

Devoir surveillé n°6

Correction

Partie A : Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans  $I_n$ <sup>1</sup>

1. (a) Si  $X$  est à valeurs dans  $I_n$ , alors  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $g_X(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ ,  $g_X$  est un polynôme de degré  $n$ .

$$g_X(1) = \sum_{k=0}^n a_k = 1 \text{ par définition d'une variable aléatoire à valeurs dans } I_n.$$

$$g_X(1) = 1$$

- (b)  $g_X$  est un polynôme à coefficients réels. Si  $g_X$  est donnée, par unicité des coefficients d'un polynôme, les coefficients  $a_k$  sont déterminés de façon unique. Donc la loi de  $X$  est connue.

2. (a) Pour tout réel  $t$ ,  $E(t^{Z_1+Z_2}) = E(t^{Z_1}t^{Z_2}) = E(t^{Z_1})E(t^{Z_2})$  car les variables aléatoires  $Z_1$  et  $Z_2$  étant indépendantes,  $t^{Z_1}$  et  $t^{Z_2}$  sont indépendantes. On a bien :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t)g_{Z_2}(t)$$

- (b) Si  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt + q)^n. \text{ (On a posé } q = 1 - p).$$

- (c) Si  $Y$  suit aussi une loi binomiale de paramètres  $n'$  et  $p$ , et si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $g_{X+Y}(t) = (pt + q)^n (pt + q)^{n'} = (pt + q)^{n+n'}$ .

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n + n'$  et  $p$ .

La fonction génératrice caractérise une loi, donc  $X + Y$  suit une loi binomiale de paramètres  $n + n'$  et  $p$ .

3. (a) Si  $X_1$  et  $X_2$  suivent une loi uniforme sur  $I_6^*$ , alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_{X_1}(t) = g_{X_2}(t) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 t^k.$$

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, alors :

$$g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) = \frac{1}{36} \sum_{k=2}^7 (k-1)t^k + \frac{1}{36} \sum_{k=8}^{12} (13-k)t^k.$$

On en déduit la loi de probabilité de  $X_1 + X_2$  :

$$\forall k \in \{2, \dots, 7\}, P(X_1 + X_2 = k) = \frac{k-1}{36}, \quad \forall k \in \{8, \dots, 12\}, P(X_1 + X_2 = k) = \frac{13-k}{36}$$

- (b) i. Si  $Y$  suit une loi uniforme sur  $I'$ , alors  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $R(t) = g_Y(t) = \frac{1}{11} \sum_{k=2}^{12} t^k = \frac{t^2}{11} \sum_{k=0}^{10} t^k$ .

1. Source : UPS concours maths, corrigé agro-véto 2011, épreuve B

$$\text{ii. } \boxed{\forall t \in \mathbb{R} - \{1\}, R(t) = \frac{t^2}{11} \times \frac{1 - t^{11}}{1 - t}.}$$

0 est racine double de ce polynôme.

Les nombres complexes  $e^{i\frac{2k\pi}{11}}$  pour  $k$  entier entre 1 et 10 sont racines non réelles de  $R$ .

On a trouvé au moins 12 racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) de  $R$ . Comme le polynôme  $R$  est de degré 12, il n'a pas d'autres racines.

$$\text{iii. } \forall t \in \mathbb{R}, g_{X_1}(t) = \sum_{k=1}^6 P(X_1 = k)t^k.$$

0 est racine du polynôme  $g_{X_1}$ , ce polynôme est divisible par  $t$ .

Il existe donc un polynôme à coefficients réels  $P$  tels que  $g_{X_1}(t) = tP(t)$ .

Le polynôme  $\sum_{k=1}^6 P(X_1 = k)t^k$  étant de degré 6,  $P$  est de degré 5.

De même il existe un polynôme  $Q$  de degré 5 tel que  $\sum_{k=1}^6 P(X_2 = k)t^k = tQ(t)$ .

Or  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, donc  $R(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) = t^2P(t)Q(t)$ .

$$\boxed{R(t) = t^2P(t)Q(t)}$$

iv. Les racines de  $P$  et  $Q$  seraient les nombres complexes non réels  $e^{i\frac{2k\pi}{11}}$  pour  $k$  entier entre 1 et 10. Ce qui est absurde, car  $P$  étant de degré impair, il devrait avoir au moins une racine réelle.

On ne peut donc pas truquer les dés de manière que la loi de  $X_1 + X_2$  soit uniforme sur  $I'$ .

## Partie B : Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$

1.  $\forall t \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |a_n t^n| \leq a_n$ .

