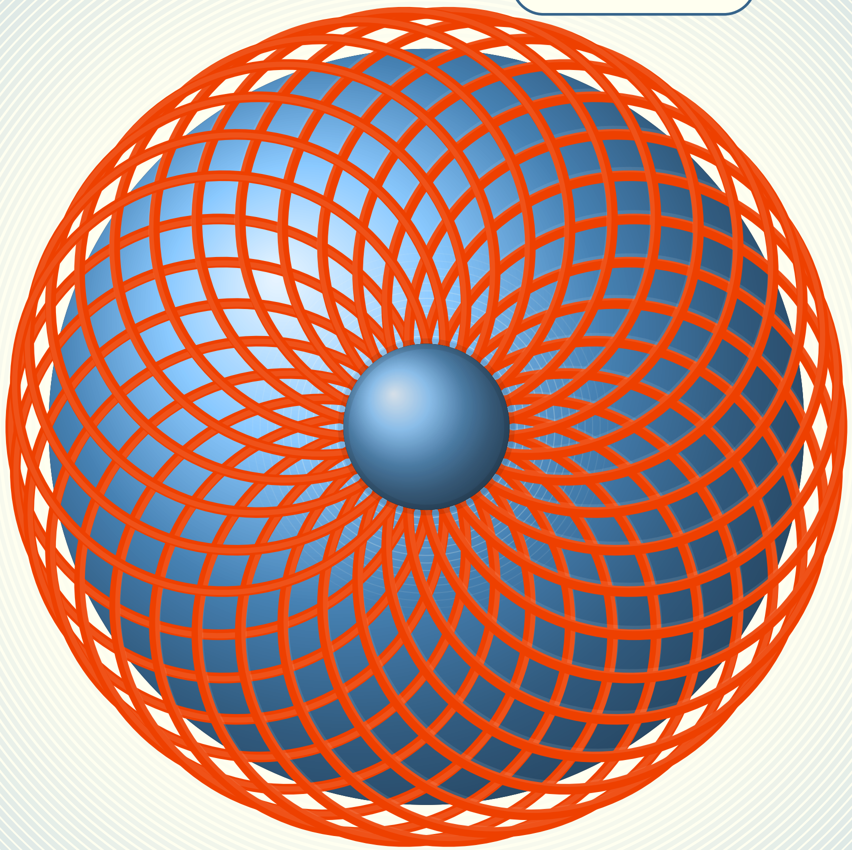
Les cahiers de prépas

Revue de mathematiques et d' informatique
pour les classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs

N° 1
Avril 2011

Dans ce numéro

- Des articles scientifiques et de vulgarisation en rapport avec les mathématiques ;
- Des cours sur des parties mal documentées du programme ;
- Un spécial préparation aux concours, avec plusieurs corrigés de sujets de concours et des problèmes originaux avec leurs corrigés ;
- Une rubrique informatique avec pour ce numéro, un article sur le langage C et un autre sur l'utilisation du logiciel Maple en calcul matriciel.



Spécial

Préparation aux concours

Porposé par la Branche Maths - Info
de l' Association Marocaine des Professeurs Agrégés

Les cahiers de prépas
Numéro 1

Revue scientifique consacrée aux classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs

réalisée par
La BRANCHE MATHS – INFO
de L'ASSOCIATION MAROCAINES DES PROFESSEUR AGRÉGÉS

Conception maquette
SADIK BOUJAIDA
ibouja@gmail.com

Chargé de la communication
MOULAY SMAIL MAMOUNI
mamouni.myismail@gmail.com

Rédaction

SADIK BOUJAIDA, KARIM CHAIRA
MOHAMMED ERRACHID, LAHCEN LHACHIMI
MOULAY SMAIL MAMOUNI, KHALID OUNACHAD
ABDELLATIF ROCHDI, MUSTAPHA SAADAOUI
MIMOUN TAIBI, MOHAMMED TARQI

Responsable de la rubrique informatique
SADIK BOUJAIDA

Dépot Légal
(en cours)

Ce numéro est téléchargeable au format PDF sur le site
ampa.asso.st

Concéption (100%) LaTeX

SADIK BOUJAIDA

ibouja@gmail.com

Édito

Les membres de la branche Maths-Info *de l'*Association Marocaine des Professeurs Agrégés*, sont heureux de présenter cette revue. Bien que celle-ci ait été conçue à destination des élèves des classes préparatoires scientifiques, elle peut être profitable aux étudiants du premier cycle universitaire ou assimilé. Son propos est à teneur pédagogique et scientifique. Elle privilégie l'information concrète et pragmatique et s'abstient de toute surenchère éditoriale. Elle se veut aussi un espace où les enseignants peuvent exprimer leur savoir faire et faire profiter de leur expérience un plus large publique que le domaine restreint des classes qu'ils ont en charge.*

Il a été choisi, pour ce numéro du moins, de diffuser la revue uniquement en ligne, sous sa forme numérique. Et ce afin de se dispenser des tracas de l'édition papier et des aléas de la distribution. C'est ainsi que le format (du A4 en mode paysage, avec principalement deux colonnes, très populaire parmi notre gente estudiantine) retenu pour la mise en page est peut être inhabituel pour une revue, mais il l'a été dans le but de permettre à tout un chacun d'en produire une version imprimée avec un coût optimal, tout en préservant des conditions décentes d'utilisation.

Le contenu n'est pas en reste de cette vision des choses : privilégier l'aspect pratique et l'information immédiatement utile et utilisable. Ce premier numéro, par exemple, a été pensé pour soir aux besoins actuels de nos élèves, qui entament pour ceux des classes de deuxième année, la phase terminale de leur préparation aux concours.

Nous espérons que ce premier opus serait profitable à nos élèves. Qu'il déclenchera aussi l'adhésion de nos enseignants au projet pour les prochains numéros. Sans leur apport cette production, ne saurait survivre au delà de quelques parutions. Leurs compétence et la maitrise de leurs métiers n'offrent pas de place au doute, mais il faut en diversifier les voies de canalisation. Nous espérons aussi par ce travail, contribuer à combler le vide éditorial qui règne dans notre secteur.

Sadik Boujaida

Les cahiers de prépas

Table des matières

du numéro 1

Qu'est ce que Wikipedia ?

Wikipedia, l'encyclopédie libre, est une encyclopédie multilingue, librement diffusable, disponible sur le web. Elle a été crée en 2001 et est devenue l'un des sites web les plus visités dans le monde. Elle est hébergée par une fondation américaine, la **Wikimedia Foundation**.

Son fondateur **Jimmy Whale**, après l'échec d'une expérience précédente (Nupedia), confia sa création à Larry Sanger à titre de rédacteur en chef. Contrairement à Nupedia, elle a depuis ses débuts fonctionné selon un mode de rédaction des articles totalement libre, sans comité central de contrôle, avec comme compensation un système tout aussi libre pour rapporter les abus et les imprécisions. Elle a été aidé en cela par l'apparition d'une nouvelle technologie, qu'elle a d'ailleurs largement contribué à populariser, la technologie **wiki**. Un wiki est un site web dont le contenu n'est plus limité à une consultation passive de l'utilisateur, mais est immédiatement éditable par celui-ci, selon plusieurs niveaux de permissions, et ce dans le Navigateur web lui même. Ainsi les articles publiés sur Wikipedia, une fois crée par un utilisateur, sont modifiables par les visiteurs du site. Ce qui peut en apparence poser un problème de fiabilité des informations mise à disposition des visiteurs. Mais au final le publique exerce une sorte d'auto-régulation qui fait que, dans certains domaines plus que d'autres, la qualité des article mis en ligne égale presque celle des autres encyclopédies numériques dites commerciales.

Les articles sur les sciences pures sont ceux qui bénéficient de la plus grande justesse, et c'est souvent confirmé par des comparatifs réalisés par des magazines scientifiques célèbres (tel **Nature**). Ceci est peut-être dû au fait que la nature même des sujets traités ne prête pas à la polémique et qu'ils sont souvent rédigés par des personnes qui font autorité dans leurs domaines.

Wikipédia peut constituer un point de départ pour tout essai de documentation sur un sujet scientifique. En cela il peut s'avérer une ressource inépuisable pour les élèves des classes préparatoires en quête de sujets pour la préparation de leurs T.I.P.E (Travail d'Initiative Personnel de l'Élève). Mais peut aussi, dans un registre plus oisif, leurs fournir des informations sur les sujets qui les intéresse, en allant de la biographie de leur artiste préféré ou la fiche technique d'un film à l'historique de la voiture de leurs rêve.

Signalons que l'aspect libre de Wikipedia est concrétisé par le fait qu'elle soit accessible, sans support d'installation ni une quelconque formule d'abonnement, sur n'importe quel matériel disposant d'un Navigateur web. Ce qui inclut tous les ordinateurs et tablettes, certains téléviseurs ... et notamment les téléphones portables dits intelligents (smartphones). Certains de ces derniers appareils ont des applications dédiées à la consultation du site, avec des capacités de balisage (bookmarks) et de gestion de l'historique de consultation des articles. Et parfois même ses applications sont capables de rapatrier tout le contenu (encore un avantage de l'aspect "libre") de Wikipedia pour une consultation offline.

« Culture générale »

L'histoire des nombres, Première partie

proposé par Abdellatif Rochdi

Faculté des sciences Ben Msick, Casablanca

Nos connaissances mathématiques acquises depuis l'enseignement primaire jusqu'aux années de licence sont le fruit des travaux réalisés au cours de la période, relativement récente, qui s'étale de la renaissance en Europe Occidentale jusqu'à aujourd'hui. Cependant il a fallu à l'humanité plusieurs millénaires pour domestiquer le nombre. Ceci est l'aboutissement d'un long processus et travail d'abstraction de la pensée à travers les civilisations qui se sont succédées.

Des symboles « numériques » sont trouvés dans les restes des premières écritures humaines. Même dans l'*âge de pierre* (← /-10 000) nous les trouvons en forme d'entailles dans des os ou comme des marques sur les murs de grottes. C'était l'âge où l'homme a vécu comme un chasseur et aujourd'hui nous pouvons seulement spéculer si |||| a, par exemple, été destiné pour représenter la quantité de gibier chassé. Les systèmes de nombres marquent le début de l'arithmétique.

Paléolithique supérieur [1] (-35 000/-10 000)

Présence d'ENTAILLES NUMERIQUES en Europe. Les hommes, qui durent apprendre à conserver les « nombres », avaient à leur disposition deux supports privilégiés, les os et le bois. Pour mémoriser combien il y avait d'éléments dans un ensemble de choses (bêtes, hommes ou objets), les hommes du Paléolithique faisaient une marque (souvent une entaille) sur le support choisi. Des « os numériques » de près de -30 000 ans ont été retrouvés.

Mésolithique [2] (-10 000/-6 000)

Apparition des CALCULI au MOYEN ORIENT. C'est en Mésopotamie et dans d'autres lieux du Moyen Orient (-8 000) qu'apparaissent les calculi. Dans la pratique, chaque caillou vaut "un" et pour des raisons de commodité évidente, on eut l'idée de remplacer un tas par un seul caillou de nature différente, par sa couleur ou par sa forme. On retrouve d'ailleurs en Mésopotamie chez les sumériens des objets fabriqués ("pierres d'argile"), les calculi (calculus, "caillou" en latin), dès la moitié du 4ème millénaire av J.-C.
Dans la numérotation sumérienne, qui est de base 60, le petit cône vaut 1, la bille 10, le grand cône 60, le grand cône perforé 3 600 et la sphère perforée 36 000.

Vestiges des premières utilisation des nombres

Nous allons présenter, dans une série de paragraphes, l'évolution du « nombre » depuis les premières civilisations

Babylonienne (← -3 000/-539)
Egyptienne (-3 150/-715)
Grecque (-800/-200)
Maya (-4 e/1697)
Indo (← -300/700 →) - Arabe (3e/13e s.)
en passant par la
Renaissance Européenne (14e/17e s.)
Jusqu'à l'époque actuelle.

[1] Age de la pierre taillée
[2] début de la sédentarisation agricole

Nous débutons cette histoire par cette première partie intitulée :

Apparition du « nombre » dans les premières civilisations (Babylonienne, Egyptienne et Chinoise)

Les premiers documents reviennent aux premières civilisations de la vallée du Nil, et celle de l'Euphrate et du Tigre. (Voir carte, page 9)

Numérotation Babylonienne (← -3 000/-539)

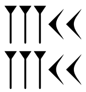
Les Babyloniens ont utilisé des symboles cunéiformes sur des tablettes d'argile. Ceux-ci ont été basés sur une décimale mélangée et une notation de position sexagésimale : signifiant 1, 601, 602, ... ; tandis que signifiant 10, 10.601, 10.602,...et cetera. Un symbole zéro n'était toujours pas utilisé par les Babyloniens et ils n'ont jamais utilisé une marque comme notre point décimal. Dans une notation positionnelle le rôle du zéro est celui d'un signe marquant "un écart" (trou). Un signe de cette sorte, deux petites marques de cale

doit être trouvé dans un vieux texte Babylonien de Susa ([2] 12, p. 4), mais seulement dans cas isolés (TROPFKE [6], p. 28).

En absence d'un tel signe, la valeur positionnelle doit être déduite dans chaque cas du contexte. Ainsi, par exemple, pourrait signifier n'importe lequel des

nombres
21.60+10, 21.602+10.601, 10.601 ou 21.602+10 et cetera.

Des exemples de fractions sexagésimales sont  pour 0.30 = 30/60 = 1/2 ou



pour 0.64 = 6. 1/601+40. 1/602 = 1/9. (Pour les détails de calcul de Babyloniens voir NEUGEBAUER [3], BRUINS-RUTTEN [2]).

Les Babyloniens ont été des arithméticiens et algébristes fortement doués. Ils ont développé des tables sophistiquées pour l'utilisation dans des calculs incluant la multiplication et la division pour résoudre des équations quadratiques du troisième degré. Ils ont donné des règles pour résoudre des équations quadratiques « mélangées » par le processus "de l'achèvement du carré" et même pour résoudre des équations du troisième degré mélangées à l'aide des tables de x2(x+1). En tout cas il est sûr d'affirmer que les Babyloniens, avec leurs méthodes habiles et ingénieuses de calcul ont exercé une influence considérable sur le développement ultérieur d'arithmétique et l'algèbre.

