Devoir libre $n°8$
à rendre le 19/01/2017

Une démonstration du théorème de Weierstrass [1]

On dit qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ est à support dans un intervalle $[a,b]$ si f est nulle hors de $[a,b]$.

Partie I. Produit de convolution

Soit $a>0$ et φ une fonction à support contenu dans $[-a,a]$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note $f*\varphi$ la fonction définie par

$$(f*\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)f(x-t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $f*\varphi$ est définie pour tout x réel et que pour tout x, $(f*\varphi)(x)=(\varphi*f)(x)$.

2. Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on pose

$$g_n(x)=\begin{cases}(1-x^2)^n & \text{si } |x|\leq 1\\ 0 & \text{si } |x|>1.\end{cases}$$

(a) Montrer que g_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Quel est son support ? Quelle est la classe de g_n ?

(b) Montrer qu'il existe une suite de nombre réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on ne cherchera pas à calculer telle que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$h_n(x)=\frac{1}{a_n}g_n(x)$$

vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(t)\mathrm{d}t=1.$$

Partie II. Convergence uniforme

1. Soit $0<\delta<1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[\delta,1]}h_n(x)=0$. Quelle est $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[-1,-\delta]}h_n(x)$.

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support dans $I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$, tel que

$$\begin{cases}\forall(x,y)\in I^2\\ |x-y|\leq\delta\end{cases}\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon.$$

3. (a) Montrer que, pour tout x

$$f(x)-(h_n*f)(x)=\int_{-1}^{+1}(f(x)-f(x-t))h_n(t)\mathrm{d}t.$$

1. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, habituellement appelé Karl Weierstrass, orthographié Weierstraβ en allemand, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin, était un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895.

(b) En découpant cette dernière intégrale en somme de trois intégrales judicieusement choisies, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0, tel que si $n \geq n_0$, on a

$$|f(x) - (h_n * f)(x)| < \varepsilon.$$

4. Montrer que $|x| \leq \dfrac{1}{2}$, $(f * h_n)(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égale à $2n$.

5. Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Soit $c < a$ et $d > b$.

(a) Construire une fonction f_1 continue sur $\mathbb{R}$, nulle hors de $[c, d]$ telle que sa restriction à $[a, b]$ soit g et telle que ses restrictions à $[c, a]$ et $[b, d]$ soient affines.

(b) En utilisant un changement de variables affine, construire à partir de f_1 une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à support dans $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

(c) En déduire le théorème de Weierstrass : *Si g est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors*

$$\|P_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

En d'autres termes les fonctions polynomiales forment une partie dense dans $(\mathscr{C}([a, b], ||.||_\infty)$.

6. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1]$ par : $\forall x \in]0, 1], \quad x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0, 1]$ par une suite de fonctions polynômes.

Partie III. Applications

1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b t^n f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que la fonction f est identiquement nulle sur $[a, b]$. En déduire l'orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b P_n(t)\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| = 0$.

Fin de problème