L(\lambda_2)^k}{k!} I_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{L(\lambda_r)^k}{k!} I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1} = \exp(L(A)).$$

B-Cas où $A = I_n + N$ où N est nilpotente

4. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ avec $g_n(t) = \frac{f(t)^n}{n!}$. Les g_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'_n(t) = f'(t) \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}$. De plus si $r > 0$, alors il existe $M, M' > 0$ tels que $\|g'_n(t)\| \leq M' \frac{M^{n-1}}{(n-1)!}$ ($M = \sup_{t \in [-r, r]} \|f(t)\|$ et $M' = \sup_{t \in [-r, r]} \|f'(t)\|$). Donc on peut conclure que la série des dérivées $\sum g'_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(t)$.

5. D'après la question précédente, l'application g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(t) = \exp(f(t)) f'(t) = \exp(f(t)) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} t^{k-1} N^k.$$

$g'(t)$ est un polynôme en N (la question 1.c), d'où :

$$\begin{aligned} (I_n + tN)g'(t) &= \exp(f(t)) \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} t^{k-1} N^k + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} t^k N^{k+1} \right) \\ &= \exp(f(t)) N. \end{aligned}$$

Donc

$$Ng'(t) + (I_n + tN)g''(t) = \exp f(t) f'(t) N = Ng'(t),$$

d'où

$$(I_n + tN)g''(t) = 0$$

ou encore

$$g''(t) = 0.$$

Car $I_n + tN$ est inversible (tN est nilpotente). Donc g' est constante sur $\mathbb{R}$ et donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = g'(0) = N$. Or $g(0) = I_n$, alors $g(t) = I_n + tN$.

6. On a $g(1) = I_n + N = \exp f(1) = \exp D$.

C-A est quelconque

7. On sait que $\text{sp}(D) = \text{sp}(A) \subset \mathbb{R}^*$, donc D est inversible.
 8. D étant diagonalisable, donc il existe P inversible et D' tels que $D = \exp(P(D))$. De même il existe Q inversible tels que $I_n + D^{-1}N = \exp(D^{-1}N)$. D'où

$$A = \exp(P(D)) \exp(D^{-1}N) = \exp(B),$$

où $B = P(D) + D^{-1}N$. D^{-1} est un polynôme en D , donc en A . D'où $B \in \mathbb{C}[A]$.

D-Applications

9. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Si $A = \exp(A')$ avec $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A = B^2$ où $B = \exp\left(\frac{A'}{2}\right)$. Réciproquement, s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$, alors $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$, donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = \exp(P(B))$, d'où $\bar{B} = \exp(\bar{P}(B))$ et par suite $A = B^2 = B\bar{B} = \exp(P(B) + \bar{P}(B)) = \exp((P + \bar{P})(B))$ avec $(P + \bar{P})(B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
10. Soit $A, A' \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, alors il existe $B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A = \exp(B)$ et $A' = \exp(B')$. Alors, $\forall t \in [0, 1]$, $t \rightarrow \exp((1-t)B + tB') \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ est un chemin continu de A vers A' dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

• • • • •