Devoir libre $n°05$
à rendre le 30/11/2016

Une démonstration du théorème du Jordan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u un endomorphisme de E. Un sous-espace vectoriel F de E est dit cyclique, s'il existe $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et un entier naturel non nul m tels que $F = \text{Vect}\{x, (u - \lambda Id_E)(x), ..., (u - \lambda Id_E)^{m-1}(x)\}$ avec $(u - \lambda Id_E)^{m-1}(x) \neq 0$ et $(u - \lambda Id_E)^m(x) = 0$.

1. Montrer que, pour un tel sous-espace F, on a $u(F) \subset F$ et $\dim F = m$.

le but de ce qui suit est de donner une démonstration du théorème de réduction de Jordan, qui s'énonce ainsi :
Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\mathbb{C}$, et soit u un endomorphisme de E. Alors E est la somme directe d'une famille de sous-espaces cycliques.
Le théorème de Jordan nous informe que u admet une représentation matricielle diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où les scalaires $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ sont les valeurs propres de l'endomorphisme considéré et les blocs $(J_{k_i}(\lambda_i))_{1\leq i\leq r}$ sont de la forme :

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{C}).$$

2. Démontrer le théorème si $\dim E = 1$.
3. On suppose d'abord que u n'est pas inversible.
   (a) Supposons le théorème vrai pour tout espace de dimension $n-1$ et soit E un espace de dimension n. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ tel que $u(E) \subset F$. Montrer que F est une somme directe de sous-espaces cycliques $F_j = \text{Vect}\{x_j, (u - \lambda_j Id_E)x_j, ..., (u - \lambda_j Id_E)^{m-1}x_j\}$, $1 \leq j \leq k$, tels que $\dim F_j \leq \dim F_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq k-1$.
   (b) Soit $S = \{1 \leq j \leq k, \lambda_j = 0\}$ et soit $y \notin F$. Montrer que
      i. si S est non vide, il existe des scalaires $(\alpha_j)_{j\in S}$ tels que $u(y) - \sum_{j\in S} \alpha_j x_j \in u(F)$.
      ii. si S est vide, $u(y) \in u(F)$.
   (c) Montrer que, si $z \in F$ est tel que $u(y) = u(z)$, alors $E = F \oplus \text{Vect}(y - z)$ et le théorème est démontré.
   (d) On suppose qu'il existe $z \in F$ tel que $u(y) = \sum_{j\in S} \alpha_j x_j + u(z)$ et $\sum_{j\in S} \alpha_j x_j \neq 0$.

      Soit p le plus grand des éléments j de S tels que $\alpha_j \neq 0$ et soit $a = \dfrac{1}{\alpha_p}(y - z)$ et $H = \bigoplus_{j\in S, j\leq p-1} F_j$.
      Montrer que $u(H) \subset H$, $u^{m_p}(H) = \{0\}$ et

$$H \oplus F_p = H \oplus \{a, u(a), u^2(a), ..., u^{m_p}(a)\}.$$

   (e) Déduire de **(d)** que $E = \bigoplus_{j\neq p} F_j \oplus \text{Vect}\{u(a), u^2(a), ..., u^{m_p}(a)\}$ et qu'on a le théorème pour $\dim E = n$.

4. Si maintenant u est un endomorphisme quelconque de E, montrer qu'on peut se ramener au cas précédent, c'est-à-dire u non inversible.
5. Décomposer l'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ (resp. $\mathbb{C}^5$)) en sous-espace cycliques de l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (resp. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$). en utilisant les éléments de la base canonique.

Fin de problème