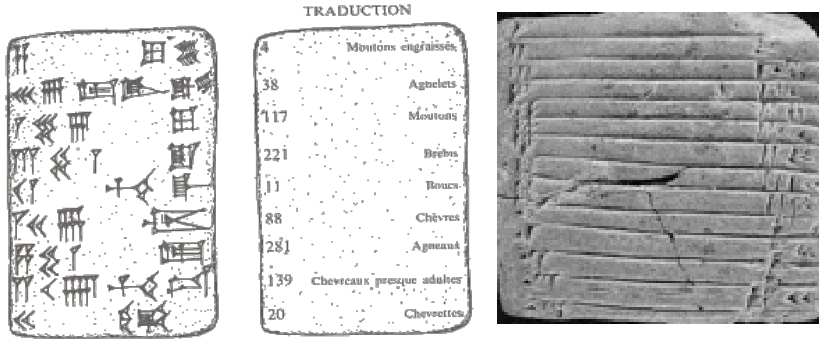
(-3300/-3200) PREMIÈRE NUMEROTATION ECRITE (CHIFFRES) À SUMER (MÉSOPOTAMIE) ET EN ELAM (IRAN)

L'écriture est née en Mésopotamie puis élaborée pour la gestion de l'empire, terres, troupeaux, hommes, grains ... Dans les premières tablettes d'argile, ayant révélé l'écriture, apparaissent des nombres. Numération écrite et écriture semblent être contemporaines.

(-2700) APPARITION DES CHIFFRES SUMERIENS CUNEIFORMES

(-2000) APPARITION DE LA BASE DECIMALE

(-1900/-1600) PREMIÈRE NUMEROTATION DE POSITION (SAVANTE)



A gauche : Tablette sumérienne (-2 000) donnant un décompte du bétail au moyen des signes et chiffres cunéiformes. A droite : Une table de multiplication par 25 (-2 000) provenant de Suse (Mésopotamie).

(-3E SIÈCLE) INVENTION DU « ZERO » PAR LES BABYLONIENS

Ce zéro n'est pour l'instant, pas conçu comme un nombre pouvant être utilisé lors de calculs. Il sert simplement à exprimer l'absence d'unités d'un certain ordre.

NUMÉROTATION EGYPTIENNE (HIÉROGLYPHIQUE) (-3 150/-715)

Les hiéroglyphes pour les nombres 10 000, 100 000 et 1 000 000 doivent être trouvés sur une maque du Roi Narmer, de la première dynastie Egyptienne (–3000). Les images utilisées peuvent se référer aux pratiques liées aux nombres appropriés :

Chiffres Hiéroglyphes	Valeur	Signification présumée
	1	Un bâton, évoque l'unité
	10	Une anse de panier, peut contenir environ 10 objets
	100	Un rouleau de papyrus, on peut y mettre environ 100 hiéroglyphes
	1000	Une fleur de lotus, on les trouve par milliers

	10 000	Un doigt montrant le ciel nocturne, on y voit près de 10 000 étoiles
	100 000	Un têtard, on en trouve de l'ordre de 100 000 après la ponte
	1 000 000	Un dieu agenouillé supportant le ciel, le dieu est éternel et 1.000.000 d'années est synonyme d'éternité

Tab. 1.1 : Hiéroglyphes numériques de l'ancienne Egypte

Il est également possible que les symboles représentent des objets dont la lettre initiale est la même que le mot pour le nombre correspondant. De nouveaux nombres sont formés par une notation additive basée sur la juxtaposition, par exemple,

 = 221000 ou  = 10010

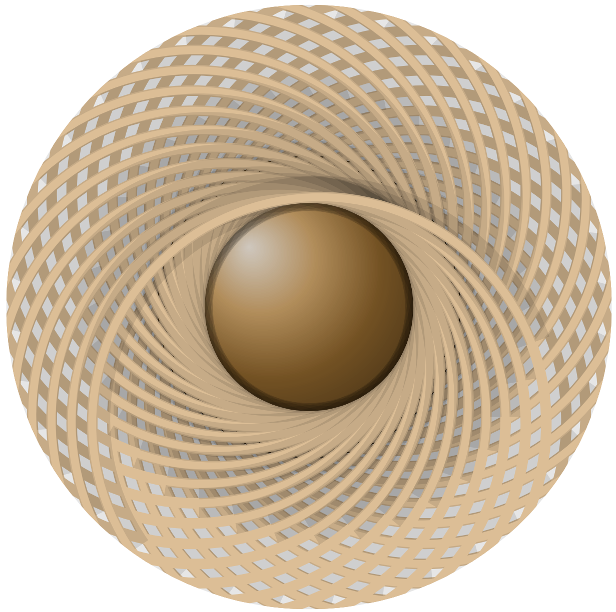
Ainsi l'addition et la soustraction ne présentent aucun problème. Par exemple,

∩|| = 12 ajouté à, ∩| = 11 donne ∩∩||| = 23.

La multiplication et la division sont réduites à une succession d'opérations de doublement et de division par deux. Les fractions résultantes sont exprimées comme des sommes de fractions d'unité (fractions dont le numérateur est 1), le signe étant utilisé pour indiquer que le symbole du nombre au dessous duquel il est placé représente le dénominateur d'une fraction d'unité. Ainsi par exemple la fraction 1/12 est écrite comme

- Pour représenter la fraction 3/12, les calculs trois fois un douzième sont exécutés comme suit : 1 1/12 (c'est à dire une fois 1/12 = 1/12) 2 1/6 (doublement) de manière que la fraction 3/12 soit écrite comme 1/6 1/12, c'est à dire
- Pour exécuter les calculs de cette sorte avec des fractions générales, on a besoin de pouvoir exprimer les moitiés et doubler des fractions d'unité comme les sommes de fractions d'unité avec des dénominateurs impairs. Le papyrus Rhind (environ 1650 av. J.-C) contient des tables donnant de telles décompositions de la fraction 2/n pour entiers impairs n. (Pour les détails de calculs Egyptiens, voir le Papyrus de Moscou [5] et le Papyrus Rhind [4].)

❏



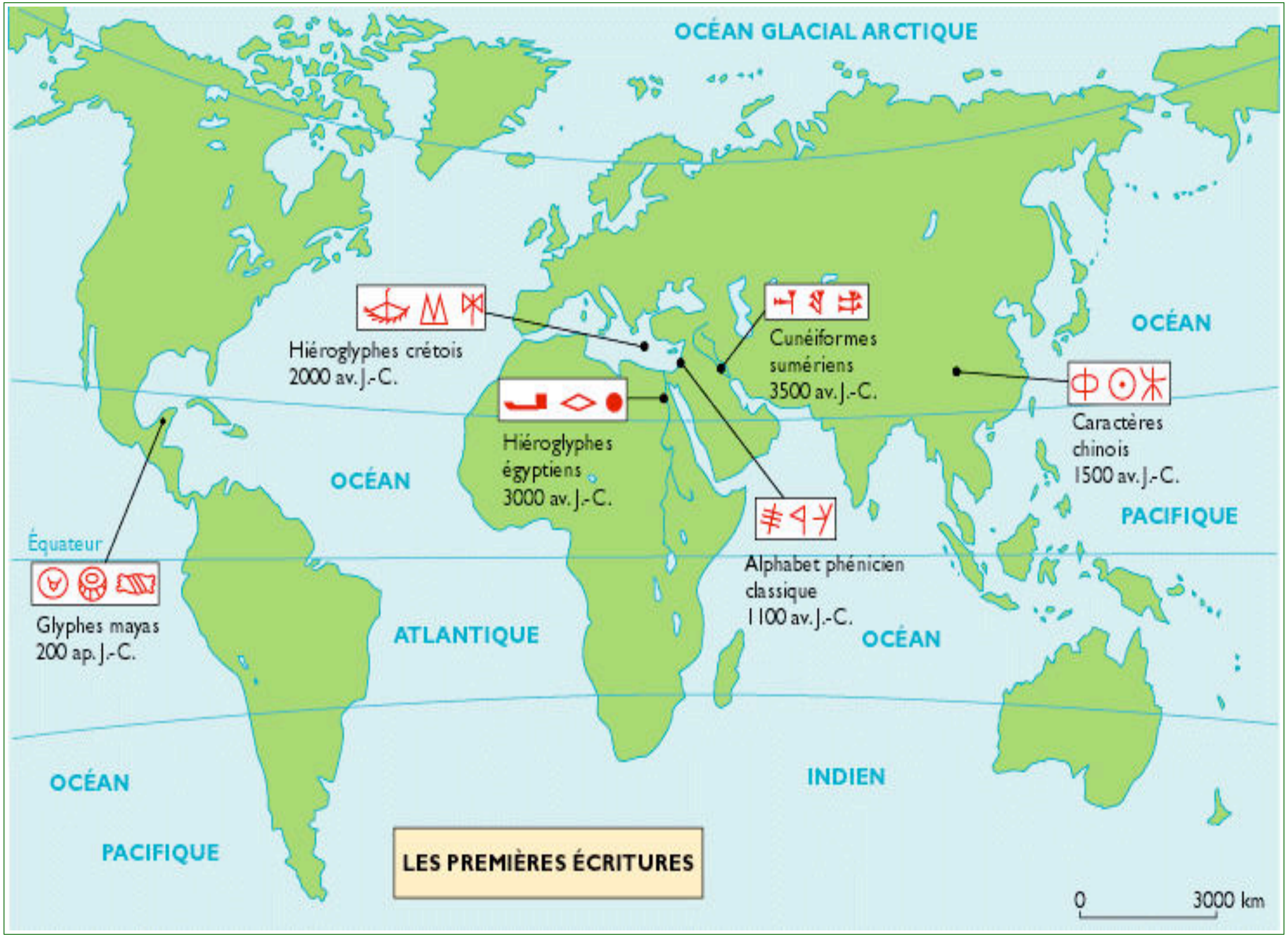


FIG. 1.1 : Les premières écritures servaient de « livres de comptabilité ou d'inventaires »

À propos de l'auteur de l'article

Né en 1970 à Midelt, au pieds du Jbel Al Ayachi (Moyen Atlas) où il a suivi ses étude secondaire jusqu'à 1988, l'auteur a obtenu sa licence en mathématiques pures à l'université de Fès en 1993. Agrégé en mathématiques en 1995, il a depuis intégré les classes prépas (Fès, Marrakech, Agadir, Casablanca, Salé, Rabat). Docteur en mathématique (topologie algébrique) en 2009 à l'université de Casablanca. Il poursuit actuellement, à distance, des études de Master en sciences de l'éducation à l'université de Rouen en France.

Il a très top intégré l'outil informatique dans son travail, et a créé un site internet, qui a évolué avec les années et peut maintenant revendiquer un nombre de visites respectable. M. Mamouni est aussi un membre très actif du corps des enseignants de classes préparatoires et a plusieurs fois participé à l'organisation d'événements au profit des élèves et des professeurs. Il est aussi membre de groupes de recherche nationaux, régionaux (maghrébin) et internationaux.

« Article scientifique »

Topologie algébrique : Introduction

par My Smail MAMOUNI
Lycée Moulay Youssef – Rabat

Le but de ce premier article dans une série de trois articles, est de donner les outils nécessaires, ceux de la topologie algébrique, pour faciliter la lecture du 3ème article, où il sera question d'énoncer et démontrer l'un des travaux de recherches de l'auteur.

Dans tout cet article, $\mathbb{Q}$ est le corps de base de tous les espaces vectoriels considérés.

I. Introduction

La topologie algébrique, anciennement appelée topologie combinatoire, est une branche des mathématiques appliquant les outils de l'algèbre dans l'étude des espaces topologiques. Plus exactement, elle cherche à associer de manière naturelle des invariants algébriques aux structures topologiques associées.

L'idée fondamentale est de pouvoir associer à tout espace topologique des objets algébriques (nombre, groupe, espace vectoriel, ...), de sorte qu'à deux espaces homéomorphes sont associées deux structures isomorphes. De tels objets sont appelés des invariants algébriques. Comme exemple simple d'invariant topologique, $\pi_0(X)$: le nombre de composantes connexes d'un espace topologique X. L'une des applications célèbres de la topologie algébrique est le fameux théorème du point fixe de Brouwer : *toute application continue du disque unité de* $\mathbb{R}^n$ *dans lui-même admet un point fixe.*

II. Un peu d'histoire

Initialement appelée topologie combinatoire car elle prend sa source avec le problème des ponts de Königsberg, la topologie algébrique (terme dû à Listing, tiré du grec logos = étude, raisonnement et topos = lieu, site), fondée par Henri Poincaré, initiée par Emmy Noether et développée par Hopf, est une branche récente et très complexe de la topologie.

III. Cohomologie

Un *complexe de cochaines* est une suite d'espaces vectoriels $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'applications linéaires $d^n : C^n \to C^{n+1}$ tels que $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Autrement dit $\mathrm{Im} d^n \subset \ker d^{n+1}$. On pose alors $C = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} C^n$ et $d^n = d_{|C^n}$, et le couple (C, d) désignera dans la suite un complexe de cochaines. Les éléments de $\ker d$ s'appellent des *cocycles*, ceux de $\mathrm{Im} d$ des *cobords*. C'est *Emmy Noether* qui fût la première à définir le groupe abélien qui mesure l'obstruction pour un cocycle d'être un cobord :

$$H^n(C, d) = \ker d^{n+1}/\mathrm{Im} d^n \qquad (p - \text{ème groupe de cohomologie})$$

La *cohomologie* du complexe (C, d) est définit par la relation :

$$H^*(C, d) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^n(C, d)$$

Ainsi, tout cocycle x définit un élément $[x]$ dans $H^*(C, d)$, appelée sa classe de cohomologie. Un cocycle est un cobord si et seulement si sa classe de cohomologie est nulle.

