Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Ecoles
Khouribga

Année scolaire : 2016/2017
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n °3

03/12/2016

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

Les parties II, III et IV sont indépendantes.
Toutes les matrices considérées dans ce problème sont à coefficients complexes. $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$, on note $\|A\| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|, 1 \leq i \leq p\right\}$ qu'on notera aussi $\|A\|_{p,n}$ s'il convient de préciser le type de la matrice A.
On définit aussi $\|A\|_\infty = \max\{|a_{i,j}|,\ \ 1 \leq i \leq p,\ \ 1 \leq j \leq n\}$.

Partie I : Normes sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$

1. Vérifier que $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$.

2. **a)** Si $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{C})$ montrer que $\|AB\|_{p,q} \leq \|A\|_{p,n}\|B\|_{n,q}$

b) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$ comparer $\|A^k\|$ et $\|A\|^k$.

c) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et λ est une valeur propre complexe de A, montrer que $|\lambda| \leq \|A\|$.

3. Si une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace normé $(\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C}), \|.\|_{p,n})$, vers une limite U et si une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace normé $(\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{C}), \|.\|_{n,q})$ vers une limite V, que peut-on dire de la suite $(A_kB_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

4. Montrer que $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont deux normes équivalentes sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$. Expliquer comment cela permettrait de retrouver le résultat de la question précédente.

Partie II : Résolution itérative d'un système linéaire

Dans toute la suite du problème, A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Y est une matrice colonne à n lignes données, et on considère le système linéaire à n inconnues $(x_i)_{1\leq i\leq n}$:

$$(1)\ \ X = AX + Y$$

où X est la matrice colonne dont le i-ème coefficient est x_i. Pour $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on définit une suite de matrices colonnes par la relation de récurrence

$$(2)\ \ X_{k+1} = AX_k + Y$$

Pour $k \geq 1$, on note $S_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i$.

A-Existence d'une solution

1. Exprimer X_k en fonction de k et X_0.

2. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (1) ait une solution unique est que 1 ne soit pas valeur propre de A.

B-Cas d'une matrice diagonalisable

On suppose dans cette section que la matrice A du système (1) est diagonalisable. On note $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la liste de ses valeurs propres répétées avec leurs multiplicités et on désigne par P une matrice inversible telle que

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = D.$$

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$ la matrice S_k est diagonalisable.

2. On suppose que toutes les valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à 1. Déterminer $\lim\limits_{k \to \infty} A^k$.

   Montrer que la suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, et exprimer sa limite en fonction de A. En déduire que la suite (2) est convergente. Peut-on appliquer ce résultat à la résolution de (1) ?

3. On suppose que A possède au moins une valeur propre de module supérieur ou égal à 1, et on choisit $X_0 = Y$. Montrer qu'en général, la suite (2) est divergente.

C-Cas où $\|A\| < 1$

Dans cette section, on ne suppose plus A diagonalisable, mais on suppose que $\|A\| < 1$.

1. Le système (1) a-t-il une solution ? Est-elle unique ?

2. Déterminer $\lim\limits_{k \to \infty} A^k$.

3. Calculer $S_k(I_n - A)$. En déduire que la suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

4. Etudier la convergence de la suite (2). Que peut-on dire de sa limite ?

D-Application

Dans cette partie, on considère des matrices $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et le système linéaire

$$(3) \;\; BX = Z$$

On suppose que $B = (b_{i,j})$ vérifie

$$(4) \;\; \forall i \in [\![1, n]\!], \;\; |b_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |b_{i,j}|.$$

1. En écrivant d'abord les équations de (3) sous la forme

   $$b_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} b_{i,j}x_j + z_i \;\; \text{pour} \;\; i \in [\![1, n]\!]$$

   transformer l'équation (3) en une équation du type (2) pour laquelle la méthode itérative étudiée en (II C) s'applique.

2. En déduire que B est inversible.

Partie III : Matrices stochastiques

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, le rayon spectral de A est le réel positif

$$r(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|.$$

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont réels positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

$$\forall (i,j) \;\; a_{i,j} \geq 0 \;\text{ et }\; \forall i, \;\; \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

A-Matrices stochastiques

1. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice réelle à coefficients positifs ou nuls, montrer que A est stochastique si et seulement si le vecteur colonne U dont tous les coefficients valent 1 est vecteur propre de A pour la valeur propre 1. En déduire que le produit de deux matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique.

2. Si A est stochastique, que vaut $\|A\|$? En déduire que $r(A) = 1$. Que peut-on dire de $r({}^tA)$?

B-Matrices stochastiques strictement positives

On suppose dans cette section que A est une matrice stochastique dont tous les coefficients sont strictement positifs. On étudie la convergence de la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

1. Soit $d = \min_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$. Montrer que $d \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

2. Si $Z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$ est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$, on note $\max Z = \max_{1 \leq i \leq n} z_i$ et $\min Z = \min_{1 \leq i \leq n} z_i$.

a) Si $\min Z \geq 0$, montrer que $\min AZ \geq d \max Z$.

b) Si $Y \in \mathbb{R}^n$, montrer que

$$0 \leq \max AY - \min AY \leq (1 - 2d)(\max Y - \min Y).$$

3. Montrer que

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n, \;\; \forall p \in \mathbb{N}^*, \;\; 0 \leq \max A^pY - \min A^pY \leq (1-2d)^p(\max Y - \min Y).$$

4. Montrer que, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, les suites $(\max A^pY)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\min A^pY)_{p \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite λ.

5. En déduire que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice à coefficients positifs dont toutes les lignes sont égales à une ligne $L = (l_1, \ldots, l_n)$ avec $\sum_{j=1}^{n} l_j = 1$.

6. Montrer que $LA = L$ et donc que ${}^tL$ est vecteur propre de ${}^tA$ pour la valeur propre 1. Montrer que les coefficients de L sont tous strictement positifs.

7. Si L' est un vecteur ligne vérifiant $L'A = L'$, montrer que L' est colinéaire à L.

8. Ces résultats subsistent-ils dans le cas d'une matrice A stochastique à coefficients positifs ou nuls ?

Partie IV : Normes matricielles, formule du rayon spectral

Le rayon spectral $r(A)$ d'une matrice carrée complexe A a été défini dans la partie III. On travaille désormais sur l'espace $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Une norme $N : E \to \mathbb{R}^+$ est dite norme matricielle si elle vérifie

$$\forall A, B \in E N(AB) \leq N(A)N(B).$$

On a montré en (I 2 a) que $\|.\|_{n,n} = \|.\|$ est une norme matricielle.

1. On se donne une matrice $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, et on pose, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

$$N_Q(A) = \|Q^{-1}AQ\|$$

a) Montrer que N_Q est une norme matricielle sur E.

b) Expliciter une constante $C_Q > 0$ telle que

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \ \ \frac{1}{C_Q}\|A\| \leq N_Q(A) \leq C_Q\|A\|.$$

2. Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'on peut trouver un réel $s > 0$ tel que la matrice $D_s = \text{Diag}(s, s^2, ..., s^n)$ vérifie

$$N_{Ds}(T) < r(T) + \varepsilon$$

En déduire que, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$ sont donnés, il existe une norme matricielle N_ε telle que

$$N_\varepsilon(A) < r(A) + \varepsilon.$$

3. En déduire l'équivalence :

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \text{ dans } (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \|.\|_{n,n}) \Leftrightarrow r(A) < 1.$$

4. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ montrer la formule du rayon spectral :

$$\lim_{p\to\infty} \|A^p\|^{\frac{1}{p}} = r(A).$$

Fin de l'épreuve