Devoir libre $n°12$
à rendre le 17/03/2017

Nombre chromatique d'un graphe [1]

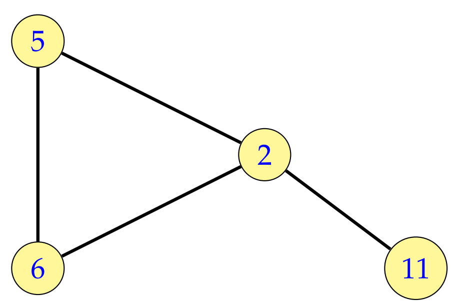
Dans tout le problème, on appellera *graphe* tout couple (S, A) où S est un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{N}$ et A un ensemble de paires d'éléments de S.
Étant donné un graphe $G = (S, A)$, les éléments de S seront appelés les *sommets* du graphe G, et les éléments de A les *arêtes* du graphe G.
Pour tout graphe G, l'ensemble des sommets de G sera noté S_G, ou simplement S s'il n'y a pas d'ambiguïté ; de même, l'ensemble des arêtes de G sera noté A_G, ou simplement A s'il n'y a pas d'ambiguïté.
On notera n_G, ou simplement n s'il n'y a pas d'ambiguïté, le nombre de sommets du graphe.
Dans tout le problème, on considère, à titre d'exemples, les quatre graphes particuliers définis de la façon suivante : pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $G_k = (S_k, A_k)$ où :

- $S_k = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$,
- $A_2 = \{\{4, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$,
- $A_3 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$,
- $A_4 = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}\}$.

1. Une *représentation* d'un graphe G consiste à associer à chaque sommet de G un point du plan et à tracer le segment défini par deux de ces points si et seulement si les sommets auxquels sont associés ces points forment une arête de G. Les points représentant les sommets du graphe doivent être choisis de telle sorte que les segments représentant deux arêtes distinctes quelconques ne puissent se rencontrer en plus d'un point.
Par exemple, le graphe $G = (S, A)$ où

$$S = \{2, 5, 6, 11\} \text{ et } A = \{\{2, 5\}, \{6, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 11\}\}$$

peut être représenté par la figure :



Représenter les graphes G_k $(k \in \{1, 2, 3, 4\})$.
Dans la mesure du possible, on évitera les représentations dans lesquelles deux segments se coupent en un point ne représentant pas un sommet du graphe.

2. On dira que deux graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall (x, y) \in S^2, \;\; \{x, y\} \in A \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in A'$$

(Une telle bijection est appelée un *isomorphisme* de G sur G').

(a) Prouver que les graphes G_1 et G_3 sont isomorphes.

1. Extrait de CCP 1999, filière PSI, mathématique 2

(b) Pour tout graphe $G=(S,A)$ et tout sommet $s\in S$ de ce graphe, on note $\alpha_G(s)$ (ou simplement $\alpha(s)$ s'il n'y pas d'ambiguïté) le nombre d'arêtes du graphe auxquelles s appartient, et on note $V_G(S)$ (ou simplement $V(s)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble

$$V(s)=\{t\in S,\ \ \{s,t\}\in A\}.$$

i. Vérifier que, pour tout graphe $G=(S,A)$ et tout sommet $s\in S$ de ce graphe, on a :

$$\alpha(s)=\operatorname{card}(V(s)).$$

ii. Montrer que si $G=(S,A)$ et $G'=(S',A')$ sont deux graphes isomorphes, la propriété suivante est nécessairement vérifiée :

$$\forall s\in S,\ \ \alpha_{G'}(\varphi(s))=\alpha_G(s),$$

où φ désigne un isomorphisme entre G et G'.

(c) Les graphes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?

Dans la suite du problème, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et tout graphe G,

- on appelle "p - coloriage" de G toute application $\psi : S\to [\![1,p]\!]$,

- on appelle "bon p - coloriage" de G tout p - coloriage ψ de G tel que :

$$\forall (s,t)\in S^2,\ \ \{s,t\}\in A\Rightarrow \psi(s)\neq\psi(t),$$

- on note $B(p,G)$ l'ensemble des bons p - coloriages de G.

De plus, pour tout graphe G, on note f_G l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \ f_G(p)=\operatorname{card}(B(p,G))$$

et on note $E(G)$ l'ensemble défini par

$$E(G)=\{p\in\mathbb{N}^*,\ \ f_G(p)\neq 0\}.$$

3. Soit G un graphe.

(a) Montrer que $n_G\in E(G)$.