La série de terme  $\sum a_n$  converge, et sa somme vaut 1.

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série  $\sum a_n t^n$  converge absolument.

Or la convergence absolue entraîne la convergence.

Donc  $g_X$  est défini sur  $[-1, 1]$ .

$$g_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1, \text{ par définition d'une variable aléatoire.}$$

2. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\forall t \in [-1, 1]$  les variables aléatoires  $t^X$  et  $t^Y$  sont indépendantes et admettent des espérances d'après le 1.

Donc  $g_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2}) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$ .

$$\boxed{g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)}$$

3. (a) Si  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , alors

$$\forall t \in [-1, 1], g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p t^k = p t \sum_{k=0}^{+\infty} (qt)^k = \frac{pt}{1-qt}, \text{ car } |qt| < 1$$

(b) Si  $X$  suit une loi Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors  $\forall t \in [-1, 1]$ ,  $g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$ .

## Partie C : Fonction génératrice de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

1. Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété : " $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\psi_n(t) = (f(t))^n$ ".

- $\mathcal{P}_1$  est vraie.
- Supposons que  $\mathcal{P}_n$  soit vraie. Sous cette hypothèse, les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_{n+1}$  étant indépendantes,  $X_1 + \dots + X_n$  et  $X_{n+1}$  sont indépendantes.  
D'après B.2 la fonction génératrice de  $X_1 + \dots + X_n + X_{n+1}$  est  $\psi_{n+1} = g_{X_1 + \dots + X_n} g_{X_{n+1}}$   
En utilisant l'hypothèse de récurrence,  $\forall t \in [-1, 1]$ ,  $\psi_{n+1}(t) = (f(t))^n f(t) = (f(t))^{n+1}$ .  
Donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.
- Par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

2. La variable aléatoire  $N$  étant à valeurs dans  $I_s$ , la famille  $(N = n)_{n \in I_s}$  est un système complet d'événements. Utilisons la formule des probabilités totales :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(Y = k) = \sum_{n=0}^s P((S_n = k) \cap (N = n)).$$

Or si  $N = n$ , alors  $Y = S_n$ . Donc  $P(Y = k) = \sum_{n=0}^s P((S_n = k) \cap (N = n)).$

3.  $\forall t \in [-1, 1]$ ,  $g(t) = g_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^s P((S_n = k) \cap (N = n)) \right) t^k$

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^s P(S_n = k) P(N = n) \right) t^k$$

car  $N$  est indépendante des variables  $X_n$ , donc de  $S_n$ .

4. Soit  $t \in [-1, 1]$ . Pour tout  $n \in I_s$  la série de terme général  $P(S_n = k) t^k$  est absolument convergente. Donc la combinaison linéaire  $\sum_{n=0}^s P(N = n) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) t^k \right)$  est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^s P(N = n) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) t^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^s P(N = n) P(S_n = k) t^k \right) = g(t)$$

Donc  $g(t) = \sum_{n=0}^s P(N = n) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) t^k \right) = \sum_{n=0}^s P(N = n) \psi_n(t)$

$$g(t) = \sum_{n=0}^s P(N = n) (f(t))^n = h(f(t)).$$

Ce qui montre que :

$$\boxed{\forall t \in [-1, 1], g(t) = (h \circ f)(t).}$$

5. On a vu au B.3.a. que  $\forall t \in [-1, 1]$ ,  $f(t) = \frac{pt}{1-qt}$  et  $h(t) = \frac{p't}{1-q't}$ .

$$\text{Donc } g(t) = h(f(t)) = \frac{p'f(t)}{1-q'f(t)} = \frac{p' \frac{pt}{1-qt}}{1 - q' \frac{pt}{1-qt}} = \frac{pp't}{1 - (q + q'p)t}.$$

$$g(t) = \frac{pp't}{1 - (q + q'p)t}.$$

Or  $q + q'p = 1 - p + (1 - p')p = 1 - pp'$ , donc  $g(t) = \frac{pp't}{1 - (1 - pp')t}$ . On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $pp'$ .

Y suit la loi géométrique de paramètre  $pp'$

### Partie D : Multiplication d'une bactérie

1. Si à la génération  $n$  il n'y a plus de bactéries, alors à génération  $n + 1$  il n'y a pas non plus de bactérie. L'événement  $Y_n = 0$  entraîne l'événement  $Y_{n+1} = 0$ , donc  $x_n \leq x_{n+1}$ . La suite  $(x_n)$  est croissante, majorée par 1 (ce sont des probabilités), donc converge.

