Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Ecoles
Khouribga

Année scolaire : 2016/2017
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n °5

11/02/2017

durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

●●●●●●●●●

1ère partie

Étude d'un opérateur intégrale

Notations : On désigne respectivement par :

- J l'intervalle $]-1,+\infty[$.
- $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de J dans $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{B}$ l'ensemble des applications continues et bornées sur $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$, à valeurs réelles.
- $\mathscr{E}$ l'ensemble des applications f continues sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles, et telles que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Objet du problème

Dans la partie I, on définit une application linéaire $T:\ f \mapsto T[f]$ sur $\mathscr{E}$.
Dans la partie II, on étudie certaines propriétés des fonctions $T[f]$ liées à la dérivation.
Dans la partie III, on étudie l'injectivité de T.
Dans la partie IV, on étudie un cas particulier et on calcule certaines intégrales.

PARTIE I

1. Prouver que $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel contenant $\mathscr{B}$.

2. Vérifier que $\gamma:\ t \mapsto \sqrt{t}\sin(t)$ est élément de $\mathscr{E}$, mais n'appartient pas à $\mathscr{B}$?

   On retiendra donc pour la suite du problème qu'un élément $f \in \mathscr{E}$ n'est pas forcément de signe constant, ni borné sur $[0,+\infty[$.

3. Soit f un élément de $\mathscr{E}$.
   Montrer que, pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Dans la suite, pour $f \in \mathscr{E}$, on note $T[f]$ la fonction à valeurs réelles définie sur J par :

$$\forall\, x \in J,\ \ T[f](x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2+x}\mathrm{d}t.$$

4. Montrer que $T: \ f \mapsto T[f]$ est une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

Partie II

f désigne un élément fixé de $\mathscr{E}$.

1. Prouver que la fonction $T[f]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et que

$$\forall x \in J, \ \ \big(T[f]\big)'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^2}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

2. **a)** Prouver plus généralement que $T[f]$ est dérivable à tout ordre p sur J et exprimer $\big(T[f]\big)^{(p)}(x)$ à l'aide de l'intégrale suivante :

$$F_p(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}}\mathrm{d}t.$$

b) Qu'obtient-on pour $x = 0$?

Dans la suite on note, pour $p \in \mathbb{N}, \ \ I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}}\mathrm{d}t.$

3. **a)** Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}}\mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

b) Montrer que pour tout réel x dans l'intervalle $]-1,1[$, on a :

$$T[f](x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p I_p x^p. \tag{3}$$

c) On désigne par $\mathscr{C}^\infty(J,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J, à valeurs réelles. L'application

$$\begin{array}{rccl} \overline{T}: & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(J,\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & T[f] \end{array}$$

est-elle surjective ?

Partie III

1. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. On définit une fonction Φ sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \ \Phi(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{1+u^2}\,du.$$

a) Vérifier que Φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}}\mathrm{d}t = \frac{I_k}{2k} \tag{4}$$

(où I_k a été défini dans la partie **II** après la question **II.2.**)

Dans la suite de cette partie, on suppose que $f \in \operatorname{Ker} T$, c'est-à-dire que $f \in \mathscr{E}$ et $T[f]$ est la fonction nulle sur J.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_k = 0$.

3. On considère la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(u) = \begin{cases} \Phi\left(\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right) & \text{si } u \in]0,1] \\ 0 & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que φ est continue sur $[0,1]$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 u^k \varphi(u)\mathrm{d}u = 0. \tag{5}$$

Ceci montre (ce qu'on ne demande pas de justifier) que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\int_0^1 P(u)\varphi(u)\mathrm{d}u = 0. \tag{6}$$

b) En déduire que $\forall u \in [0,1], \quad \varphi(u) = 0$.

4. L'application T est-elle injective ?

Partie IV

Dans cette partie, on suppose que $f(t) = \cos(t)$. On remarque que $f \in \mathscr{B}$, donc $f \in \mathscr{E}$. On note $g = T[f]$ et pour $a > 0$, on pose

$$h(a) = ag(a^2-1) = \int_0^{+\infty} \frac{a\cos t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall a > 0, \quad h(a) \leq \dfrac{1}{a}$.

2. **a)** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}\mathrm{d}u. \tag{7}$$

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} h\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Démontrer, en utilisant les expressions de g' et g'' obtenue dans la partie **II**, que $h''(a)$ existe pour $a > 0$ et peut se mettre sous la forme

$$h''(a) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right)\right](\cos t)\mathrm{d}t. \tag{8}$$

4. Calculer pour $(a,t) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right).$$

5. **a)** A l'aide d'intégrations par parties, exprimer $h''(a)$ en fonction de $h(a)$.

b) Montrer que

$$\forall a > 0,\ \ h(a) = \frac{\pi}{2}e^{-a} \tag{9}$$

et en déduire la valeur de $g(x) = T[f](x)$.

6. Déterminer les coefficients du développement limité à l'ordre 2 de $g(x)$au voisinage de 0.

7. **a)** En utilisant le résultat de la question **II.3^o.b)**, calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$K_0 = \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t,\quad K_1 = \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,\quad K_2 = \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t.$$

b) Justifier l'existence de la limite $K' = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^A \frac{t\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)$ et déterminer sa valeur.

Fin de l'épreuve