Un morphisme de complexes de cochaines $\phi : (C, d) \to (D, d')$ est une application linéaire telle que $\phi^n = \phi_{|C^n} : C^n \to D^n$ avec

$$\phi \circ d = d' \circ \phi.$$

Autrement dit tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccccc}
C^0 & \xrightarrow{d} & C^1 & \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} & C^n & \xrightarrow{d} & C^{n+1} & \longrightarrow \dots \\
\downarrow \phi^0 & & \downarrow \phi^1 & & \downarrow \phi^n & & \downarrow \phi^{n+1} & \\
D^0 & \xrightarrow{d'} & D^1 & \xrightarrow{d'} \dots \xrightarrow{d'} & D^n & \xrightarrow{d'} & D^{n+1} & \longrightarrow \dots
\end{array}$$

On peut définir d'une façon naturelle la composée de deux morphismes de cochaines, ainsi que le morphisme identité. Ainsi un morphisme de complexes de cochaines $\varphi : C \curvearrowright D$ envoie cocycles sur cocycles et cobords sur cobords en chaque étage de la cohomologie et induit un morphisme de groupes abéliens sur les groupes de cohomologie en posant

$$\begin{array}{rccc}
H^*(\varphi) : & H^*(C) & \longrightarrow & H^*(D) \\
& [x] & \longmapsto & [\varphi(x)]
\end{array}$$

Il est facile de vérifier que :

$$H^*(g \circ f) = H^*(f) \circ H^*(g) \text{ et que } H^*(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{H^*(C)}$$

IV. Homologie

Un *complexe de chaines* est une suite d'espaces vectoriels $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et d'applications linéaires $d_n : C_n \to C_{n-1}$ tels que $d_{n-1} \circ d_n = 0$. On pose alors $C = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}^*} C_n$ et $d_n = d_{|C_n}$, et le couple (C, d) désignera dans la suite un complexe de chaines. Les éléments de $\ker d$ s'appellent des *cycles*, ceux de $\mathrm{Im} d$ des *bords*. L'*homologie* du complexe (C, d)

est définit par les relations :

$$H^n(C,d) = \ker d^{n+1}/\mathrm{Im} d^n \qquad (p - \text{ème groupe d'homologie})$$

$$H^*(C,d) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^n(C,d)$$

Un morphisme de complexes de chaines $\phi : (C,d) \to (D,d')$ est une application linéaire telle que $\phi_n = \phi_{|C_n} : C_n \to D_n$ avec

$$\phi \circ d = d' \circ \phi.$$

Autrement dit tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_0 & \xleftarrow{d} & C_1 & \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} & C_n & \xleftarrow{d} & C_{n+1} \longleftarrow \dots \\
\downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n+1} \\
D_0 & \xleftarrow{d'} & D_1 & \xleftarrow{d'} \dots \xleftarrow{d'} & D_n & \xleftarrow{d'} & D_{n+1} \longleftarrow \dots
\end{array}$$

On peut définir d'une façon naturelle un morphisme de groupes abéliens sur les groupes d'homologie en posant

$$\begin{array}{rccc} H_*(\varphi) : & H_*(C) & \longrightarrow & H_*(D) \\ & [x] & \longmapsto & [\varphi(x)] \end{array}$$

Il est facile de vérifier que :

$$H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(g) \text{ et que } H_*(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{H_*(C)}$$

V. Dualité homologie-cohomologie

Elle existe un dualité naturelle entre les notions d'homologie, plus précisément la donnée d'un complexe de chaine permet de construire un complexe de cochaines et inversement, et donc la donnée de l'une (homologie ou cohomologie) permet de construire l'autre. Considérons par exemple la donnée complexe de chaines (C,d), on définit complexe de cochaînes dual (C^*, d^*) par les relations suivantes :

- $C^n = (C_n)^*$, espace dual de C_n,

- $d^n = (d_{n+1})^*$, application linéaire transposée de d_{n+1},

Rappelons qu'en général si $f : X \hookrightarrow Y$ est une application linéaire et Z un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel quelconque, on pose

$$\begin{array}{rccc} f^* : & L(Y,Z) & \longrightarrow & L(X,Z) \\ & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

VI. Suites exactes

Une *suite exacte courte* de complexes de chaines est la donnée de complexes de cochaines (C,D,E) et de morphismes de complexes de cochaines $f : C \to D, g : D \to E$ tels que pour tout n la suite de morphismes de modules $0 \hookrightarrow E_n \overset{f_n}{\hookrightarrow} F_n \overset{g_n}{\hookrightarrow} G_n \hookrightarrow 0$ soit exacte, c'est à dire : f_n injective, g_n surjective avec $\mathrm{Im} f_n = \ker g_n$.

Théorème 2.1 (Lemme des serpents ou des zigzags) : Soit $0 \hookrightarrow E \overset{f}{\hookrightarrow} F \overset{g}{\hookrightarrow} G \hookrightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes de chaines, alors il existe une suite exacte longue

$$\begin{array}{lllll}
\downarrow \delta & & & & \\
H_n(C) \xrightarrow{H_*(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_*(g)} & H_n(E) & & & \\
& \downarrow \delta & & & \\
& H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_*(f)} H_{n-1}(D) \xrightarrow{H_*(g)} & H_{n-1}(E) & & \\
& & \downarrow \delta & &
\end{array}$$

δ s'appelle le connectant de la suite exacte.

PREUVE : Construisons tout d'abord le morphisme $\delta : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$.

Soit z un n-cycle de E, on désire lui associer un n-cycle x de C et un seul modulo un bord. Comme g_n est surjective il existe $y \in D_n$ tel que $g_n(y) = z$, d'autre part $dy \in D_{n-1}$ et $g_n(dy) = dg_n(y) = dz = 0$, donc, par exactitude $dy \in \ker g_n = \mathrm{Im} f_{n-1}$, il existe donc $x \in C_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(x) = dy$. On pose alors $\delta[z] = [x]$.

Vérifions maintenant que δ est bien défini.
Tout d'abord x est bien un cycle car $f_{n-2}(dx) = df_{n-1}(x) = ddy = 0$, or f_n est injective par exactitude, d'où $dx = 0$.
D'autre part $[x]$ ne dépend pas des choix de z dans $[z]$ ni des éléments y, x qui interviennent dans la construction ci dessus.

En effet soit z', y', x' un autre choix, alors $[z'] = [z], g(y') = z', f(x') = y'$, on te les indices sans crainte de perdre la généralité. donc $\exists z'' \in E$ tel que $z - z' = dz''$ et soit $y'' \in D$ tel que $z'' = g(y'')$, il existe grâce à la surjection de g de l'exactitude. Donc $g(y - y' - dy'') = z - z' - g(dy'') = z - z' - dg(y'') = z - z' - dz = 0''$, en utilisant l'exactitude encore une fois au niveau de D, soit $x'' \in C$ tel que $y - y' - dy'' = f(x'')$, alors $f(x - x' - dx'') = dy - dy' - df(x'') = ddy'' = 0$, or f est injective, d'o $x - x' - dx'' = 0$, et donc $[x] = [x']$.

Vérifions maintenant l'exactitude de la suite au niveau de $H_n(D)$, c'est à dire $\mathrm{Im} H_*(f) = \ker H_*(g)$.

On sait que $H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f)$, et $g \circ f = 0$ d'où $H_*(g) \circ H_*(f) = 0$ et donc $\mathrm{Im} H_*(f) \subset \ker H_*(g)$.

Réciproquement soit y un cycle tel que $[y] \in \ker H_*(g)$, d'où $[g(y)] = H_*(g)(y) = 0$ et donc $g(y)$ est bord, soit $z \in E$ tel que $g(y) = dz$ et soit $y' \in C$ tel que $z = g(y')$, il existe puisque g est surjective, donc $g(y - dy') = 0$, car g commute avec d, d'après l'exactitude $y - dy' \in \mathrm{Im} f$, soit donc $x \in C$ tel que $y - dy' = f(x)$, donc $[y] = [f(x)]$. D'autre part $f(dx) = df(x) = dy - ddy' = 0$ car y cycle, et comme f est injective alors x est un cycle et donc $H_*[x] = [f(x)] = [y]$, d'où $[y] \in \mathrm{Im} H_*(f)$.

Vérifions ensuite l'exactitude au niveau de $H_n(E)$, c'est à dire montrons que $\mathrm{Im} H_*(g) = \ker \delta$.
Si y est un cycle de D, posons $z = g(y)$ et $x \in E$ tel que $[x] = \delta[z]$, donc par construction de δ on a $f(x) = y$ Comme y est un cycle et f injective, d'où $x = 0$ et donc $\delta \circ H_* g([y]) = \delta[g(y)] = \delta[z] = [x] = 0$, d'où $\delta \circ H_*(g) = 0$ et donc $\mathrm{Im} H_*(g) \subset \ker \delta$.

Réciproquement montrons que $\ker \delta \subset \mathrm{Im} H_*(g)$. Soit z un cycle de E tel que $\delta[z] = 0$, $x \in C, y \in D$ construits comme précédemment tels que $z = g(y)$ et $f(x) = dy$ donc $[x] = \delta[z] = 0$, d'où x est un bord, soit $x' \in C$ tel que $x = dx'$ et $y' = y - f(x')$, donc $g(y') = y = z$ car $g \circ f = 0$ en raison de l'exactitude de la suite courte, en plus $dy' = dy - df(x') = df(x) - f(dx') = 0$, donc y' est un cycle de D, donc $H_*(g)[y] = [g(y)] = [z]$, d'où $[z] \in \mathrm{Im} H_*(g)$.

Et de même on vérifie l'exactitude au niveau de $H_n(E)$, c'est à dire montrer que $\mathrm{Im}\delta = \ker H_*(f)$. En effet, avec les notations précédentes

$$H_*(f)(\delta[z]) = H_*(f)[x] = [f(x)] = [dy] = 0$$

VII. Homologie singulière

On se propose dans la suite de construire pour tout espace topologique X, une homologie particulière, $H_*(X; \mathbb{Q})$ dite *homologie singulière* de X à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on appelle *p-simplexe standard*, l'ensemble

$$\Delta_p = \{(t_0, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \text{ tel que } 0 \le t_i \le 1, \sum_{i=0}^{p} t_i = 1\},$$

autrement dit l'enveloppe convexe de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$. On appelle *p-simplexe singulier* de X, toute application continue $\sigma_p : \Delta_p \to X$. On note par $C_p(X)$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré des p-simplexes singuliers, ses éléments sont de la forme $\sigma = \sum_{\text{fini}} n_\alpha \sigma_{\alpha,p}$ (où $n_\alpha \in \mathbb{Q}$) et sont appelés des *p-chaînes singulières*. Le *morphisme de bord* $d : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ est défini par les relations

$$d_i \sigma_{\alpha,p}(t_0, \ldots, t_{p-1}) = \sigma_{\alpha,p}(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{p-1})$$
$$d\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i d_i \sigma$$

On vérifie (laissé au lecteur acharné) que $d^2 = d \circ d = 0$. On obtient ainsi le complexe de chaînes (C, d), dont l'homologie associée $H_*(C, d)$ est appelée homologie singulière de X et notée $H_*(X,\mathbb{Q})$

$$H_*(X,\mathbb{Q}) := H_*(C,d)$$

Cas particulier $X = \{x\}$: Le seul p-simplexe possible est l'application constante $\sigma_p : \Delta_p \to \{x\}$, ainsi $C_p(X) = \mathbb{Q}$ et $d_i\sigma_p = \sigma_{p-1}$ et

$$d\sigma = \left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\right)\sigma_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ pair} \\ \sigma_{p-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le complexe de chaînes singulières est alors

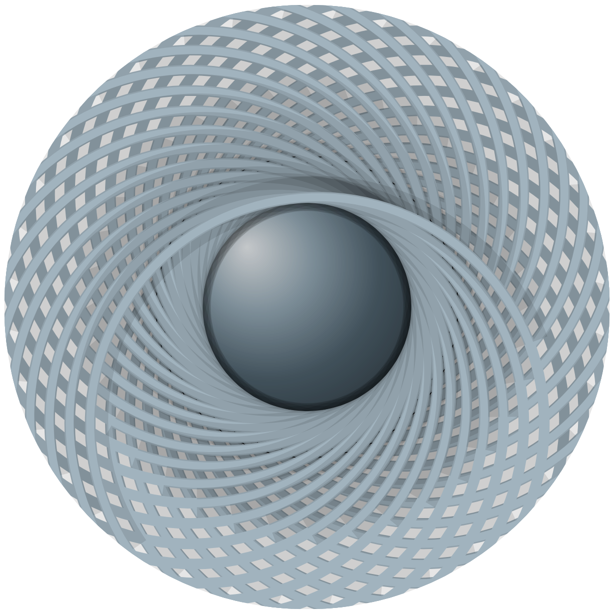
$$\mathbb{Q} \xleftarrow{0} \mathbb{Q} \xleftarrow{id} \mathbb{Q} \xleftarrow{0} \mathbb{Q} \cdots$$

et l'homologie singulière est alors

$$H_n(\{x\},d) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remerciements : Okacha Diyer, professeur agrégé en mathématiques, enseignant aux CPGE Omar Ibn Abdelaziz, Oujda, pour la deuxième lecture.

❑



« Complément de cours »

Fonctions de Bessel

par Mimoun Taibi

Lycée Moulay Youssef – Rabat

L'une des catégories de fonctions spéciales est celle des fonctions de Bessel. Celles-ci jouent un rôle important dans les applications notamment dans les problèmes physiques présentant une symétrie cylindrique. C'est pourquoi on appelle parfois ces fonctions, fonctions cylidriques.

I. Introduction

L'équation différentielle linéaire du 2ème ordre :

$$(1) \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \lambda^2)y = 0$$

dite équation de *Bessel* d'indice $\lambda \in \mathbb{R}^+$, sert de définition des fonctions de *Bessel*. Dans ce thème on va étudier quelques propriétés des fonctions de Bessel de premières espèces.

II. Résolution de l'équation de Bessel

L'équation différentielle (1) est du type : (2) $x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$ où p et

q sont des fonctions développables en série entière autour de zéro (*ie* pour $|x| < r$ où $r > 0$).
On peut utiliser la méthode dite de FRÔBENUS [1] pour déterminer une solution $\varphi_1 : x \mapsto |x|^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_0 \neq 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

> LEMME 3.1 : Si f est une solution de l'équation de Bessel, définie à droite de 0, alors la fonction $x \mapsto f(-x)$ est aussi une solution de l'équation (1), définie à gauche de 0.

Par le lemme 3.1, on peut se limiter aux x strictement positifs.
Si la série entière $[\sum_{n\geq 0} a_n x^n]$ a un rayon de convergence $r > 0$, on a alors :

$$(3)\ \forall x \in]0;r[,\ \begin{cases} \varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\beta} \\ \varphi_1'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\beta) a_n x^{n+\beta-1} \\ \varphi_1''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\beta)(n\beta-1) a_n x^{n+\beta-2} \end{cases}$$

En reportant (3) dans (1) on obtient pour pout $x \in]0, r[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+\beta)(n+\beta-1)a_n + (n+\beta)a_n - \lambda^2 a_n\right) x^{n+\beta-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\beta} = 0$$

soit : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+\beta)^2 - \lambda^2\right) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0$. D'où :

$$(4)\quad \begin{cases} (\beta^2 - \lambda^2) a_0 = 0 \\ \left((1+\beta)^2 - \lambda^2\right) a_1 = 0 \\ \left((2+\beta)^2 - \lambda^2\right) a_2 + a_0 = 0 \\ \vdots \\ \left((n+\beta)^2 - \lambda^2\right) a_n + a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Si l'on impose à a_0 d'être différent de zéro, alors β vérifie : $\beta^2 - \lambda^2 = 0$, donc $\beta = \pm\lambda$.
Si l'on suppose $\beta = \lambda$, on trouve $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{2^{2p} p!(\lambda+1)\ldots(\lambda+p)}$ et $a_{2p+1} = 0$, $p \in \mathbb{N}$, ainsi la série entière obtenue est de rayon de convergence $r = +\infty$ et la fonction $\varphi_1 : x \mapsto a_0 x^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n} n!(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} x^{2n}$ est solution de l'équation différentielle de Besssel.
Posons pour simplifier $a_0 = \dfrac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$, Γ étant la fonction *Gamma* d'Euler, on obtient une solution (fonction de Bessel d'indice λ) :

$$J_\lambda : x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\lambda+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, x > 0.$$

Si $\beta = -\lambda$, on a par (4) :

$$(5)\quad \begin{cases} 4(1-\lambda) a_2 + a_0 = 0 \\ 8(2-\lambda) a_4 + a_2 = 0 \\ \vdots \\ 4n(n-\lambda) a_{2n} + a_{2n-2} = 0 \end{cases}$$

. Si $\lambda \in \mathbb{N}^*$ le système ne donne rien. Si $\lambda \notin \mathbb{N}$, on fait apparaitre la fonction (de Bessel d'indice $-\lambda$) :
$J_{-\lambda} : x \mapsto \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\lambda+n+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}$, $x > 0$ qui est aussi solution de l'équation différentielle (1).