2.  $Y_1$  est le nombre de fils de la bactérie de départ. Donc  $Y_1$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
 $f(0) = g_{Y_1}(0) = P(Y_1 = 0) = x_1$

$$x_1 = f(x_0)$$

3. Si  $Y_1 = 0$ , alors  $Y_2 = 0$

Sinon : la bactérie de départ a  $Y_1$  fils qu'on peut numéroté de 1 à  $Y_1$ .

Appelons  $X_k$  le nombre de fils du fils numéro  $k$ .

Notons, comme dans le C.  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

Le nombre de fils de la seconde génération est  $Y_2 = S_{Y_1}$

Par hypothèse les variables aléatoires  $(X_k)_{k \geq 1}$  sont indépendantes et suivent la même loi que  $X$ .

Nous avons montré à la question C.4 que alors  $g_{Y_2} = g_{Y_1} \circ f = f \circ f$ .

4. (a) Soit  $\mathcal{P}_n$  la proposition : " $g_{Y_n} = f^n$ " (composée  $n$ -ème de  $f$ ).

- $\mathcal{P}_1$  est vraie.

- Supposons que  $\mathcal{P}_n$  soit vraie.

Si  $Y_n = 0$ , alors  $Y_{n+1} = 0$

Sinon : à la génération  $n$  il y a  $Y_n$  bactéries qu'on peut numéroté de 1 à  $Y_n$ .

Appelons  $X_k$  le nombre de fils du fils numéro  $k$ .

Notons, comme dans le C.  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

Le nombre de fils de la  $(n + 1)$ -ème génération est  $Y_{n+1} = S_{Y_n}$

Par hypothèse les variables aléatoires  $(X_k)_{k \geq 1}$  sont indépendantes et suivent la même loi que  $X$ .

Nous avons montré à la question C.4 que alors  $g_{Y_{n+1}} = g_{Y_n} \circ f$

En utilisant l'hypothèse de récurrence,  $g_{Y_{n+1}} = f^n \circ f = f^{n+1}$ .

- Par récurrence,  $g_{Y_{n+1}} = f^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Donc  $x_n = g_{Y_n}(0) = f^n(0) = f(f^{n-1}(0)) = f(x_{n-1})$ .

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad x_n = f(x_{n-1})}$$

- (b) Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $(x_n)$  tend vers  $p$ .  
 $(x_{n-1})$  tend aussi vers  $p$ . La fonction  $f$  étant continue en  $p$ ,  $(f(x_{n-1}))$  tend vers  $f(p)$ .  
 Or  $x_n = f(x_{n-1})$ , donc par unicité de la limite  $p = f(p)$ .

$$\boxed{p = f(p)}$$

5. Soit  $\lambda \leq 1$ .

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi(t) = f(t) - t = e^{\lambda(t-1)} - t, \quad \varphi'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} - 1.$$

$\forall t \in [0, 1], t - 1 < 0$  donc  $e^{\lambda(t-1)} < 1$ , donc  $\lambda e^{\lambda(t-1)} < 1$  et  $\varphi' < 0$  sur  $[0, 1]$ .

$t$	0	1
$\varphi'(t)$	-	
$\varphi$	$e^{-\lambda}$	0

$\varphi$  est strictement décroissante de  $[0, 1]$  sur  $[0, e^{-\lambda}]$ .

Le seul zéro de  $\varphi$  est 1. Or les zéros de  $\varphi$  sont les points fixes de  $f$ , donc nécessairement  $p = 1$ .

La probabilité que la bactérie disparaisse est 1

6. Soit  $\lambda > 1$ .

(a)  $\forall t \in ]1, +\infty[, \theta'(t) = \frac{\ln u - 1}{u^2}$ .

$u$	1	$e$	$+\infty$
$\theta'(t)$	-	0	+
$\theta$	1	$1 - e^{-1}$	1

D'après le tableau de variations :  $\forall u > 1, \theta(u) > 0$ , donc  $\frac{\ln u}{u} < 1$  et donc que  $\ln u < u$ .

$$\boxed{\forall u > 1, \ln u < u}$$

- (b)  $\forall t \in [0, 1], \varphi(t) = f(t) - t = e^{\lambda(t-1)} - t, \varphi'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} - 1$  et  $\varphi''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)} > 0$ .  
 $\varphi'$  est continue, strictement croissante sur  $[0, 1]$  dans  $J = [\lambda e^{-\lambda} - 1, \lambda - 1]$  donc réalise une bijection entre ces deux intervalles.

