Devoir libre $n°7$
à rendre le 02/01/2017

Problème

Partie I. Étude de la série harmonique

1. Soit f une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{f(n)}{n^2}$.

(a) Montrer que pour tout n entier naturel

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \geq \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

(c) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$?

2. On considère la suite de terme général $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$.
Montrer que cette suite est convergente. (on pourra montrer qu'elle est positive et décroissante).
Soit γ sa imite. (γ est appelée constante d'Euler [1]) .

3. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

(b) Justifier l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \geq 1$.

Montrer que cette somme est équivalente à $\dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à termes strictement positifs telles que :
• les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient équivalentes au voisinage de $+\infty$.
• la série de terme général a_n converge.
alors les sommes $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} b_k$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

(d) Déduire des questions précédentes que $\gamma - v_n$ est équivalente à $-\dfrac{1}{2n}$ au voisinage de $+\infty$.

(e) Quelle est l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsqu'on prend comme valeur approchée [2] de γ la valeur v_n, avec $n = 10^4$.

1. Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort à 76 ans le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne.
2. On ignore toujours si la constante d'Euler est ou non un nombre rationnel

4. Application : Soit x un réel strictement positif donné. On pose

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n},$$

et on considère la série de terme général $u_n = x^{s_n}$.

(a) Soit $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$. Montrer, en utilisant la deuxième question, que cette série est convergente.

(b) Quelle est la nature de cette série pour $x \geq \frac{1}{e}$?

Partie II. Étude de la série harmonique alternée

1. (a) On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Soit S_n la somme partielle de rang n de cette série. Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

(b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

2. Soit n un entier naturel. On définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k.$$

(a) Exprimer $f_n(t)$ en utilisant la somme d'une série géométrique.

(b) On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t$. En calculant $\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ de deux façons différentes, exprimer S_n en fonction de I_n

3. Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$. En déduire la valeur de a somme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Partie III. Étude de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$

1. Soit t un réel de l'intervalle $[0, \pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

Calculer $c_n(t)$ pour $0 < t \leq \pi$. (On pourra utiliser $s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$).

Préciser $c_n(0)$. Montrer que la fonction $t \mapsto c_n(t)$ est continue sur $[0, \pi]$.

2. On pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que

$$w_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) c_n(t) \mathrm{d}t,$$

puis que

$$w_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin \frac{t}{2}} \mathrm{d}t.$$

3. (a) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}$ est bornée sur $[0, \pi]$. En déduire une majoration de $\int_0^{\beta} f(t) \sin \frac{(2n+1)t}{2} \mathrm{d}t$ pour $\beta \in]0, \pi]$.

(b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\beta}^{\pi} f(t) \sin \frac{(2n+1)t}{2} \mathrm{d}t = 0.$$

En déduire la valeur de a somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Fin de problème