(b) Prouver que $\forall p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow p+1\in E(G)$.

(c) En déduire l'existence d'un unique entier $\theta_G\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$E(G)=\{p\in\mathbb{N}^*, p\geq\theta_G\}.$$

Le but des questions suivantes est d'étudier le principe d'une méthode visant à déterminer la fonction f_G et le nombre θ_G (appelé *nombre chromatique* de G) pour n'importe quel graphe G.

4. Soit G un graphe.

(a) On suppose $A_G=\emptyset$. Donner une expression explicite de $f_G(p)$ en fonction de p.

(b) On suppose $A_G\neq\emptyset$. On note $R(G)$ le sous-ensemble de S_G défini par :

$$R(G)=\bigcup_{a\in A_G} a.$$

On définit deux sommets particuliers de G, notés respectivement $\sigma(G)$ et $\tau(G)$, en posant :

$$\sigma(G)=\min R(G),$$

$$\tau(G)=\min\{t\in S_G,\ \ \{\sigma(G),t\}\in A_G\}.$$

i. Déterminer $\sigma(G_4)$ et $\tau(G_4)$.
On note κ_G l'application de S_G dans S_G définie par

$$\begin{cases} \kappa_G(s) = s \text{ si } s \neq \sigma(G) \\ \kappa_G(\sigma(G)) = \tau(G) \end{cases}$$

et on définit deux nouveaux graphes à partir de G, notés rspectivement $\lambda(G)$ et $\mu(G)$, en posant

$$S_{\lambda(G)} = S_G, \;\; A_{\lambda(G)} = A_G \setminus \{\{\sigma(G), \tau(G)\}\},$$

$$S_{\mu(G)} = S_G \setminus \{\sigma(G)\}, \;\; A_{\mu(G)} = \{\{\kappa_G(s), \kappa_G(t), \;\; \{s, t\} \in A_{\lambda(G)}\}.$$

ii. Déterminer les graphes $\lambda(G_4)$ et $\mu(G_4)$.

iii. Prouver les inégalités strictes

$$\begin{cases} \text{card}(A_{\lambda(G)}) < \text{card}(A_G) \\ \text{card}(A_{\mu(G)}) < \text{card}(A_G) \end{cases}$$

iv. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

A. Vérifier que $B(p, G) \cap B(p, \mu(G)) = \emptyset$.

B. Vérifier que $B(p, G) \subset B(p, \lambda(G))$.

C. Pour tout $\psi \in B(p, \mu(G))$, on note $\tilde{\psi}$ le p - coloriage de $\lambda(G)$ défini par

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(\sigma(G)) = \psi(\tau(G)), \\ \tilde{\psi}(s) = \psi(s) \text{ si } s \neq \sigma(G). \end{cases}$$

Vérifier que $\tilde{\psi} \in B(p, \lambda(G))$.

D. Établir une relation entre $\text{card}(B(p, G))$, $\text{card}(B(p, \mu(G)))$ et $\text{card}(B(p, \lambda(G)))$. Dans ce but, on pourra considérer l'application suivante :

$$\Gamma : \begin{array}{ll} B(p, G) \cup B(p, \mu(G)) & \longrightarrow B(p, \lambda(G)) \\ \psi & \longmapsto \Gamma(\psi) = \begin{cases} \psi & \text{si } \psi \in B(p, G), \\ \tilde{\psi} & \text{si } \psi \in B(p, \mu(G)). \end{cases} \end{array}$$

(c) Exprimer la fonction f_G à l'aide des fonctions $f_{\lambda(G)}$ et $f_{\mu(G)}$.

5. Prouver que, pour tout graphe G, f_G est une fonction polynômiale, à coefficients entiers, de degré n_G (on pourra faire une récurrence sur le nombre d'arêtes).

6. Que peut-on dire des fonctions f_G et $f_{G'}$ si G et G' sont des graphes isomorphes ?

7. Soit $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \;\; \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\})$.

(a) Déterminer f_G (on n'indiquera pas le détail des calculs, mais uniquement le résultat, que l'on donnera sous forme factorisée).

(b) Déterminer le nombre chromatique θ_G de G.

Fin de l'épreuve