Devoir libre $n°6$
à rendre le 16/12/2016

Résolution d'une équation matricielle

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On confond polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ ou sur $[0,+\infty[$ ou sur $]0,+\infty[$.
On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Partie I : Interpolation polynomiale

Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts, on note

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), ..., P(a_n)) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. En déduire que, pour tout $(b_1, b_2, ...b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ unique tel que
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad P(a_i) = b_i.$$
3. *Exemple :* Déterminer le polynôme P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que
$$P_0(0) = 1, \quad P_0(1) = 3, \quad P_0(2) = 11, \quad P_0(3) = 31.$$

Partie II : Polynômes spéciaux

On considère E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad P(x) > 0 \text{ et } P'(x) > 0.$$

1. Donner un exemple d'élément de E.
2. Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire pour tout $\alpha \in]0,+\infty[$ et tous $P, Q \in E$, on a :
$$\alpha P \in E, \quad P+Q \in E, \quad PQ \in E.$$
Est-ce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?
3. Soit $P \in E$. On note $P_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que $P_1 \in E$.
4. Soit $P \in E$. Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[$, $P(x) \geq P(0)$.
Pour tout $P \in E$, on note $\overline{P} : [0,+\infty[\to [P(0),+\infty[$, $x \mapsto \overline{P}(x) = P(x)$.
5. Montrer que l'application $\overline{P}$ est bijective.
6. Si de plus, P est au moins de degré 2, est-ce que l'application réciproque $\overline{P}^{-1}$ de $\overline{P}$ est une application polynomiale ?

Partie III : Matrices symétriques positives

On note $\mathscr{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tUAU \geq 0.$$

Soit M une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

2. (a) Montrer que si $A \in \mathscr{S}_n^+$, alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$.

(b) Réciproquement, montrer que si toutes les valeurs propres sont dans $[0, +\infty[$, alors A est dans $\mathscr{S}_n^+$.

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Soit $P \in E$ de degré $n-1$ (l'ensemble E a été défini dans la partie II), et soit $A \in \mathscr{S}_n^+$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, appartenant toutes à $[P(0), +\infty[$.
On note D la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont successivement $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ et Q une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.
On se propose de résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathscr{S}_n^+$.

1. On suppose que l'équation $P(S) = A$ a une solution dans $\mathscr{S}_n^+$.
Soit S appartenant à $\mathscr{S}_n^+$ telle que $P(S) = A$. On note $\Delta = Q^{-1}SQ$.

(a) Montrer que $SA = AS$ et en déduire que $AD = DA$.

(b) Montrer que Δ est diagonale et que les éléments diagonaux de Δ sont tous positifs ou nuls.

2. Etablir que l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathscr{S}_n^+$, admet une solution et une seule, et que celle-ci est $Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que l'on exprimera à l'aide de $\overline{P}^{-1}(\lambda_1), ..., \overline{P}^{-1}(\lambda_n)$ où $\overline{P}$ a été défini dans la partie II.

3. *Exemple :*

On prend ici $n = 4$, $P = X^3 + X + 1$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que $P \in E$.

(b) Déterminer les valeurs propres de A et montrer que $A \in \mathscr{S}_4^+$.

(c) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $A = QDQ^{-1}$.

(d) Résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathscr{S}_4^+$.

Fin de problème