

Devoir libre n°10  
à rendre le 10/02/2017

EXERCICE 1

Soit  $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x \cos t) dt$ .

1. Montrer que  $F$  est continue et dérivable sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .
2. Calculer  $F'$  sur l'intervalle  $] -1, 1[$  (On pourra effectuer le changement de variable  $u = \tan \frac{t}{2}$ ).
3. En déduire  $F$  sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .
4. Dédire de ce qui précède  $F(x)$  pour  $x \in ] -\infty, -1[ \cup ] 1, +\infty[$ .

EXERCICE 2

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction

$$f(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{|1 - x \cos t|} dt.$$

1. Vérifier que  $f$  est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et que  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est une fonction paire de  $x$ .
3. Montrer que  $f$  est deux fois dérivable pour  $|x| < 1$  et qu'elle vérifie la relation :

$$4x(x^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, x) + 4(x^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) - x\varphi(t, x) = R(t, x),$$

où l'on a posé :

$$\varphi(t, x) = \sqrt{|1 - x \cos t|} \text{ et } R(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{2 \sin t}{\sqrt{1 - x \cos t}} \right).$$

4. En déduire que  $f$  vérifie l'équation différentielle :

$$4x(x^2 - 1)f''(x) + 4(x^2 - 1)f'(x) - xf(x) = 0.$$

EXERCICE 3

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction :

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt.$$

1. Vérifier que  $f$  est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et que  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$f'(x) = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t e^{-x \sin t} dt.$$

3. De même, montrer que  $f$  est deux fois dérivable et qu'elle vérifie la relation :

$$xf''(x) + f'(x) - xf(x) = 0.$$

(On pourra faire une intégration par parties dans l'intégrale définissant  $f'$ )

4. Résoudre les mêmes questions avec la fonction :

$$g(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \cos t} dt.$$

• • • • •