> LEMME 3.2 : Au voisinage de 0^+, on a :

[1] Pour obtenir une solution particulière de l'équation (2) de la forme : $x \mapsto |x|^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_0 \neq 0$...,
Soient s_1 et s_2 les racines de l'équation $s(s-1) + p(0)s + q(0) = 0$.
On suppose s_1 et s_2 réels et $s_1 \geq s_2$. L'équation différentielle (2) possède une solution sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ de la forme : $J_{s_1} : x \mapsto |x|^{s_1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 \neq 0$ où la série converge pour $|x| < r$. Si $s_1 - s_2 \notin \mathbb{N}$, l'équation (2) possède une 2^{nd} solution linéairement indépendante de J_{s_1}, de la forme : $J_{s_2} : x \mapsto |x|^{s_2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, $b_0 \neq 0$, où la série converge pour $|x| < r$. Si $s_1 - s_2 \in \mathbb{N}$, l'équation (2) possède une seconde solution indépendante de J_{s_1}, de la forme $J_{s_2} : x \mapsto c J_{s_1}(x) \ln(|x|) + |x|^{s_2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, $b_0 \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$, où la série converge pour $|x| < r$. Pour l'équation différentielle de Bessel (1), $s_1 = \lambda$ et $s_2 = -\lambda$, donc $s_1 - s_2 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.

(6) $$\begin{cases} J_\lambda(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^\lambda \dfrac{1}{\Gamma(\lambda+1)} + \mathcal{O}(x^{\lambda+2}) \\ J_{-\lambda}(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\lambda} \dfrac{1}{\Gamma(-\lambda+1)} + \mathcal{O}(x^{-\lambda+2}) \end{cases}$$

Le lemme 3.2 montre que, la fonction J_λ est borné au voisinage de zéro et $J_{-\lambda}$ ne l'est pas.
Pour λ non entier, les fonctions J_λ et $J_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes, en effef : Si α et β sont deux scalaires non tous nuls tels que :
(7) $\forall x > 0,\ \alpha J_\lambda(x) + \beta J_{-\lambda}(x) = 0$. Par le lemme 2, les fonctions J_λ et $J_{-\lambda}$ ne s'annulent pas sur un voisinage de zéro, donc par (7), α et β sont non nuls. (6) et(7) montrent que : $0 = \alpha J_\lambda(x) + \beta J_{-\lambda}(x) \sim_{x\to 0^+} \alpha \left(\dfrac{x}{2}\right)^\lambda \dfrac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$ ce qui ne peut se produire.

THÉORÈME 3.1 : Si $\lambda \notin \mathbb{N}$, l'équation différentielle (1) admet $(J_\lambda, J_{-\lambda})$ comme système fondamental de solutions.

REMARQUES

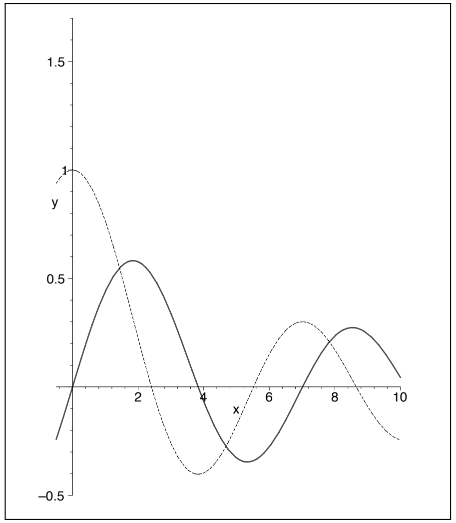
1. Lorsque $\lambda \notin \mathbb{N}$, toute solution de l'équation (1) s'écrit :
$f = \alpha J_\lambda + \beta J_{-\lambda}$ et f est donc bornée autour de zéro si et seulement si $\beta = 0$ *ssi* $f = \alpha J_\lambda$.
2. Pour $\lambda > 0$, on définit sur $\mathbb{C}$, J_λ par :
$$J_\lambda(z) = \mid z \mid^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\lambda+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$
dite fonction de Bessel de première espèce.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\begin{cases} J_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \\ J_{-n}(z) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k} \end{cases}$ On a donc : $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$

THÉORÈME 3.2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\begin{cases} J_{\lambda-1}(x) + J_{\lambda+1}(x) = \dfrac{2\lambda}{x} J_\lambda(x) & (9) \\ J_{\lambda-1}(x) - J_{\lambda+1}(x) = 2J'_\lambda(x) & (10) \end{cases}$$

LEMME 3.3 : Pour tout $x > 0$, on a :
$$\begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\dfrac{2}{\pi.x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(x) & (11) \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\dfrac{2}{\pi.x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(x) & (12) \end{cases}$$

PREUVE : On sait que pour tout réel $k \notin \mathbb{Z}_-$, on a : $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$ et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
Donc $\Gamma(\frac{1}{2}+k+1) = (\frac{1}{2}+k)(\frac{1}{2}+k-1)...(\frac{3}{2}).\sqrt{\pi} = \dfrac{(2k+1)!}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi}$ lorsque $k \in \mathbb{N}$ et puis :
$J_{\frac{1}{2}}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\frac{1}{2}+2k}}{k!\Gamma(k+3/2)} = \frac{(x/2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} . \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi.x}} \sin(x)$.
Même raisonnement pour $J_{-\frac{1}{2}}(x)$...

THÉORÈME 3.3 : Pour tout réel $x > 0$, on a :
$$\begin{cases} J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi.x}} \left(S_1.\sin(x - \dfrac{n\pi}{2}) + S_2.\cos(x - \dfrac{n\pi}{2})\right) \\ J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi.x}} \left(S_1.\cos(x - \dfrac{n\pi}{2}) - S_2.\sin(x - \dfrac{n\pi}{2})\right) \end{cases}$$
où $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (n+2k)!}{(2k)!(n-2k)!(2x)^{2k}}$, $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (n+2k+1)!}{(2k)!(n-2k-1)!(2x)^{2k+1}}$.



Courbes de J_0 et de J_1

THÉORÈME 3.4 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction de la variable réelle $\theta : \theta \mapsto e^{iz.\sin(\theta)}$ est développable en série de Fourier, et on a :

$$e^{iz.\sin(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z).e^{in\theta} \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}$$

REMARQUES [2]

1. Si l'on prend $z \in \mathbb{R}$, on obtient en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \cos(z.\sin(\theta)) = J_0(z) + 2.\sum_{n=0}^{+\infty} J_{2n}(z)\cos(2n\theta) \\ \sin(z.\sin(\theta)) = 2.\sum_{n=0}^{+\infty} J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\theta \end{cases}$$

[2] On peut aussi avoir une représentaion intégrale de $J_n(z)$. La relation : $1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(z)|^2$ se déduit par la formule de Parseval.

III. Zéros de la fonction de Bessel de 1ère espèce

On montre dans cette partie que la fonction de Bessel d'indice λ, J_λ ($\lambda \geq 0$) admet une infinité de zéros isolés. Si l'on note $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, la suite croissante des zéros de J_λ, on vérifira que $\alpha_n \underset{n\infty}{\rightarrow} +\infty$ et que d'autre part $|\ \alpha_{n+1} - \alpha_n\ | < \pi$ pour $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Pour cela nous aurons besoin de quelques résultats relatifs aux équations différentielles linéaires homogènes du 2^{nd} ordre.

III.1 Wronskien

Soit I un intervalle non triviale de $\mathbb{R}$ et $\varphi,\ \psi \in D(I, \mathbb{C}\ )$.

DÉFINITION 3.1 : Le Wronskien de φ et ψ est la fonction $W : I \to \mathbb{C}$,telle que :

$$\forall x \in I,\quad W(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix} = \varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x).$$

III.2 Lemme

LEMME 3.4 : Soit a, b deux fonctions continues sur un intervalle I de R , φ et ψ deux solutions sur I de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(*) \qquad\qquad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

alors : (φ, ψ) est un système fondamental de solutions de (*) si et seulement si le Wronskien de φ et ψ ne s'annule pas sur I.

Exemple

On a : $\forall x > 0,\ J_\lambda(x)J'_{-\lambda}(x) - J'_\lambda(x)J_{-\lambda}(x) = \dfrac{2.\sin(\lambda\pi)}{\pi.x}$ [3]

Donc pour λ non entier J_λ et $J_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes.

[3] On utilise, pour démontrer la relation ([3]) , le résultat suivant : $\dfrac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)} = \dfrac{\sin(\lambda.\pi)}{\pi}$.

III.3 Transformation de Liouville

Lemme 3.5 : Toute équation différentielle homogène, linéaire du 2^{nd} ordre : $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ où a et b sont des fonctions de classe C^2, se transforme en : $z'' + q(x)z = 0$.

Une idée de la démonstration est de poser pour tout x :

$$y(x) = z(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right)$$

et reporter dans la $1^{ère}$ équation pour obtenir : $q(x) = b(x) - \frac{a^2(x)}{4} - \frac{a'(x)}{2}$.

REMARQUES

1. Les fonctions y et z ont exactement les mêmes zéros.
2. L'équation de Bessel se transforme, en posant pour $x > 0$, $y(x) = z(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t}dt\right) = z(x).\frac{1}{\sqrt{x}}$,

en :
$$z'' + \left(1 + \frac{1-4\lambda^2}{4x^2}\right)z = 0 \qquad (**)$$

III.4 Etude des zéros de la fonction de Bessel

on se donne deux équations linéaires et homogènes :

$$\begin{cases} z'' + q_1(x)z = 0 & (\alpha) \\ z'' + q_2(x)z = 0 & (\beta) \end{cases}$$

où q_1 et q_2 sont deux fonctions continues sur un intervalle I et vérifiant : $\forall x \in I$, $q_1(x) < q_2(x)$ et soient φ_1 et φ_2 deux solutions, non nulles sur I, des équations (α) et (β) respéctivement. On a alors le :

Lemme 3.6 : Si x_1 et x_2 sont deux racines consécutives de φ_1, alors φ_2 s'annule au moins une fois sur $]x_1, x_2[$.

PREUVE : Supposons φ_2 ne s'annule pas sur $]x_1, x_2[$, quitte à changer les fonctions en leurs opposées, qui sont aussi solutions des mêmes équations, on peut supposer que φ_1 et φ_2 sont strictement positives sur $]x_1, x_2[$, alors : φ_1 s'annule en x_1 et est strictement positve à droite de x_1, donc $\varphi_1'(x_1)$ est positif. De même $\varphi_1'(x_2)$ est négatif. Il en résulte que $W = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$ est ≤ 0 en x_1 et ≥ 0 en x_2. D'autre part W est dérivable et on a : $\forall x \in]x_1, x_2[$, $W'(x) = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)(q_1(x) - q_2(x)) < 0$. La fonction W est strictement décroissante sur $]x_1, x_2[$ ce qui est contradictoire.

Corollaire 3.0.1 : Si x_1 et x_2 sont deux zéros consécutifs de φ_2, alors φ_1 s'annule au moins une fois sur $]x_1, x_2[$.

Théorème 3.5 : (Zéros de la fonction de Bessel d'indice $\lambda \ge 0$).

1. Pour $\lambda \ge 0$, la fonction J_λ admet une infinité de zéros isolés.
2. Si $(\alpha_n)_N$ est la suite croissante des zéros de J_λ , on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$
3. Pour $\lambda \ge \frac{1}{2}$, les zéros sont distants d'au moins π.

PREUVE : L'équation différentielle de Bessel se transforme, d'après le lemme 5, en :

$$z'' + (1 + \frac{1-4\lambda^2}{4x^2})z = 0$$

Soit l'équation différentielle : $\forall x > 0$, $z''(x) + z(x) = 0$.

Supposons $0 \le \lambda < \frac{1}{2}$, nous avons : $\forall x > 0$, $1 + \frac{1-4\lambda^2}{4x^2} > 1$. Donc d'après le lemme , entre deux zéros consécutifs de la fonction *sinus*, il y'a au moins un zéro de J_λ .[4]

Si $\lambda > \frac{1}{2}$, on peut voir facilement que les zéros de J_λ sont distants d'au moins π.

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on a $J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi.x}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(x)$ pour tout $x > 0$, donc les zéros de $J_{\frac{1}{2}}$ sont ceux de *sinus*...

[4] Les zéros d'une solution non nulle d'une équation différentielle linéaire homogène de 2^{nd} ordre sont toujours isolés (résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz)

IV. Orthogonalité des fonctions de Bessel

LEMME 3.7 : Si α et β sont des réels stictement positifs, alors :

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^1 J_\lambda(\alpha t)J_\lambda(\beta t)dt = \alpha J'_\lambda(\alpha)J_\lambda(\beta)-\beta J_\lambda(\alpha)J'_\lambda(\beta)$$

PREUVE : Posons $y_1(t)=J_\lambda(\alpha t)$ et $y_2(t)=J_\lambda(\beta t)$ pour tout $t>0$, alors y_1 et y_2 sont respectivement solutions sur $]0,+\infty[$ des équations différentielles :
$y''+\frac{1}{t}y'+(\alpha^2-\frac{\lambda^2}{t^2})y=0$ et $y''+\frac{1}{t}y'+(\beta^2-\frac{\lambda^2}{t^2})y=0.$
Si l'on pose $w(t)=y_1'(t)y_2(t)-y_1(t)y_2'(t)$ pour tout $t>0$, on a alors :
$w'+\frac{1}{t}w=(\beta^2-\alpha^2)y_1y_2$, soit : $tw'+w=t.(\beta^2-\alpha^2)y_1y_2$. D'où $\frac{d}{dt}(t.w)=t.(\beta^2-\alpha^2)y_1y_2$.
Par une intégration sur $]0,1]$, il vient : $[tw(t)]_0^1=(\beta^2-\alpha^2)\int_0^1 t.y_1(t)y_2(t)dt$, ce qui montre le lemme.

