Devoir libre $n$°02
à rendre le 22/10/2016

# Exercice 01

Soit $A$ et $B$ deux parties non vides d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

1. Montrer que $C = \{x \in E / d(x, A) = d(x, B)\}$ est fermé et $D = \{x \in E / d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
   ( On rappelle que $d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$ )
2. Si $A$ et $B$ sont fermées et disjointes, il existe deux ouverts $U$ et $V$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

# Exercice 02

Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $E$, on pose :

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

1. Démontrer que l'application de $E$ dans $\mathbb{R}$ : $P \mapsto \|P\|$ est une norme sur $E$.
   Dans la suite, on désigne par $d$ la distance sur $E$ associée à cette norme :
   $$\forall P, Q \in E, \ \ d(P, Q) = \|P - Q\|.$$
2. Montrer que $F = \{P \in E / \|P\| \leq 1\}$ est une partie fermé de $E$.
3. On considère, dans $E$, la suite de terme général $P_n = X^n$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \in F$, puis calculer $d(P_i, P_j)$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et $i \neq j$.
   (b) Démontrer que toute suite extraite de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente dans $E$. En déduire que $F$ n'est pas une partie compacte de $E$.

# Exercice 03

1. Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Montrer que l'application $u$ est de rang $r$ si, et seulement si, il existe des formes linaires sur $E$, $l_1, l_2, ..., l_r$ linéairement indépendantes et des vecteurs de $F$, $a_1, a_2, ..., a_r$ linéairement indépendants tels que
   $$\forall x \in E, \ \ u(x) = \sum_{i=1}^{r} l_i(x) a_i$$
2. Soit $(E, \|.\|)$ un sous-espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace fermé de $(E, \|.\|)$. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel $G$ de dimension finie de $E$, le sous-espace vectoriel $H = F + G$ est fermé dans $(E, \|.\|)$.
   ( on peut procéder par récurrence sur la dimension $p \geq 1$ de $G$ )
3. Soit $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|')$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$ de rang fini. Montrer que l'application linéaire $u$ est continue si, et seulement si, $\ker u$ est un fermé dans $(E, \|.\|)$.
4. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel de dimension finie et $(F, \|.\|')$ un espace vectoriel normé. Montrer que toute application linéaire de $E$ dans $F$ est continue.

●●●●●●●●●●