Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2016/2017
Filière **MP**

Devoir surveillé
commun $n°2$

05/11/2016

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

Problème 1

Le but de ce problème est l'étude d'une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles.

Première partie

On se fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et l'on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On considère la forme linéaire L définie sur E par

$$\forall\, P \in E, L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer l'image par L de la fonction polynomiale P telle que $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$.

Déterminer la dimension du noyau de L, puis une base de ce noyau.

2. On considère des nombres réels $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que

$$-1\leq x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n \leq 1.$$

a) Montrer que pour tout i, $0\leq i\leq n$, il existe une fonction polynomiale $P_i \in E$ telle que

$$\begin{array}{lll} & P_i(x_i) = 1 & \\ \text{et} & P_i(x_j) = 0 & \text{pour } j\neq i,\ 0\leq j\leq n. \end{array}$$

Indication : *Considérer l'application linéaire :*

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & E & \longmapsto & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n)) \end{array}$$

et chercher les antécédents par l'application Φ de $(e_0, e_1, ..., e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Montrer qu'il existe une unique famille de nombres réels$(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que

$$\forall\, P \in E, L(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

3. On suppose que pour tout i, $0\leq i\leq n$, $x_{n-i} = -x_i$. Montrer que $\lambda_{n-i} = \lambda_i$. En déduire que, si n est pair, toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n+1$ vérifie

$$\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

4. Soit f une fonction réelle de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[-1, 1]$.

a) On pose $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$, où $f^{(n+1)}$ désigne la dérivée $(n+1)$-ième de f. Déterminer des réels positifs α et β tels que

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| \leq M_{n+1}(\alpha + \beta \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|)$$

où les $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ sont les nombres réels déterminés dans la question **2.**.

b) On suppose que f est de classe C^{n+2} sur $[-1, 1]$, que n est pair et que les points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ sont choisis tels que $x_{n-i} = -x_i$, $0\leq i\leq n$.
Modifier la majoration précédente en utilisant $M_{n+2} = \sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|f^{(n+2)}(x)\right|$.

5. On suppose que $n = 4$ et l'on choisit

$$x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1.$$

a) Calculer λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4.

b) En utilisant le résultat de la question **4.b)**, donner une majoration de

$$\left|\int_{-1}^{1} e^{(\frac{x}{4})^2}\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{4} \lambda_i e^{(\frac{x_i}{4})^2}\right|,$$

où les $(\lambda_i)_{0\leq i\leq 4}$ sont les nombres réels trouvés en **a)**.

Deuxième partie

Les notations sont celles de la première partie.

6. Soit N une norme sur E. On pose

$$\mathcal{N}(L) = \sup_{P\in E, N(P)\leq 1} |L(P)|.$$

a) Justifier l'existence de $\mathcal{N}(L)$ et montrer qu'il existe $Q \in E$ tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = \mathcal{N}(L)$.

b) Montrer que si K est un nombre réel positif tel que

$$\forall\, P \in E, |L(P)| \leq K N(P),$$

alors $\mathcal{N}(L) \leq K$. Montrer que si, de plus, il existe $Q \in E$ tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = K$, alors $\mathcal{N}(L) = K$.

7. Pour $P \in E$ tel que $P(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p x^p$, on pose

$$\|P\|_\infty = \sup_{0 \leq p \leq n} |a_p| \text{ et } \|P\|_2 = \left(\sum_{p=0}^{n} (a_p)^2 \right)^{1/2}.$$

Comparer les normes N_∞ et N_2.

8. On désigne par $\mathcal{N}_\infty(L)$ et $\mathcal{N}_2(L)$ les nombres $\mathcal{N}(L)$ définis à la question **6.**, quand on choisit pour N respectivement N_∞ et N_2.

a) Trouver $Q_\infty \in E$ tel que $\|Q_\infty\|_\infty = 1$ et $|L(Q_\infty)| = \mathcal{N}_\infty(L)$.

b) Trouver $Q_2 \in E$ tel que $\|Q_2\|_2 = 1$ et $|L(Q_2)| = \mathcal{N}_2(L)$.

Troisième partie

Soit F l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré quelconque.

Pour $P \in F$ de degré $d(P)$, définie par $P(x) = \sum\limits_{p=0}^{d(P)} a_p x^p$, on pose

$$\|P\|_\infty = \sup_{0 \leq p \leq d(P)} |a_p| \text{ et } \|P\|_2 = \left(\sum_{p=0}^{d(P)} (a_p)^2 \right)^{1/2}$$

et l'on définit ainsi des normes sur F [par convention $\|0\|_\infty = \|0\|_2 = 0$].

Pour $P \in F$, on pose encore $L(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x) \mathrm{d}x$.

9. **a)** Trouver une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \|P_k\|_\infty = 1$ et $\lim\limits_{k\to\infty} L(P_k) = +\infty$.

b) L'application L est-elle continue ?

10. **a)** Montrer que $\sup\limits_{P\in F, \|P\|_2 \leq 1} |L(P)|$ existe. On désigne ce nombre par $|||L|||$.

b) Existe-t-il une fonction polynomiale $Q \in F$ telle que $\|Q\|_2 = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||$?

Problème 2

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et par (E) l'équation :

$$2y\phi(x,y) + (1-x^2)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On dira que ϕ est une solution de (E) sur un ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

i) ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Δ ;

ii) ϕ vérifie l'équation (E) pour tout couple (x,y) de Δ.

Préliminaires

1. On considère la fonction f définie par : $f(x,y) = \dfrac{1}{1-y^2}\ln\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.
On note D l'ensemble des couples de réels (x,y) pour lesquels cette expression a un sens.
Représenter l'ensemble D dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, puis établir que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(1-y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2yf(x,y)$ pour $(x,y) \in D$, puis démontrer que f est une solution de (E) sur D.

Résolution de (E)

4. Soient Ω et Ω' les ouverts de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$$
$$\Omega' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 4y\}$$

On considère l'application Ψ de Ω dans $\mathbb{R}^2$: $\Psi :\ (x,y) \longmapsto (x+y, xy)$.

a) Établir que Ψ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω sur Ω'.
b) DéterminerΨ^{-1} et en déduire que Ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Ω'.

5. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

a) Montrer qu'il existe une application

$$h : \begin{array}{ccc} \Omega' & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & h(u,v) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω' telle que :

$$\forall (x,y) \in \Omega, g(x,y) = h(x+y, xy).$$

b) Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

i) $\forall (x,y) \in \Omega, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$;

ii) $\forall (u,v) \in \Omega', \dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 0.$

6. Soit H une solution de (E) sur $\Omega_1 = \{(x,y) \in (]-1,1[)^2 \mid y < x\}$ et G définie sur Ω par :
$G(u,v) = (1-\tanh^2(v))H(\tanh(u), \tanh(v))$.

a) Calculer $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ à l'aide des dérivées partielles de H.
b) Déduire de la question 5. qu'il existe une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \Omega_1, H(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\Phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

(*On pourra transformer cette égalité en posant* $x = \tanh(X)$ *et* $y = \tanh(Y)$ *sachant que la fonction* $\tanh$ *est un difféomorphisme de* $\mathbb{R}$ *sur l'intervalle* $]-1,1[$ *et que* $\tanh(u+v) = \dfrac{\tanh(u)+\tanh(v)}{1+\tanh(u)\tanh(v)}$.)

7. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur Ω_1.

FIN DE L'ÉPREUVE