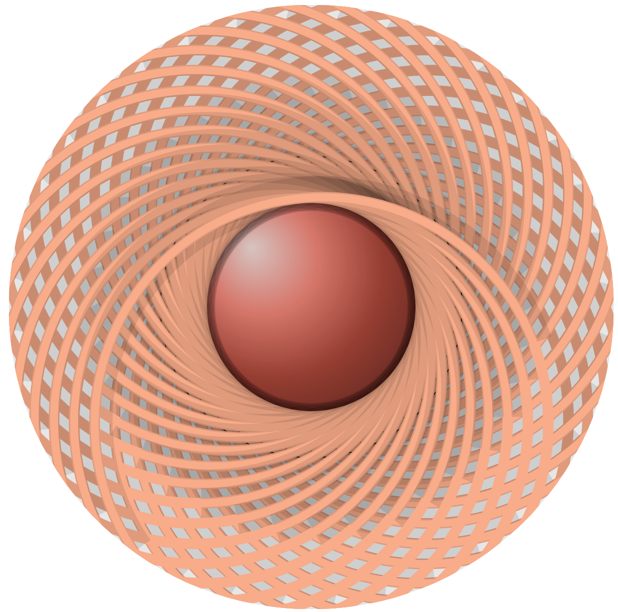
COROLLAIRE 3.0.2 : Soient α , $\beta\in]0;+\infty[$ deux zéros distincts de J_λ , alors :

$$\int_0^1 t.J_\lambda(\alpha t)J_\lambda(\beta t)dt=0$$

Notons $E=\{f\in\mathcal{C}(]0;1],\mathbb{R})\ /\ t\mapsto t.f^2(t)$ est intégrable sur $]0,1]\}$. E est alors un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour $(f,g)\in E$, posons $<f,g>=\int_0^1 t.f(t)g(t)dt$, $<.,.>$ définit alors un produit scalaire sur E [5]

THÉORÈME 3.6 : Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la famille des zéros positifs de J_λ , alors la famille $(t\mapsto J_\lambda(\alpha_k t))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale dans $(E,<.,.>)$.

❑



[5] Si $f,g\in E$, et $\varepsilon\in]0;1[$, on a : $\left|\int_\varepsilon^1 f(t)g(t).tdt\right|\le\int_\varepsilon^1|f(t)||g(t)|.tdt$
$\le\left(\int_\varepsilon^1 f^2(t).tdt\right)^{\frac12}\left(\int_\varepsilon^1 g^2(t).tdt\right)^{\frac12}\le\left(\int_0^1 f^2(t).tdt\right)^{\frac12}\left(\int_0^1 g^2(t).tdt\right)^{\frac12}$

L'application $F:\varepsilon\mapsto\int_\varepsilon^1|f(t)g(t)|.tdt$ est monotone bornée sur$]0;1]$, donc admet une limite finie quand $\varepsilon\to0^+$ et par suite $\int_0^1 f(t)g(t)tdt$ est absolument convergente.

Un aperçu sur la théorie de Cauchy

Pour l'enseignement des fonctions de la variable complexe, deux approches sont en général utilisées. La première qui repose sur les acquis des classes de premier cycle universitaire, utilise des notions telles que les résultats de base de la topologie et du calcul différentiel, les séries entières et (surtout) les séries de Fourier, les intégrales curvilignes ...L'autre plus élaborée est une discipline à part entière qui définit ses propres outils et qu'on appelle théorie de Cauchy ou dans un cadre plus large analyse complexe.

La théorie de Cauchy commence par définir l'intégrale d'une fonction continue f le long d'un chemin de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ par

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \gamma'(t) f(\gamma(t))\mathrm{d}t$$

qui s'apparente à une intégrale curviligne. Il est alors notable que si γ est un chemin fermé ($\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$) et $\gamma^* = \gamma([\alpha, \beta])$ alors la fonction

$$\mathrm{Ind}_\gamma : z \longmapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

est constante de valeur entière sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. La valeur en un point z de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ étant "le nombre de tours qu'on effectue en parcourant γ autour de z", (le lecteur pourra effectuer les calculs dans le cas où γ est un cercle centré en 0 pour vérification). On arrive alors au résultat fondateur de la théorie et qui dit que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, où Ω est un ouvert convexe (en fait simplement connexe[a]) alors pour tout chemin de classe $\mathcal{C}^1$ γ dont le support γ^* et inclu dans Ω et pou tout $z \in \Omega \setminus \gamma^*$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z)$$

Ce résultat portant le nom de Formule intégrale de Cauchy, fait déjà entrevoir que les valeurs que prend f en des points z à l'intérieur de γ^* ne dépendent que celles prises par f sur γ^*. Cette formule sert à démontrer qu'une fonction holomorphe est analytique, théorème fondamental de l'analyse complexe.

[a]Un ouvert de $\mathbb{C}$ est dit simplement connexe si (grossièrement) il ne contient pas de "trous"

« Cours »

Fonctions holomorphes

par Sadik Boujaida

Lycée Moulay Youssef – Rabat

Un cours sur les fonctions holomorphes, notion récemment introduite dans le programme marocain. Il existe encore peu de documents (cours et exercices) qui soient vraiment adaptés aux directives du programme. Un effort a donc été fait pour que les différentes notions abordées s'intègrent bien dans le reste du programme, en utilise les résultats, et les étend parfois.

Dans ce cours Ω désignera un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Si z_0 est un complexe et r est réel strictement positif, $D(z_0, R)$ désignera le disque *ouvert* de $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon r.
L'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x + iy \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de Ω par l'application linéaire, et donc continue, $(x, y) \longmapsto x + iy$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ peut être confondue avec la fonction $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \longmapsto f(x + iy)$, on notera en particulier, lorsque $z = x + iy$

$$\mathrm{d}f(z)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(z) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

respectivement la différentielle et les dérivées partielles de la fonctions $\widetilde{f}$ au point (x, y).

On adoptera les notations du calcul différentiel. Si f est différentiable en $z_0 \in \Omega$ alors $\mathrm{d}f(z_0).h$ désignera la différentielle de f en z_0 appliquée au vecteur h ; et se référant à la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ on peut donc écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \mathrm{d}f(z_0).1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \mathrm{d}f(z_0).i$$

I. Rappels de calcul différentiel

Soient p, n et m des enties naturels non nuls, U et V des ouverts respectifs de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^n$. Et soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1. On considère deux fonctions

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ t \longmapsto \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_m(t)\big)$$

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^p,\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \longmapsto f(x)$$

On suppose que $\varphi(I) \subset V$.

Si φ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leurs domaines de définitions respectifs, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$

$$\big(f \circ \varphi\big)'(t) = \mathrm{d}f\big(\varphi(t)\big).\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\varphi(t)\big)\varphi_k'(t)$$

2. Soient maintenant des fonctions

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ x \longmapsto \big(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\big)$$

$$g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p,\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \longmapsto g(y)$$

On suppose que $f(U) \subset V$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et g l'est sur V alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et pour tout $x \in U$ et pour tout $k \in [[1, n]]$

$$\mathrm{d}\big(g \circ f\big)(x) = \mathrm{d}g\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x)$$

$$\frac{\partial\big(g \circ f\big)}{\partial x_k}(x) = \mathrm{d}g\big(f(x)\big).\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}\big(f(x)\big)\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)$$

II. Fonctions holomorphes

II.1 Définitions, condition de Cauchy – Riemann

Définition 4.1 : Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si la fonction :

$$z \longmapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},\ z \in \Omega \backslash \{z_0\}$$

admet une limite dans $\mathbb{C}$ en z_0. cette limite est alors notée $f'(z_0)$.

2. On dit que f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω est sa fonction dérivée $f' : z \longmapsto f'(z)$ est continue sur Ω.

Théorème 4.1 : Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. soit $z_0 \in \Omega$. f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est différentiable en } z_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) \text{ (Condition de Cauchy--Riemann)} \end{cases}$$

2. f est holomorphe sur Ω si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega \text{ (en tant que fct des 2 variables } x \text{ et } y) \\ \forall z \in \Omega,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) \end{cases}$$

Preuve :

1.⇒/ Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ voisin de 0,

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = hf'(z_0) + o(|h|)$$

par définition même de $f'(z_0)$.

Donc f est différentiable en z_0 et pour tout $h \in \mathbb{C}$, $\mathrm{d}f(z_0).h = hf'(z_0)$.

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \mathrm{d}f(z_0).1 = f'(z_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \mathrm{d}f(z_0).i = if'(z_0)$.

On a bien $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

$\Leftarrow$/ Si maintenant f est différentiable en z_0 et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$. On a pour tout $h = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ voisin de 0

$$\begin{aligned} f(z_0+h) - f(z_0) &= \mathrm{d}f(z_0).(h) + o(|h|) \\ &= \alpha\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) + o(|h|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(\alpha + i\beta) + o(|h|) \\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + o(|h|) \end{aligned}$$

Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

2.$\Rightarrow$/ Si f est holomorphe sur Ω, alors d'après 1. f est différentiable en tout point de Ω et pour tout $z \in \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = f'(z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = if'(z)$. f' étant continue, les dérivées partielles de f sont donc continues. f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

$\Leftarrow$/ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie les conditions de Cauchy--Riemann, alors d'après 1. f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω, et l'égalité $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z)$ indique que f' est continue sur Ω. Alors f est holomorphe sur Ω.

REMARQUES

1. **À retenir :** Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z alors

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z)$$
$$\forall h \in \mathbb{C},\ \mathrm{d}f(z).h = hf'(z)$$

2. Nous verrons qu'une fonction holomorphe sur Ω est en fait ``de classe $\mathcal{C}^\infty$'' sur Ω (et même plus, elle est analytique sur Ω).
3. En posant $z = x + iy$, un procédé de calcul familier chez le voisin physicien (pas complètement faux d'ailleurs ...) permettrait d'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{\partial x}{\partial \bar z}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar z}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

La condition de Cauchy--Riemann serait alors équivalente à : $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$.

Intuitivement l'holomorphie de f signifierait alors que $f(z)$ ne dépend pas de $\bar z$.

On voit ainsi, par exemple, que les fonctions $z \longmapsto \bar z$, $z \longmapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \longmapsto \mathrm{Im}(z)$, $z \longmapsto |z|$ ne sont holomorphes sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 4.1 : Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On note P et Q les parties réelle et imaginaire de f.

$$\forall z \in \Omega,\ f(z) = P(z) + iQ(z)$$

1. f est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $z_0 \in \Omega$ si et seulement si

$$\begin{cases} P \text{ et } Q \text{ sont de différentiables en } z_0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(z_0) \ \text{ et } \ \dfrac{\partial Q}{\partial y}(z_0) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(z_0) \end{cases}$$

2. f est holomorphe sur Ω si et seulement si

$$\begin{cases} P \text{ et } Q \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \ \text{ et } \ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x} \end{cases}$$

PREUVE : f est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$, et la condition de Cauchy--Riemann $\dfrac{\partial f}{\partial y} = i\dfrac{\partial f}{\partial x}$, soit $\dfrac{\partial P}{\partial y} + i\dfrac{\partial Q}{\partial y} = i\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, et equivalente à $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$

REMARQUES

1. Si f est holomorphe sur Ω alors la matrice jacobienne de f et son jacobien en un point $z \in \Omega$ dans la base $(1, i)$ sont

$$Jf(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(z) & -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(z) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(z) & \dfrac{\partial P}{\partial x}(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad jac\, f(z) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(z)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(z)\right)^2$$

Noter que : $f'(z) = 0 \Longleftrightarrow jac\, f(z) = 0$.

Noter aussi que $jac\, f(z) = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x}(z)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial P}{\partial y}(z)\right)^2 = \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}P(z)\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}Q(z)\right\|^2$

et donc que si jamais $\overrightarrow{\mathrm{grad}}P$ (ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}Q$) est partout nul sur Ω alors f' est nulle sur Ω.

2. **Interprétation géometrique de L'holomorphie**

Une fonction holomorphe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (au sens différentiel) et pour tout $z \in \Omega$

$$\forall h \in \mathbb{C},\ \mathrm{d}f(z).h = hf'(z)$$

Si $f'(z) \neq 0$, $df(z)$ est la similitude vectorielle directe du plan complexe de rapport $|f'(z)|$ et d'angle $\operatorname{Arg}(f'(z))$.
Géométriquement, les similitudes conservant les angles, cela signifie que si Γ_1 et Γ_2 sont deux arcs de classe $\mathcal{C}^1$ contenus dans Ω et qui se coupent en un point z alors $f(\Gamma_1)$ et $f(\Gamma_2)$ sont des arcs de classe $\mathcal{C}^1$ contenus dans $f(\Omega)$ et qui se coupent en $f(z)$ selon le même angle que Γ_1 et Γ_2, puisque les tangentes en $f(z)$ à $f(\Gamma_1)$ et à $f(\Gamma_2)$ sont les images par la similitude $df(z)$ des tangentes respectives en z à Γ_1 et à Γ_2.

EXERCICE 4.1 On suppose que l'ouvert Ω est convexe (voire connexe par arcs).

1. Montrer qu'une fonction holomorphe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante si et seulement si $f' = 0$.
2. Montrer qu'une fonction holomorphe à valeurs réelle est forcément constante. Même chose si elle est valeurs imaginaires pures.

EXERCICE 4.2 Déterminer toutes les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $\forall z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}(f(z)) = x^2 - y^2$.

EXERCICE 4.3 Soit g une fonction polynomiale des variables x et y à coefficients dans $\mathbb{C}$.

$$g(x,y) = \sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n} a_{p,q} x^p y^q$$

Montrer que la fonction $f : z = x + iy \longmapsto g(x,y)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = P(z)$.

PROPRIÉTÉS

Soient deux fonctions $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Si f et g sont holomorphes alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f + \lambda g$ est holomorphe sur Ω et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$

2. Si f et g sont holomorphes sur Ω alors fg est holomorphe sur Ω et
$$(fg)' = f'g + fg'$$

3. On suppose que g ne s'annule pas sur Ω. Si f et g sont holomorphes sur Ω alors $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe sur Ω et
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
En particulier $\dfrac{1}{g}$ est holomorphe sur Ω et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

PREUVE : Dû à la définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilté à l'aide de limites, toutes les démonstrations se feront de la même façon que pour les fonctions numériques d'une variable réelle de classe $\mathcal{C}^1$.

