Devoir libre $n°1$
à rendre le 28/09/2016

Exercice 1

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Alors les racines du polynôme dérivé P' sont situées dans l'enveloppe convexe des racines de P. Cela signifie que les racines de P' sont à l'intérieur du polygone délimité par les racines de P. On peut encore traduire cette propriété mathématiquement en disant que les racines de P' peuvent s'écrire comme barycentres des racines de P : si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont les racines de P, alors toute racine μ de P' peut s'écrire $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$ où pour tout i, $\lambda_i \in [0,1]$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

1. Vérifier le théorème sur les polynômes suivants : $X^4 + 3X^2 - 4$, $X^3 - X^2 + X - 1$, $aX^2 + bX + c$ (avec a, b, c dans $\mathbb{C}$), $X^k - 1$ (avec $k \geq 2$).

   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 2. On considère sa décomposition $P = a \prod_{'i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{n_i}$ où $a \in \mathbb{C}$ et les α_i sont les racines de P et les n_i leurs multiplicités.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) \neq 0$. Montrer que
$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{z - \alpha_i}.$$
3. Montrer que si z est de plus une racine de P', alors
$$\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{|z - \alpha_i|^2} \right) z = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{|z - \alpha_i|^2} \alpha_i$$
4. En déduire que z est un barycentre des α_i. Conclure.

Exercice 2

Soit p un nombre premier impair. Notons C l'ensemble des carrés du groupe $\left((\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^*, \times \right)$:
$$C = \left\{ y \in (\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^* \,|\, \exists x \in (\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^* \; y = x^2 \right\}.$$

1. Déterminer C pour $p = 3, 5, 7, 11$.
2. Montrer que C est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^*$.
3. Soit
$$f : \begin{array}{ll} (\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^* & \longrightarrow C \\ x & \longmapsto x^2 \end{array}$$
   Montrer que f est un morphisme de groupes.
4. Montrer que $f(x) = f(y)$ si et seulement si $y = x$ ou $y = -x$.
5. En déduire qu'il y a exactement $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^*$.

Exercice 3

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que si P admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers premiers entre eux, alors p/a_0 et q/a_n.
2. Les polynômes suivants ont-ils des racines dans $\mathbb{Q}$?
$$X^5 - X^2 + 1, \;\; 2X^4 - X^3 + X^2 - X + 2, \;\; X^3 - 6X^2 - 4X - 21.$$

• • • • • • • • • • •