Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Ecoles
Khouribga

Année scolaire : 2016/2017
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n °4

21/01/2017

durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••••••

Exercice

Soit α un réel n'appartenant pas à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

1. Calculer u_n et en déduire que la série de terme général u_n est convergente.

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(a_n(x))_{n\geq 1}$ par :

$$a_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \cos(px).$$

Montrer que pour des valeurs de x qui seront précisées, il existe des rationnels C_1 et C_2 tels que :

$$a_n(x) = C_1 + C_2 \frac{\sin[(2n+1)\frac{x}{2}]}{\sin\frac{x}{2}}.$$

3. Soit F la fonction numérique définie sur $[0,\pi]$ comme suit :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\cos(\alpha x) - 1}{\sin\frac{x}{2}} & \text{si } x \in]0,\pi]. \end{cases}$$

Montrer que F est continument dérivable sur $[0,\pi]$.

4. On pose

$$I_n = \int_0^\pi F(x)\sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^\pi \frac{\sin[(2n+1)\frac{x}{2}]}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x.$$

Montrer la relation

$$\sum_{p=1}^{n} u_p = -\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\alpha} + \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}J_n.$$

5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que I_n est convergente et calculer sa limite.

6. En évaluant la différence $J_{n+1} - J_n$, calculer J_n.

7. Utiliser les résultats précédents pour montrer que pour tout réel α n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}\alpha}{n^2-\alpha^2} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha}.$$

Problème

Quelques propriétés de l'exponentielle des endomorphismes

On se place dans $\mathscr{L}(E)$ (algèbre des endomorphismes de E) où E est selon le cas $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (cela sera précisé si nécessaire), munie de la norme subordonnée définie par $\|u\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. $\mathrm{GL}(E)$ désigne le groupe linéaire de E (l'ensemble des endomorphismes linéaires inversibles). Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $\mathbb{C}[u]$ l'algèbre des polynômes en u.
On peut utiliser le théorème suivant sans démonstration :
Décomposition de Dunford : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé. Alors il existe un couple (d, n) unique d'endomorphismes de $\mathbb{C}[u]$ tels que :

- *d est diagonalisable et n est nilpotent,*
- *d et n commutent,*
- *$u = d + n$.*

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base fixée de E, on rappelle qu'il y a un bijection $u \longmapsto A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ entre les endomorphismes de E et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, ce qui permet d'étendre les notions précédentes à toute matrice carrée.

Partie I : Propriétés élémentaires

1. **a)** Montrer que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{u^k}{k!}$ définit une application continue de $\mathscr{L}(E)$ dans lui même , on notera $\exp(u)$ sa somme.

b) Montrer que si deux endomorphismes u et v commutent, alors :

$$\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v) = \exp(v)\exp(u).$$

En déduire que $\exp(\mathscr{L}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$

c) Montrer que $\exp(u) \in \mathbb{C}[u]$.

d) Soit v un endomorphisme inversible. Montrer que l'application $\varphi_v \;:\; u \mapsto vuv^{-1}$ est continue, puis que

$$\exp(vuv^{-1}) = v\exp(u)v^{-1}.$$

e) En raisonnant matriciellement, calculer les valeurs propres de $\exp(u)$ en fonction de celles de u quant le polynôme caractéristique de u est scindé, et en déduire dans le cas général la formule

$$\det(\exp(u)) = e^{\mathrm{tr}(u)}.$$

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle A (on pourra chercher les valeurs propres de A).

3. Calculer $\exp(A+B)$, $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(B)\exp(A)$ pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie II : Surjectivité de exp dans le cas complexe

Le but de cette partie est de montrer que l'application $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective. Plus précisément nous allons montrer le résultat plus fort suivant :

$$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \ \ \exists B \in \mathbb{C}[A], \ \ \exp(B) = A.$$

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

A-Cas où A est diagonalisable

Dans cette partie supposons A est diagonalisable. Notons $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}^*$ ses valeurs propres, $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.

1. Montrer que l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective. (on admet que pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta} = z$).

2. On note $\mathbb{C}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$. On considère l'application linéaire φ de $\mathbb{C}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{C}^r$ définie par :

$$P \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_r)).$$

Soit $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_i = \exp(\mu_i)$, $1 \leq i \leq r$.

a) Déterminer le noyau de φ, puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{C}_{r-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $L(\lambda_i) = \mu_i$.

b) Pour $i \in \{1, ..., r\}$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{C}_{r-1}[X]$ par : $l_i(X) = \displaystyle\prod_{k \neq i} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$.

i. Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de i et j dans $\{1, ..., r\}$.

ii. En déduire une expression du polynôme L comme une combinaison linéaire des polynômes l_i avec $i \in \{1, ..., r\}$.

3. Déduire des questions précédentes que $A = \exp(L(A))$.

B-Cas où $A = I_n + N$ où N est nilpotente

Supposons $A = I_n + N$ où N est nilpotente. On pose

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k} = N - \frac{N^2}{2} + ... + (-1)^{n-2} \frac{N^{n-1}}{n-1}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{t^k N^k}{k}$$

et

$$g(t) = \exp(f(t)).$$

4. Montrer qu'on peut dériver terme à terme la série définissant g.

5. Calculer g', puis $(I_n + tN)g'(t)$, en déduire que $g'' = 0$ et calculer $g(t)$.

6. Montrer que $I_n + N = \exp(M)$ pour un certain M nilpotent, avec $M \in \mathbb{C}[N]$.

C-A est quelconque

D'après la décomposition de Dunford, il existe deux matrices $D, N \in \mathbb{C}[A]$ tels que D est diagonalisable avec $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(D)$ et N nilpotente et $A = D + N$.

7. Vérifier que D et inversible.

8. En écrivant $A = D(I_n + D^{-1}N)$ et en remarquant que $D^{-1}N$ est nilpotente, montrer qu'il existe $B \in \mathbb{C}[A]$ telle que $A = \exp(B)$

D-Applications

9. Montrer que $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = B^2\}$.

10. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une partie connexe par arcs.

Fin de l'épreuve