REMARQUES

1. On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.
   Les propriétés 1. et 2. impliquent que $\mathcal{O}(\Omega)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathbb{C}^\Omega$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$.
2. Une récurrence simple permettra de justifier que si f est holomorphe, la fonction f^p est holomorphe pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $(f^p)' = pf'f^{p-1}$.
   Attention, on ne parle pas impunément de la fonction f^α, si α est un réel donné.

PROPOSITION 4.2 : Soit Δ un autre ouvert de $\mathbb{C}$. Soit des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(\Omega) \subset \Delta$. Si f est holomorphe sur Ω et g est holomorphe sur Δ alors $g \circ f$ est holomorphe sur Ω et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$

PREUVE : D'après le théorème sur la condition de Cauchy--Riemann, f et g seraient de classe $\mathcal{C}^1$, donc $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $z \in \Omega$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(z) = dg(f(z)).\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \times g'(f(z)) = f'(z) \times g'(f(z))$$

de même $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial y}(z) = g'(f(z)) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = if'(z) \times g'(f(z))$.

On a bien $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial y}(z) = i\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(z)$.

Ainsi $g \circ f$ est holomorphe sur Ω et pour tout $z \in \Omega$
$$(g \circ f)'(z) = \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(z) = f'(z) \times g'(f(z))$$

EXERCICE 4.4 (*Inégalité des accroissements finis.*) On suppose que Ω est convexe. Soit une fonction f holomorphe sur Ω. Montrer que pour tous $(a,b)\in\Omega^2$, $|f(b)-f(a)|\leqslant|b-a|\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|$

II.2 Exemples fondamentaux

Exemple 1 : *Toute fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$ est holomorphe.*

En effet la fonction $z\longmapsto z$ est trivialement holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée constante de valeur 1. Donc pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ la fonction $z\longmapsto z^k$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée la fonction $z\longmapsto kz^{k-1}$.

Soit alors $P : z\longmapsto \sum\limits_{k=0}^{p} a_k z^k$ une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$. P, comme combinaison linéaire de fonctions holomorphes, est holomorphe de dérivée la fonction $P' : z\longmapsto \sum\limits_{k=1}^{p} k a_k z^{k-1}$.

Exemple 2 : *La fonction exponentielle*

En considérant la définition trigonométrique de la fonction exponentielle :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \exp(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

exp est de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(e^z)=e^x(\cos y+i\sin y) &= e^z\\ \frac{\partial}{\partial y}(e^z)=e^x(-\sin y+i\cos y)=ie^x(\cos y+i\sin y) &= ie^z\end{aligned}$$

La condition de Cauchy--Riemann est bien remplie : exp est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\exp'=\exp$.

Soit $\gamma\in\mathbb{C}$, la fonction $f_\gamma : z\longmapsto e^{\gamma z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, comme composée de fonctions holomorphes et $f'_\gamma(z)=\gamma e^{\gamma z}$

Soit maintenant $t\in\mathbb{R}_+^*$, on pose pour tout $z\in\mathbb{C}$, $g(z)=t^z\overset{\text{def}}{=}e^{z\ln t}$.

g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ est $g'(z)=\ln(t)e^{z\ln t}=\ln(t)t^z$.

N.B : Si $z\in\mathbb{C}$ alors $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$ et donc $|t^z|=t^{\mathrm{Re}(z)}$

Exemple 3 : *Fonctions trigonométriques*

On pose pour tout $z\in\mathbb{C}$

$$\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\ \text{ et }\ \sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$$

Les fonctions $z\longmapsto e^{iz}$ et $z\longmapsto e^{-iz}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ comme composition de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, donc cos et sin sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$

$$\cos' z=\frac{1}{2}\left(ie^{iz}-ie^{iz}\right)=-\sin z \text{ et } \sin' z=\cos z$$

Exemple 4 : *Logarithme complexe*

On se propose ici de prolonger la fonction ln sur un ouvert "maximal" Ω de $\mathbb{C}$, en une fonction holomorphe, tout en conservant la propriété : $\forall z\in\Omega,\ e^{\ln z}=z$.

Analyse algébrique : Notons que si $z\in\mathbb{C}^*$ et $\omega\in\mathbb{C}$, (e^ω ne peut être nul puisque $|e^\omega|=e^{\mathrm{Re}(\omega)}>0$)

$$\begin{aligned}e^\omega=z &\iff |e^\omega|=|z| \text{ et } \arg(e^\omega)=\arg(z)\quad[2\pi]\\ &\iff e^{\mathrm{Re}(\omega)}=|z| \text{ et } \mathrm{Im}(\omega)=\arg(z)\quad[2\pi]\\ &\iff \mathrm{Re}(\omega)=\ln|z| \text{ et } \mathrm{Im}(\omega)=\arg(z)\quad[2\pi]\\ &\iff \omega=\ln|z|+i\arg(z)\quad[2\pi]\end{aligned}$$

On peut constater dès lors qu'une définition analytique de $\ln(z)$ reposera entièrement sur une bonne définition de $\arg(z)$, et que déjà il est possible de donner plusieurs définition à $\ln(z)$ selon la détermination de $\arg(z)$ qu'on choisira (le modulo 2π).

Construction analytique : Soit maintenant $z\in\mathbb{C}^*$ et posons $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On pose aussi $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ et soit θ la détermination de $\mathrm{Arg}(z)$ qui se trouve dans l'intervalle $[-\pi,\pi[$.

On a alors sous caution :

$$\frac{y}{x+r}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}=\frac{2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}=\tan(\theta/2)$$

Sous caution parce que si $y=0$ et $x\leq 0$ le quotient $y/(x+r)$ serait indéterminé. On pose alors $\Omega=\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Dans ce cas θ serait pris dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$ ce qui règle aussi le problème de définition de $\tan(\theta/2)$ et même de faire jouer arctan. Ayant $\theta/2\in]-\pi/2,\pi/2[$ la dernière égalité est équivalente à

$$\theta=2\arctan\left(\frac{y}{x+r}\right)$$

On pose maintenant
$$\forall z = x + iy \in \Omega,\ f(z) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + 2i\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$
ou encore : $\forall z \in \Omega,\ f(z) = \ln|z| + i\arg(z)$.
$\arg(z)$ étant ici la détermination de l'argument de z dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω car ses parties réelle et imaginaire le sont. On dérive partiellement l'égalité $e^{f(z)} = z$ par rapport à x et à y.
$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{f(z)}\right) = 1\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{f(z)}\right) = i\end{cases} \quad\text{donc}\quad \begin{cases}\mathrm{d}(\exp)\left(f(z)\right).\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = 1\\[2mm] \mathrm{d}(\exp)\left(f(z)\right).\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i\end{cases}$$
$$\text{donc}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(z)e^{f(z)} = 1\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(z)e^{f(z)} = i\end{cases}$$
$$\text{et donc}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = e^{-f(z)} = \dfrac{1}{z}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = ie^{-f(z)} = \dfrac{i}{z}\end{cases}$$
f qui est de $\mathcal{C}^1$ vérifie donc la condition Cauchy--Riemann, elle est donc holomorphe sur Ω. Avec comme on pouvait s'y attendre
$$\forall z \in \Omega,\ f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{1}{z}$$

Résumons :

On pose $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^*$ et pour tout $z = x+iy \in \Omega$
$$f(z) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + 2i\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \ln|z| + i\arg(z)$$
$\arg(z)$ désignant ici la détermination de l'argument de z dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$.
f est une fonction holomorphe sur Ω vérifiant :
$$\forall z \in \Omega,\ e^{f(z)} = z \ \text{ et }\ f'(z) = \frac{1}{z}$$

La fonction f est appelée détermination principale du logarithme complexe sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, on la note ln

VOCABULAIRE : Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, on appelle détermination du logarithme complexe sur Ω toute fonction (si elle existe) g holomorphe sur Ω et telle que : $\forall z \in \Omega,\ e^{g(z)} = z$

Exercice 4.5 (*Déterminations du logarithme complexes*) Soit g une détermination du logarithme complexe sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^*$.

1. Montrer que pour tout nombre complexe z, $e^z = 1 \Longleftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
2. Montrer que Ω est connexe par arcs.
3. Montrer alors qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall z \in \Omega,\ g(z) = \ln z + 2ik\pi$
   (k ne dépend que de g pas de z).
4. Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $h(z) = \ln\left(ze^{-i\alpha}\right) + i\alpha$
   a. Préciser l'ouvert Ω_α sur lequel est définie h.
   b. Montrer que h est une détermination du logarithme complexe sur Ω_α.

III. Fonctions analytiques

III.1 Définitions et premières propriétés

DÉFINITION 4.2 : Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω si et seulement si
$$\begin{cases}\text{f est holomorphe sur } \Omega\\ f' \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \Omega\end{cases}$$
(Si, si cela fonctionne très bien).

On définit alors la suite des fonctions dérivées successives $(f^{(n)})_n$ de f par
$$\begin{cases}f^{(0)} = f\\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'\end{cases}$$

2. f est dite analytique sur Ω, si et seulement pour tout $z_0 \in \Omega$, f est développable en série entière sur un voisinage de z_0, c'est à dire que pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^N$ tels que

$$D(z_0, r) \subset \Omega \text{ et } \forall z \in D(z_0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

REMARQUES

1. On montrera dans ce paragraphe que toute fonction holomorphe est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on comprend alors pourquoi il est inutile de parler, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de la variable complexe.

LEMME 4.1 : Soit une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

PREUVE : Soient R et R' les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$. Soit $z \in D(0,R)$, et soit alors $r \in]|z|, R[$. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|n a_n z^{n-1}\right| = \frac{1}{r} n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} |a_n| r^n \text{ avec } n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $n a_n z^{n-1} = o\left(|a_n| r^n\right)$. Comme $r < R$ alors la série $\sum |a_n| r^n$ converge et donc $\sum n a_n z^{n-1}$ converge. Pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum n a_n z^{n-1}$ converge donc $R' \geqslant R$.
Inversement $a_n z^n = O\left(n a_n |z|^{n-1}\right)$ implique que $\sum a_n z^n$ converge si $\sum n a_n z^{n-1}$ converge absolument. Alors $R \geqslant R'$.
Ainsi $R' = R$.

PROPOSITION 4.3 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit f sa somme sur le disque ouvert $D(0,R)$

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0,R)$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$
$$\forall z \in D(0,R),\ f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) z^{n-p}$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$
3. Pour tout $r \in]0,R[$ et $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta.$

PREUVE :

1. Montrons d'abords que f est holomorphe sur $D(0,R)$.
Soit $z_0 \in D(0,R)$. Pour tout $z \in D(0,R)\backslash\{0\}$
$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^n - z_0^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(z)$$
où on a posé $u_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1}$. Posons $\rho = \frac{1}{2}\left(|z_0| + R\right)$ si R est fini, $\rho = 1 + |z_0|$ si R est infini. Dans les deux cas on a $|z_0| < \rho < R$.
Pour tout $z \in D(0,\rho)$, $|a_n u_n(z)| \leqslant n |a_n| \rho^{n-1}$
La série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. Comme $\rho < R$ alors la série $\sum n |a_n| \rho^{n-1}$ est convergente et donc la série de fonctions $\sum a_n u_n$ CVN sur le disque $D(0,\rho)$. Les fonctions u_n étant continues, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n$ est donc continue sur $D(0,\rho)$. La continuité en z_0 donne en particulier
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$$
Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, et $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$, ceci pour tout $z_0 \in D(0,R)$.
f' est elle même la somme d'une série entière de rayon de convergence R, elle est donc continue sur $D(0,R)$. Ainsi f est holomorphe sur $D(0,R)$ et
$$\forall z \in D(0,R),\ f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$
f' est la somme d'une série entière de rayon de convergence R, ce qui précède démontre qu'elle est elle même holomorphe. On démontre ainsi par récurrence que f et toutes ses dérivées sont holomorphes. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$
$$\forall z \in D(0,R),\ f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) z^{n-p}$$
2. Découle immédiatement de l'expression de $f^{(p)}$ donnée précédemment.
3. Soit $r \in]0,R[$, et soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$
$$f\left(re^{i\theta}\right) e^{-ip\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)\theta} \text{ avec pour tout } n \in \mathbb{N},\ \left|a_n r^n e^{i(n-p)\theta}\right| = |a_n| r^n$$
$0 < r < R$ donc la série $\sum |a_n| r^n$ converge et donc la série de fonctions $\sum a_n r^n e^{i(n-p)\theta}$ CVN sur le segment $[0, 2\pi]$. Une intégration terme à terme est donc possible, et sachant que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 2\pi \delta_{k0}$, elle donne
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta = 2\pi a_p r^p$$

APPLICATIONS

1. D.S.E. de la fonction $z \longmapsto \ln(1+z)$

Considérons la fonctions $f : z \longmapsto \ln(1+z)$ bien définie sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}\backslash\,]-\infty,-1]$. ln désignant la détermination principale du logarithme complexe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

f est holomorphe sur Ω par composition de fonctions holomorphes et

$$\forall z \in \Omega\,,\ f'(z) = \frac{1}{1+z}$$

Considérons maintenant la fonction g somme de la série entière $\sum(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ sur son disque de convergence $D(0,1)$.

g est holomorphe sur $D(0,1)$ et pour tout $z \in D(0,1)$

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

$g-f$ est holomorphe de dérivée nulle sur le convexe $D(0,1)$, elle y'est donc constante. Comme $f(0) = g(0) = 0$ alors

$$\forall z \in D(0,1)\,,\ f(z) = \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

EXERCICE 4.6 (*Théorème de Liouville*) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, et soit f sa somme sur $\mathbb{C}$. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.

