Devoir libre $n°13$
à rendre le 13/03/2017

On considère le jeu électronique suivant :

Un point lumineux L se déplace par sauts successifs sur un axe d'origine O, et peut à chaque instant se situer en l'un des cinq points P_j d'abscisses j égales à : $-2, -1, 0, 1, 2$.

Lorsque le point L est en P_j, $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ à l'instant t, la probabilité pour qu'il se positionne en P_k, $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ à l'instant $t+1$ est fournie par le tableau ci-dessous :

instant t \ instant $t+1$	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2
P_{-2}	0	1	0	0	0
P_{-1}	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
P_0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
P_1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
P_2	0	0	0	0	1

Par exemple, si L est en P_0 à l'instant t, il se positionne en P_{-1} avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et P_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
On suppose qu' à l'instant initial $t = 0$, le point lumineux L est en P_0.

1. Déterminer les probabilités de chacun des trois événements suivants :
   (a) De l'instant $t = 0$ à l'instant $t = n$ inclus, le point lumineux ne s'est positionné ni en P_{-2}, ni enp_2
   (b) De l'instant $t = 0$ à l'instant $t = n$, $n > 0$, le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et il se positionnera en P_2 pour la première fois à l'instant $t = n$.
   (c) Le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et se positionnera en P_2 pour la première fois.

2. On désigne par X_n la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur l'abscisse du point lumineux à l'instant $t = n$
   (a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires réelles X_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
   Calculer l'espérance mathématique et la variance des variables aléatoires réelles X_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
   (b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_3, X_4).

3. (a) Déterminer la loi de probabilité de X_{n+1} en fonction de la loi de probabilité de X_n.
   (b) On désigne par a_n la probabilité de l'événement "$X_n = 0$". Établir une relation de récurrence de la forme :
$$\alpha a_{n+2} + \beta a_n + \gamma a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2.$$
   (c) Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant la relation de récurrence :
$$\alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma u_{n-1} = 0, n \geq 1.$$
   (d) En déduire a_n. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●