Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2016/2017
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n°1

01/10/2016

durée : 3 heures

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les can didats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

Exercice 1

On considère les applications suivantes, de $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ dans lui-même.

$$id : x \longmapsto x, \quad f_1 : x \longmapsto 1-x, \quad f_2 : x \longmapsto \frac{1}{x},$$
$$f_3 : x \longmapsto \frac{x}{x-1}, \quad f_4 : x \longmapsto \frac{1}{1-x}, \quad f_5 : x \longmapsto \frac{x-1}{x}$$

On munit l'ensemble $E = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ de la loi $(\circ)$ de composition des applications.

1. **a)** Écrire la table de composition de $(E, \circ)$.
   b) Montrer que $G = (E, \circ)$ est un groupe.
   c) Est-ce que G est un groupe abélien ?
2. Montrer qu'il existe un isomorphisme de E dans le groupe symétrique $\mathscr{S}_3$ de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 2

Montrer que tout anneau fini et intègre est un corps.

Exercice 3

Soit S un ensemble quelconque. $E = \{0,1\}^S$ désigne l'ensemble des applications de S dans $\{0,1\}$ et $F = \mathscr{P}(S)$ désigne l'ensemble des parties de S.

1. On munit E de la loi $\oplus$ définie par : pour tout $f, g \in E$, $f \oplus g$ est l'application de S dans $\{0,1\}$ définie par :

$$(f \oplus g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ f(x) = g(x) \\ 1 & \text{si } \ f(x) \neq g(x) \end{cases}$$

Montrer que $(E, \oplus)$ est un groupe abélien, dans lequel chaque élément est son propre symétrique.

2. On munit F de la différence symétrique $\triangle$ définie par :

$$\forall A, B \in F, \quad A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

On considère l'application φ, de F dans E qui à une partie A de S associe sa fonction indicatrice χ_A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in A \\ 0 & \text{si } \ x \notin A \end{cases}$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(F, \triangle)$ vers $(E, \oplus)$.

b) En déduire que $(F, \triangle)$ est un groupe abélien, dans lequel chaque élément est son propre symétrique.

Exercice 4

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble de réels suivant :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} / m, n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$ (ensemble muni de l'addition et de la multiplication des réels), est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, .)$.
On considère l'application φ, de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même, qui à $m + n\sqrt{2}$ associe :

$$\varphi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}.$$

2. Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$ (c'est-à-dire une bijection, et un morphisme pour chacune des deux lois).

3. Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que N est une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.

4. Démontrer que x est un élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

5. Vérifier que $3 + 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Problème

Dans tout le problème, on considère les deux matrices réelles $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}$ où b est un réel non nul.

1. **a)** Démontrer que l'ensemble C des matrices réelles d'ordre 2 qui commutent avec F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
(On rappelle que $C = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / MF = FM\}$.)

b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque réelle d'ordre 2, déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur x, y, z, et t pour que M appartienne à C.

c) Lorsque M est élément de C, montrer qu'il existe deux réels u et v tels que

$$M = uI + vF.$$

d) En déduire que (I, F) est une base de C.

2. **a)** Prouver l'existence de deux réels α_2 et β_2 tels que $F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$. Pour cela, on calculera α_2 et β_2 en fonction de a, b et c.

b) Plus généralement, pour tout entier naturel n, prouver l'existence de deux réels α_n et β_n tels que :

$$F^n = \alpha_n F + \beta_n I.$$

c) Déterminer une relation de récurrence entre α_{n+2}, α_{n+1} et α_n.

d) Déterminer α_n lorsque : $a = 3$, $b = -2$ et $c = -2$.

e) Déterminer α_n lorsque : $a = 3$, $b = 1$ et $c = 1$.

3. **a)** Prouver que C est stable par le produit matriciel.

b) Caractériser les matrices inversibles éléments de C.

c) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et c les éléments non nuls de C sont tous des matrices inversibles.

d) Dans le cas où $a = 3$, $b = -2$ et $c = -2$, y a t-il dans C des matrices non inversibles ? Si oui, lesquelles ?

4. On considère l'endomorphisme Φ de C défini par $\Phi(M) = FM$.

a) Justifier que Φ est un automorphisme de l'espace vectoriel C si et seulement si F est inversible.

b) Déterminer la matrice G de Φ relativement à la base (I, F) de C.

FIN DE L'ÉPREUVE