COROLLAIRE 4.3.1 : Soit f une fonction analytique sur Ω

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.
2. Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ et
$$\forall z \in D(z_0,r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$
Alors
   - $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
   - $\forall \rho \in]0,r[\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = \dfrac{1}{2\pi\rho^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$

PREUVE : Soit $z_0 \in \Omega$ et soient $r > 0$ et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall z \in D(z_0,r)\,,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Posons alors pour tout $h \in D(0,r)$, $g(h) = f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$.

g est la somme d'une série entière sur $D(0,r)$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0,r)$.
Maintenant puisque pour tout $z \in D(z_0,r)$, $f(z) = g(z-z_0)$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(z_0,r)$.
Ainsi pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(z_0,r)$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.
Ensuite, en reprenant la fonction g définie précédemment pour le point z_0 on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
et pour tout $\rho \in]0,r[$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi\rho^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \dfrac{1}{2\pi\rho^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$

III.2 ANALYCITÉ D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

THÉORÈME 4.2 : Toute fonction holomorphe sur Ω est analytique sur Ω.
Plus précisément, soit f une fonction holomorphe sur Ω et soit $z_0 \in \Omega$. Posons

$$R = \sup\left\{r > 0 \,/\, D(z_0,r) \subset \Omega\right\}$$

avec la convention $R = +\infty$ si ce dernier ensemble n'est pas majoré. Alors il existe une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in D(z_0,R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

PREUVE : (D'après CNC 2008 MATHS I)
Soit $z_0 \in \Omega$. Le fait que Ω soit un ouvert assure que l'ensemble $\left\{r > 0 \,/\, D(z_0,r) \subset \Omega\right\}$ est non vide, s'il est majoré on note R sa borne supérieure, sinon on pose $R = +\infty$. (Noter qu'on ne peut avoir $R = +\infty$ que si $\Omega = \mathbb{C}$ parce qu'on devrait avoir : $\forall r > 0, D(0,R) \subset \Omega$)
Soit maintenant $\rho \in]0,R[$ et considérons la fonction $\varphi : \theta \longmapsto f(z_0+\rho e^{i\theta})\,,\ \theta \in \mathbb{R}$.
φ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et d'une fonction holomorphe. Sa série de Fourier converge donc normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est φ.
Posons pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\rho) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\varphi(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$
On a alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\,,\ \varphi(\theta) = f(z_0+\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\rho)e^{in\theta} \tag{4.1}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et intéressons nous maintenant à la fonction

$$c_n : \rho \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\,,\ \rho \in [0, R[.$$

Pour cela on considère la fonction $\Psi : (\rho, \theta) \longmapsto f(z_0 + \rho e^{i\theta})$ définie sur $U = [0, R[\times[0, 2\pi]$. de sorte que pour tout $\rho \in [0, R[$

$$c_n(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\rho, \theta)e^{-in\theta}d\theta$$

Ψ est la composée de la fonction $(\rho, \theta) \longmapsto z_0 + \rho e^{i\theta}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et de la fonction f qui est holomorphe sur Ω, une proposition du paragraphe précédent affirme que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\rho}(\rho, \theta) = f'(z_0 + \rho e^{i\theta})\dfrac{\partial}{\partial\rho}(z_0 + \rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}f'(z_0 + \rho e^{i\theta})$

Alors c_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, R[$ d'après le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (sur un segment) et

$$\forall \rho \in [0, R[,\ c_n'(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(z_0 + \rho e^{i\theta})e^{i(1-n)\theta}d\theta$$

Soit $\rho \in]0, R[$, en utilisant la fonction $\theta \longmapsto f'(z_0 + \rho e^{i\theta})e^{i\theta}$ dérivée de la fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $\theta \longmapsto \dfrac{1}{i\rho}f(z_0 + \rho e^{i\theta})$, une intégration par parties donne

$$c_n'(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{-in\theta}}{i\rho}f(z_0 + \rho e^{i\theta})\right]_0^{2\pi} + \frac{in}{i\rho}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\right) = \frac{n}{\rho}c_n(\rho)$$

La fonction c_n est donc une solution sur $]0, R[$ de l'équation différentielle : $\rho\dfrac{dc}{d\rho} - nc = 0$

On en déduit qu'il existe une constante a_n telle que

$$\forall \rho \in]0, R[\,,\ c_n(\rho) = a_n\rho^n$$

Comme c_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, R[$, elle est continue en 0. L'expression de c_n implique alors forcément que $a_n = 0$ si $n < 0$. et donc

$$n < 0 \Longrightarrow \forall \rho \in [0, R[,\ c_n(\rho) = 0$$

La relation (1) devient alors :

$$\forall \rho \in [0, R[\,,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\rho^n e^{in\theta}$$

Puisque tout élément de $D(z_0, R)$ peut s'écrire sous la forme $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in [0, R[$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall z \in D(z_0, R)\,,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

COROLLAIRE 4.3.2 : Toute fonction f holomorphe sur Ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. En particulier f' est aussi holomorphe sur Ω.

APPLICATIONS

1. Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si f ne s'annule pas sur $D(0, R)$, alors $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur $D(0, R)$.

En effet ; $\dfrac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(0, R)$ donc elle est analytique sur $D(0, R)$.
Si R' est le rayon de convergence de son développement en 0 alors

$$R' \geqslant \sup\left\{r > 0 \big/ D(0, r) \subset D(0, R)\right\},\ \text{soit } R' \geqslant R.$$

2. *$\mathbb{C}$ est algébriquement clos*

Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. (On en déduit ensuite que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé).

En effet ; soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. Supposons que P n'admet pas de racines dans $\mathbb{C}$, et montrons qu'il est forcément constant.

P est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ donc la fonction $f = 1/P$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on peut écrire

$$P(z) - a_nz^n = z^n\left(\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots\frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)$$

avec

$$\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots\frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a donc $P(z) - a_nz^n = o(|z|^n)$. On en déduit que $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} |a_n||z|^n$ et donc que $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

il existe donc $R > 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| > R \Longrightarrow |f(z)| = \dfrac{1}{|P(z)|} \leqslant 1$.

f étant continue sur le compact $\overline{D}(0, R)$ elle y est bornée, en posant

$$M = max\left(1, \sup_{|z|\leqslant R}|f(z)|\right)$$

on a alors : $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant M$.

f holomorphe sur $\mathbb{C}$ et elle est borné sur $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Liouville, elle est constante sur $\mathbb{C}$. P est donc constant sur $\mathbb{C}$.

III.3 Principe des zéros isolés

LEMME 4.2 : On suppose que Ω est connexe par arcs. Soit W une partie de Ω. Si W est à la fois un ouvert et un fermé relatifs de Ω alors il est soit vide soit égal à Ω.

PREUVE : Supposons par l'absurde que W est un fermé et un ouvert relatifs de Ω et qu'il est non vide et inclu strictement dans Ω.
Posons alors $F = \Omega \backslash W$. W et F sont des fermés relatifs non vides de Ω. Soient donc $a \in W$ et $b \in F$. Ω est connexe par arcs, il existe donc une fonction continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow \Omega$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.
Par continuité de φ les ensembles $J = \varphi^{-1}(W)$ et $K = \varphi^{-1}(F)$ sont des fermés de $[0,1]$ et donc de $\mathbb{R}$, qui forment en plus une partition de $[0,1]$.
J est une partie non vide majoré de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne supérieure β, et puisque J est fermé alors $\beta \in J$. $1 \in K$ donc $\beta < 1$ et puisque $\beta = \sup J$ alors $]\beta,1] \subset K$,
K étant lui même un fermé, le fait d'avoir $\beta \notin K$ et $]\beta,1] \subset K$ mène à une contradiction.

LEMME 4.3 : On suppose que Ω est connexe par arcs. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z_0) = 0$$

Alors f est nulle sur Ω.

PREUVE : On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère alors l'ensemble non vide

$$W = \left\{z \in \Omega \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z) = 0\right\}$$

W est un fermé relatif de Ω

$$W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(f^{(n)}\right)^{-1}(\{0\})$$

les ensembles $\left(f^{(n)}\right)^{-1}(\{0\})$ sont des fermés de Ω car ils sont des images réciproques du fermé $\{0\}$ par des applications continues. W est donc une intersection de fermés de Ω, il est lui même un fermé de Ω.
W est un ouvert relatif de Ω.
Soit $\omega \in W$, f étant holomorphe sur Ω, elle est analytique sur Ω. il existe donc $r > 0$ tel que $D(\omega, r) \subset \Omega$ et

$$\forall z \in D(\omega, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!}(z-\omega)^n$$

et puisque $\omega \in W$ alors f est nulle sur $D(\omega, r)$ et donc $D(\omega, r) \subset W$.
Ainsi W est un ouvert relatif de Ω

Conclusion : W est un ouvert et un fermé relatifs de Ω, qui est non vide. D'après le premier lemme, il est égal à Ω. f ainsi que ses dérivées successives sont donc nulles sur Ω.

THÉORÈME 4.3 (PRINCIPE DES ZÉROS ISOLÉS) :
On suppose que l'ouvert Ω est connexe par arcs. Soit f une fonction holomorphe sur Ω qu'on suppose non partout nulle sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$. Si z_0 est un zéro de f, alors il existe $r > 0$ tel que

$$D(z_0, r) \subset \Omega \quad \text{et} \quad \left(\forall z \in D(z_0, r) \backslash \{z_0\},\ f(z) \neq 0\right)$$

On dit que les zéros de f sont des points isolés de Ω.

PREUVE : Puisque f est non nulle, d'après le deuxième lemme il existe au moins un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Soit donc

$$p = \min\left\{n \in \mathbb{N} \,/\, f^{(n)}(z_0) \neq 0\right\}$$

f est analytique donc il existe $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et

$$\forall z \in D(z_0, \rho),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

et par définition de p

$$\forall z \in D(z_0, \rho),\ f(z) = (z-z_0)^p g(z) \text{ avec } g(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-p}$$

$g(z_0) = \dfrac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0$ et g, somme d'une série entière, est continue sur $D(z_0, \rho)$.
La continuité de g en z_0 assure l'existence d'un $r \in]0, \rho]$ tel que pour tout $z \in D(z_0, r)$, $|g(z)| \geqslant \frac{1}{2}|g(z_0)| > 0$.
On a alors : $\forall z \in D(z_0, r) \backslash \{z_0\},\ f(z) = (z-z_0)^p g(z) \neq 0$.

EXERCICE 4.7 On pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} z^n$ avec pour tout

$$n \in \mathbb{N},\ \binom{1/2}{n} = \frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{n!}$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière définissant f ? reconnaitre $f(x)$ lorsque $x \in]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathrm{D}(0,1)$, $f(z)^2 = 1+z$.
3. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1[$, on exprimera ce prolongement en fonction de la fonction ln.

4. Quelles sont toutes les fonctions g holomorphes sur Ω telles que $g(z)^2 = 1 + z$.
5. Généraliser ce résultat aux fonctions g holomorphes sur Ω telles que $g(z)^p = 1 + z$ où $p \in \mathbb{N}^*$

Exercice 4.8 (*Zéros d'une fonction holomorphe*) Soit f une fonction holomorphe sur Ω qui n'est pas partout nulle sur Ω. On note Z_f l'ensemble des zéros de f dans Ω.

1. Montrer que Z_f est un fermé relatif de Ω.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{C}^*$ par $g(z) = \sin(1/z)$. Z_g est-il un fermé ?
3. Montrer que toute suite convergente d'éléments de Z_f converge forcément vers un point de la frontière de Ω.

Exercice 4.9 (*DSE de la fonction* $1/f$) $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f sa somme sur $D(0, R)$. On suppose que $f(0) \neq 0$. On reprend la notation Z_f de l'exercice précédent et on suppose que $Z_f \neq \varnothing$.

1. Montrer que $d(0, Z_f) > 0$. On pose $r = d(0, Z_f)$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur $D(0, r)$.

Exercice 4.10 (*Principe du prolongement analytique*) On suppose que Ω est connexe par arcs. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω. Montrer que s'il existe une suite non stationnaire $(a_n)_n$ d'éléments de Ω qui converge **dans** Ω et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) = g(a_n)$$

Alors $f = g$. En déduire sans faire de calcul que

1. $\forall z \in \mathbb{C},\ \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
2. $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2,\ \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

IV. Annexe

Les résultats de cette section ne sont pas au programme.

IV.1 Somme d'une série de fonctions holomorphes

Théorème 4.4 (de $\mathbb{C}$-dérivation de la somme d'une série de fonctions holomorphes) : Soit $\sum f_n$ une séries de fonctions définies de Ω dans $\mathbb{C}$. On suppose que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est holomorphe sur } \Omega \\ \sum f_n \text{ converge simplement sur } \Omega \\ \sum f_n' \text{ converge uniformément sur tout compact } de\Omega \end{cases}$$

Alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty}$ est holomorphe sur Ω et

$$\forall z \in \Omega,\ S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(z)$$

Preuve : Nous allons considérer les fonction partielles $S_x : y \longmapsto S(x + iy)$, et $S^y : x \longmapsto S(x + iy)$ et montrer qu'elles sont dérivables sur leurs domaines respectifs, ce qui reviendrait à démontrer que les dérivées partielle $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ sont bien définies sur Ω.
Fixons $x \in p_{\mathbb{R}}(\Omega)$, où $p_{\mathbb{R}}$ est la projection orthogonale de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $f_{n,x} : y \longmapsto f_n(x + iy)$ sont dérivables puisque les fonctions f_n sont holomorphes et donc de classe $\mathcal{C}^1$, avec $f_{n,x}'(y) = \dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x + iy) = i f_n'(x + iy)$. La série de fonction $\sum f_{n,x}$ CVS sur l'ouvert $I_x = \{y \in \mathbb{R} /\ x + iy \in \Omega\}$ de $\mathbb{R}$ et $\sum f_{n,x}'$ converge uniformément sur tout segment J de I_x, puisque un tel segment est un compact de Ω et que $\sum f_n'$ CVU sur tout compact de Ω.
Ainsi la somme $S_x : y \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_{n,x}(y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $y \in I_x$,

$$S_x'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n,x}'(y) = i \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x + iy)$$

De même on démontre que les fonctions $S^y : x \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x + iy)$ sont chacune de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $J_y = \{x \in \mathbb{R} /\ x + iy \in \Omega\}$ et

$$S^{y\prime}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x + iy) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x + iy)$$

Ainsi, on aurait démontré que la fonction S admet des dérivées partielles en tout point

$z = x + iy \in \Omega$ et que

$$\forall z \in \Omega, \ \frac{\partial S}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial S}{\partial y}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(z)$$

Il reste à justifier que les fonctions $\frac{\partial S}{\partial x}$ et $\frac{\partial S}{\partial y}$ sont continues, pour conclure que S est holomorphe sur Ω. Chose aisée puisque la série de fonctions $\sum f_n'$ CVU sur tout compact de Ω et que les fonctions f_n' sont toutes continues.

EXEMPLES

1. La fonction ζ de Riemann qu'on peut prolonger sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 1\}$ en posant $\zeta(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$, est holomorphe sur Ω avec pour tout $z \in \Omega$, $\zeta'(z) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^z}$.

