Devoir libre $n°04$
à rendre le 14/11/2016

Problème : Une caractérisation des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

E et F sont des espaces vectoriels normés de dimension finie et D un voisinage de a dans E. On considère une application $f : D \to F$. On munit $E \times E$ de la norme produit max : $\|(x,y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$.
On dit que u :

- est différentielle stricte de f en a lorsque $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{f(y)-f(x)-u(y-x)}{\|y-x\|} = 0,$$

- différentielle de Gâteaux de f en a lorsque $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = u(v).$$

-I-

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_2 : (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^6}{x^8 + (y-x^2)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$f_3 : (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x(x^2-3y^2)}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la dérivabilité de f_1 et la continuité de la fonction dérivée de f_1.

2. Calculer $f_2(x,x^2)$ puis étudier, seulement en $(0,0)$, la continuité de f_2 et la différentiabilité de Gâteaux de f_2.

3. Étudier, seulement en $(0,0)$, la dérivabilité de f_3 suivant toute vecteur et la différentiabilité de Gâteaux de f_3.

-II-

1. On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que, s'il existe $\beta > 0$ tel que $\|u(h)\| \leq \varepsilon\|h\|$ pour tout $h \in B(0,\beta)$, alors $\|u\| \leq \varepsilon$.

2. On suppose f différentiable.

(a) i. Vérifier que $k : D \ni z \mapsto f(z) - df_a(z) \in F$ est différentiable, et que, étant donné $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, si $\|dk_z\| \leq \varepsilon$ pour tout $z \in B(a,\eta)$, alors $\|f(y)-f(x)-df_a(y-x)\| \leq \varepsilon\|y-x\|$ pour tout $(x,y) \in B(a,\eta)^2$.

ii. On suppose de plus f strictement différentiable en a, on considère $\varepsilon > 0$, et on pose :

$$g : (x,h) \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)-df_a(h)}{\|h\|}$$

et

$$t_x : h \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)-df_x(h)}{\|h\|} \text{ pour tout } x \in D.$$

A. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, si $\|x-a\| < \delta$ et $0 < \|h\| < \delta$, alors $\|g(x,h)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Montrer que pour tout $x \in D$, il existe $\alpha_x > 0$ tel que, si $0 < \|h\| < \alpha_x$, alors $\|t_x(h)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

B. Déduire de A. qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant :
pour tout $x \in B(a,\delta)$, il existe $\beta_x > 0$ tel que, si $\|h\| < \beta_x$, alors $\|df_x(h) - df_a(h)\| \leq \varepsilon\|h\|$.

(b) Déduire de de 1. et (a) que la continuité de df en a équivaut à la stricte différentiabilité de f en a.

-III-

1. Étant donné une application linéaire $u : E \to F$, on considère les quatre propriétés :
i- u est différentielle stricte de f en a,
ii- u est différentielle de f en a,
iii- u est différentielle de Gâteaux de f en a,
iv- pour tout $v \in E$, $u(v)$ est dérivée de f en a suivant v.

(a) Vérifier que i$\Longrightarrow$ii$\Longrightarrow$iii$\Longrightarrow$iv.

(b) Déduire de -I- et -II- l'étude des trois réciproques.

2. Déduire de 1) et -II- que f est strictement différentiable si, et seulement si, f est $\mathscr{C}^1$.

•••••••••••