Devoir libre $n°11$
à rendre le 27/02/2017

Si $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, sa transformée de Laplace est la fonction $\mathscr{L}(f)$, définie sur $I(f)$ par :

$$\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

$I(f)$ désignant l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale généralisée converge absolument. On note E l'ensemble des fonctions complexes de la variable réelle continues par morceaux sur $[0,+\infty[$ telles que $I(f)$ ne soit pas vide.

1-Étude de $I(f)$ sur quelques exemples simples

Dans le cas où $I(f)$ est non vide, on désigne par $\sigma(f)$ sa borne inférieure si cet ensemble est minoré dans $\mathbb{R}$, on convient de poser $\sigma(f) = -\infty$ si cet ensemble n'est pas minoré.

1. Dans le cas de fonctions qui suivent, montrer que la fonction f est un élément de E, et déterminer $I(f)$ et $\sigma(f)$.

(a) Les fonctions f_1 définies sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = e^{at}$ où $a \in \mathbb{R}$.

(b) Les fonctions f_2 définies sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = e^{ct}$, $c = a + ib$ étant un nombre complexe quelconque, a et b des réels.

(c) Les fonctions f_3 définies sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = t^a$ où $a \in]0,+\infty[$.

(d) La fonction f_4 définie par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

2. D'autres exemples.

(a) Trouver une fonction f telle que $I(f)$ contient $\sigma(f)$.

(b) Trouver une fonction f telle que $I(f)$ soit vide.

(c) Trouver une fonction f telle que $I(f) = \mathbb{R}$.

2-Étude de $I(f)$ dans le cas général

On suppose que $I(f)$ est non vide.

1. Montrer que si $x_0 \in I(f)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq x_0 \Longrightarrow x \in I(f)$

2. Donner la conclusion sur la nature de $I(f)$.

Dans tout ce qui suit, la transformée de Laplace d'une fonction f de E est la fonction F définie sur l'intervalle $]\sigma(f),+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

3-Propriétés de la transformée de Laplace

1. TRANSFORMÉE D'UNE DÉRIVÉE : Dans cette question f est un élément de E, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et on suppose qu'il existe un élément de g de E qui coïncide sur $]0,+\infty[$ avec f'.

(a) Montrer que, pour tout $A > 0$ et tout x réel, on a :

$$\int_0^A f'(t)e^{-xt}dt = [f(A)e^{-xA} - f(0^+)] + x\int_0^A f(t)e^{-xt}dt$$

où $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(b) En déduire que si $x > \max(\sigma(f), \sigma(g))$, et si F et G désignent les transformées de Laplace de f et de g, alors $G(x) = xF(x) - f(0^+)$.

(c) On suppose de plus que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$ existe. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} xF(x) = l$

(d) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ continue, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente. Montrer alors que , $\forall x \geq 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge et la fonction $x \longmapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ est continue sur $[0, +\infty[$

(e) Utiliser la question précédente pour calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.

2. DÉRIVABILITÉ D'UNE TRANSFORMÉE DE LAPLACE : Pour $f \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall x > \sigma(f),\ \ U_n(x) = \int_n^{n+1} f(t)e^{-xt}dt$$

de sorte que

$$\mathscr{L}(f)(x) = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x).$$

(a) Montrer que U_n est dérivable et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale.

(b) Soient a et b fixés vérifiant : $\sigma(f) < b < a$. Montrer qu'il existe une constante K indépendante de x tel que pour tout $x \geq a$, et tout $t \geq 0$,

$$|tf(f)e^{-xt}| \leq K|f(t)|e^{-bt}.$$

(c) En déduire la convergence normale de la série des dérivées sur $[a, +\infty[$ puis la dérivabilité de F sur $]\sigma(f), +\infty[$ avec la formule

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-xt}$$

exprimant que F' est la transformée de $t \longmapsto -tf(t)$.

3. LIMITE À L'INFINI D'UNE TRANSFORMÉE DE LAPLACE : Soit f un élément de E de transformée F. On se donne A un réel strictement positif.

(a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)e^{-xt}dt = 0$

(b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = 0$. Pour cela, on pourra faire une majoration de l'intégrale en utilisant un nombre a fixé dans $]\sigma(f), +\infty[$.

(c) Donner la conclusion concernant la limite de $F(x)$ en $+\infty$.

4. INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE : Soit $f \in E$ une application continue telle que pour tout $x \in I(f)$, $\mathscr{L}(f)(x) = 0$.

(a) Soient $x \in I(f)$, $a > 0$ et $g : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad g(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u)du.$$

i. Montrer que $\mathscr{L}(f)(x+a) = a \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} g(t)dt$.

ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) u^n du = 0$.

iii. Démontrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $g(t) = 0$. (Utiliser le théorème de Weirstrass : *pour toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, il existe une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.*)

(b) En déduire $f = 0$.

4-Résolution d'une équation différentielle du second ordre

Si une application $y : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ est solution d'une équation différentielle, la transformée $\mathscr{L}(y)$ est solution d'une équation "algébrique". On peut souvent en déduire $\mathscr{L}(y)$, puis revenir à y en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace.

1. Résoudre les équations différentielles avec conditions initiales :

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}, \\ y(0) = -3, \quad y'(0) = 5. \end{cases}$$

2. Résoudre le système différentiel avec conditions initiales :

$$\begin{cases} x' + 2y'' = e^{-t}, \\ x' + 2x - y = 1, \\ x(0) = y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

3. (a) Soit $f \in E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ telle que f' et f'' soient dans E. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} (tf''(t))e^{-xt}dt = 1 - x^2F'(x) - 2xF(x).$$

(b) En déduire la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} ty'' + 2y' + ty = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Fin de l'épreuve