IV.2 Integrales dépendant d'un paramètre complexe

THÉORÈME 4.5 : Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soit une fonction $f : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}$. On pose pour tout $z \in \Omega$

$$g(z) = \int_I f(z,t)\mathrm{d}t$$

On suppose que

$$\begin{cases} \forall t \in I, \ \text{la fonction } z \longmapsto f(z,t) \text{ est holomorphe ;} \\ \forall z \in \Omega, \ \text{les fonctions } t \longmapsto f(z,t) \text{ et } t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(z,t) \text{ sont CPM sur } I; \\ \forall (z,t) \in \Omega \times I, \ |f(z,t)| \leqslant \varphi(t) \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial x}(z,t)\right| \leqslant \psi(t). \end{cases}$$

où φ, ψ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ CPM positives et intégrables sur I.
Alors g est bien définie sur Ω, holomorphe sur Ω et

$$\forall z \in \Omega, \ g'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(z,t)\mathrm{d}t$$

PREUVE : On agit de la même façon que pour le théorème précédent en considérant les fonction partielles

$$x \longmapsto \int_I f(z,t)\mathrm{d}t \text{ et } y \longmapsto \int_I f(z,t)\mathrm{d}t$$

il faut juste noter que pour chaque $t \in I$, la fonction $z \longmapsto f(z,t)$ étant holomorphe, $\frac{\partial f}{\partial x}(z,t)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z,t)$ sont bien définis en tout z et $\frac{\partial f}{\partial y}(z,t) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z,t)$ et donc que l'on a aussi

$$\forall (z,t) \in \Omega \times I, \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(z,t)\right| \leqslant \psi(t)$$

EXEMPLES

1. La fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma : z \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

est bien définie et elle est holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\right\}$, avec

$$\forall z \in \Omega, \ \Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

2. Soit une fonction continue $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ |f(t)| \leqslant Ce^{at}$$

On considère alors l'ouvert $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > a\right\}$ et on pose pour tout $z \in \Omega$,

$$Lf(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt.$$

La fonction Lf est appelée transformée de Laplace de f.
Lf bien est définie et elle est holomorphe sur Ω. De plus

$$\forall z \in \Omega, \ (Lf)'(z) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$$

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 4.1

1. f étant holomorphe, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert convexe Ω. Donc elle est constante si et seulement si ses dérivées partielles sont nulles sur Ω, ce qui est équivalent à ce que f' soit partout nulle sur Ω.
2. Si on pose pour tout $z\in\Omega$, $f(z)=P(z)+iQ(z)$, f serait réelle si est seulement si la fonction Q est nulle sur Ω. Ceci donne ensuite via les formules de Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x}(z)=\frac{\partial P}{\partial y}(z)=0$ pour tout $z\in\Omega$. Sachant que Ω est convexe ceci équivaut à P, et donc f, est constante sur Ω.

Solution de l'exercice 4.2

Si on pose $f(z)=P(z)+iQ(z)$, alors pour tous $z\in\Omega$, $P(z)=x^2-y^2$. Les formules de Cauchy--Riemann donnent alors

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(z)=-\frac{\partial P}{\partial y}(z)=2y \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial y}(z)=\frac{\partial P}{\partial x}(z)=2x$$

La première équation s'intègre sous la forme $Q(z)=2xy+\varphi(y)$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. d'une seule variable, et en dérivant cette dernière expression par rapport à y et en comparatnt à la deuxième équation, on obtient $\varphi'(y)=0$ ceci sur l'"intervalle" $\mathbb{R}$. Alors φ est constante.
Ainsi, il existe une constante $k\in\mathbb{R}$ telle que $f(z)=x^2-y^2+2ixy+ik=z^2+ik$. Réciproquement une fonction de cette forme vérifie bien $\mathrm{Re}\big(f(z)\big)=x^2-y^2$.

Solution de l'exercice 4.3

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\0\leqslant q\leqslant n}} p a_{p,q}x^{p-1}y^q=\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n-1\\0\leqslant q\leqslant n}}(p+1)a_{p+1,q}x^py^q \text{ et}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\1\leqslant q\leqslant n}} q a_{p,q}x^{p}y^{q-1}=\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\0\leqslant q\leqslant n-1}}(q+1)a_{p,q+1}x^py^q$$

Supposons que f est holomorphe alors $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=i\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et donc pour tout $(p,q)\in[[0,n-1]]^2$, $(q+1)a_{p,q+1}=i(p+1)a_{p+1,q}$. En remplaçant $q+1$ par $q\geqslant 1$

$$a_{p,q}=i\,\frac{p+1}{q}a_{p+1,q-1}$$

de quoi on déduit que ,

$$a_{p,q}=i^q\frac{p+1}{q}\cdot\frac{p+2}{q-1}\cdots\frac{p+q}{1}a_{p+q,0}=i^q\frac{(p+q)!}{p!q!}a_{p+q,0}=i^q\mathrm{C}_{p+q}^p a_{p+q,0}$$

avec la convention $a_{p,q}=0$ si $p>n$ ou $q>n$, en regrouppant maintenant les termes dans $g(z)$

$$g(z)=\sum_{m=0}^{2n}\sum_{p+q=m}a_{p,q}x^py^q=\sum_{m=0}^{2n}\sum_{p=0}^{m}\mathrm{C}_m^p a_{m,0}x^p(iy)^{m-p}=\sum_{m=0}^{2n}a_{m,0}z^m$$

.

Solution de l'exercice 4.4

Découle de l'inégalité des accroissement finies pour les fonctions de plusieurs variables de classe $\mathcal{C}^1$.

Solution de l'exercice 4.5

1. en posant $z=x+iy$,

$$e^z=1\iff|e^z|=1 \text{ et } \arg z=0\ [2\pi]\iff e^x=1 \text{ et } y=0\ [2\pi]\iff z=y\in 2i\pi\mathbb{Z}$$

3. Par définition g vérifie pour tout $z\in\Omega$, $e^{g(z)}=z=e^{\ln(z)}$ donc pour tout $z\in\Omega$, $g(z)-\ln(z)\in 2i\pi\mathbb{Z}$. Comme $g-\ln$ est continue et Ω est connexe par arcs alors $(g-\ln)(\Omega)$ est un connexe par arcs inclu dans $i\mathbb{R}$ et est donc de la forme iI ou I est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui est à son tour forcément inclu dans $2\pi\mathbb{Z}$. Ceci n'est possible que lorsque I est réduit à un singleton. Ce qui signifie que $g-\ln$ est constante dont la valeur un élément de $2i\pi\mathbb{Z}$.
4. $h(z)=\ln(ze^{-i\alpha})+i\alpha$ est bien définie ssi $ze^{-i\alpha}\notin\mathbb{R}_-$, ce qui est équivalent à $z\notin\mathbb{R}_-e^{i\alpha}$. Ainsi h est holomorphe sur $\Omega_\alpha=\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}_-e^{i\alpha}$. Géométriquement $\mathbb{R}_-e^{i\alpha}$ est la demi-droite du plan complexe obtenue en faisant tourner la demi-droite $\mathbb{R}_-$ d'un angle α.
   Ensuite $e^{h(z)}=e^{i\alpha}\exp\big(\ln(ze^{-i\alpha})\big)=e^{i\alpha}ze^{-i\alpha}=z$. Donc h est bien une détermination du logarithme complexe sur Ω_α.

Solution de l'exercice 4.6

Soit f la somme de la série entière $\sum a_nz^n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $r>0$,

$$a_n=\frac{2\pi}{r^n}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$$

donc si $|f|$ est bornée sur $\mathbb{R}$ de borne supérieure M alors pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\forall r>0,|a_n|\leqslant\frac{M}{r^n}$$

La possibilité de faire tendre r vers $+\infty$ achève de justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=0$. Ainsi f est constante.

Solution de l'exercice 4.7

1. Le critère de D'Alembert donne $R=1$. Si x est un réel de l'intervalle $]-1,1[$. On reconnait en $f(x)$ le développement en série entière de la fonction $x\longmapsto\sqrt{1+x}$.

2. f est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0,1)$ (somme d'une série entière) et elle vérifie
$$\forall z \in]-1,1[,\ f(z)^2 = 1+z$$
La fonction holomorphe $g : z \longmapsto f(z)^2 - z - 1$ est forcément nulle sur $D(0,1)$ car 0 est un zéro non isolé de g. Ainsi
$$\forall z \in D(0,1),\ f(z)^2 = 1+z$$

3. On considère la fonction h définie sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}\setminus]-\infty,-1[$ par $h(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(1+z)}$. h est holomorphe sur Ω comme composée de fonctions holomorphes et pour tout $z \in \Omega$, $h(z)^2 = 1+z$. En particulier pour tout $x \in]-1,1[$, $h(x) = \sqrt{1+x}$ ou $h(x) = -\sqrt{1+x}$. Comme h est continue et $h(0) = 1$ alors $h(x) = \sqrt{1+x} = f(x)$, pour tout $x \in]-1,1[$. On en déduit d'après le principe des zéros isolés que $h(z) = f(z)$ pour tout $z \in D(0,1)$.

4. Ce sont les fonctions h et $-h$ …

5. On démontre qu'il existe exactement p fonctions holomorphes définies sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}\setminus]-\infty,-1[$ vérifiant $f(z)^p = 1+z$ pour tout $z \in \Omega$. Elles sont données par les expressions
$$\forall z \in \Omega,\ f_k(z) = e^{\frac{2ik\pi}{p}} e^{\frac{1}{p}\ln(1+z)}$$
où $k \in [[0, p-1]]$.

Solution de l'exercice 4.8

1. Z_f est l'image réciproque par l'application continue f du fermé $\{0\}$, c'est donc un fermé relatif de Ω.

2. En posant $g(z) = \sin(1/z)$, g définie une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}^*$. Les points de la forme $1/k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}^*$ sont tous des zéros de g. Comme la suite $(1/k\pi)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 qui n'est pas un élément de $\mathbb{C}^*$ alors Z_g n'est pas un fermé (c'est bien sûr un fermé relatif de $\mathbb{C}^*$).

3. Une suite de zéros de f qui converge, ne peut converger dans Ω car sa limite l constituerait un zéro non isolé de f. Comme l est la limite d'une suite d'éléments de Ω alors $l \in \overline{\Omega}$. $l \notin \mathring{\Omega} = \Omega$ donc $l \in \partial\Omega$.

Solution de l'exercice 4.9

1. Si on avait $\mathrm{d}(0, Z_f) = 0$ on serait capable de construire une suite de zéros de f qui convergerait vers 0, ce qui est impossible puisque $f(0) \neq 0$. Alors $\mathrm{d}(0, Z_f) > 0$.

2. La fonction $1/f$ est holomorphe sur le disque ouvert $D(0,r)$, puisque celui-ci ne contient aucun zéro de f (par définition de r). Alors $1/f$ est DSE en 0 sur tout le disque $D(0,1)$.

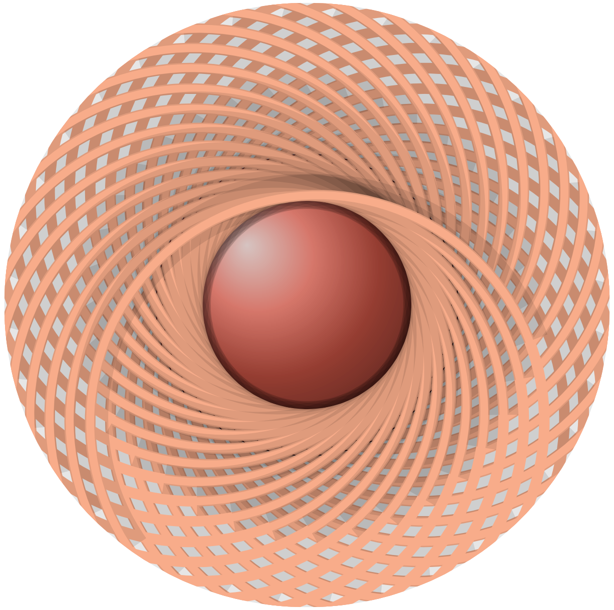
Solution de l'exercice 4.10

S'il existe une suite $(a_n)_n$ non stationnaire d'éléments de Ω qui converge dans Ω vers un élément a et telle que $f(a_n) = g(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors a serait un zéro non isolé de $g - f$ et donc $g - f = 0$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, $g : z \longmapsto \cos^2 z + \sin^2 z - 1$ admet le point 0 comme zéro non isolé, elle est donc nulle.

2. Fixer $a \in \mathbb{C}$ et considérer de même la fonction $z \longmapsto \cos(a+z) - \cos a \sin z + \sin a \cos z$ …

❑



À propos de l'auteur de l'article

L'auteur natif de la ville d'El Jadida a obtenue une licence en mathématiques en 1984 à l' E.N.S. de Casablanca. Il intègre un centre de préparation au concours de l'agrégation qu'il passe avec succès en 1994. La même année il s'inscrit à la faculté des sciences de Rabat pour obtenir le diplôme des études approfondies en mathématiques ; ensuite à la faculté des sciences Ben M'Sik pour obtenir un doctorat de troisième cycle (D.E.S.) qu'il soutient en 1995. Il prépare et soutient en 2000, à la même faculté, une thèse de doctorat en mathématiques sur le thème : Théorème du point fixe et ses applications.

Il a été affecté au Lycée Technique Mohammedia en 1994, où il a enseigné la deuxième année T.S.I. et ensuite M.P. jusqu'à nos jours.

Monsieur Chaira a publié plusieurs articles scientifiques et pédagogiques. Il a été membre du groupe G.T.D. au ministère de l'éducation nationale en 2007-2010, groupe responsable de la préparation des nouveaux programmes des classes préparatoires, option mathématiques.

« Cours »

Transformations affines euclidiennes du plan et de l'espace

par Karim Chaira

Lycée technique – Mohammedia

Le but de cet article est d'étudier les isométries affines dans le plan et dans l'espace sans faire appel à l'algèbre linéaire. Ce qui permettra d'enrichir ces notions dans les classes préparatoires PCSI et la première année TSI.

I. Transformations du plan

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthnormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ c'est à dire $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Pour les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il existe deux uniques points I et J de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OJ}$.

I.1 Transformations, isométries et déplacements

Définition 5.1 : On dit qu'une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est une transformation si f est une bijection de $\mathcal{P}$ sur lui même.

DÉFINITION 5.2 : Une transformation f est une isométrie du plan $\mathcal{P}$ si :
$\forall (M,N) \in \mathcal{P}^2,\ \|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{M'N'}\|$, où $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$.
On dit alors qu'une isométrie est une transformation qui conserve la distance.

REMARQUES

1. Une isométrie conserve les angles géométriques, mais pas nécessairement les angles orientés.

En effet, les relations : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\ AC \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 - 2A'B'\ A'C' \cos(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$, où A', B' et C' sont les images des points A, B et C par cette isométrie, montrent que : $|(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})| = |(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})|$

DÉFINITION 5.3 : On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les angles orientés c'est à dire pour tout triplet $(A,B,C) \in \mathcal{P}^3$ tel que B et C sont distincts de A, on a :
$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$, où A', B' et C' sont les images de A, B et C resp. par cette isométrie.

REMARQUES

1. Pour tout déplacement f de $\mathcal{P}$, $(f(O); u', v')$ est un repère orthonormal direct, où $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{f(O)f(I)}$ et $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{f(O)f(J)}$.

PROPOSITION 5.1 :

1. Une isométrie transforme trois points alignés en trois points alignés. En particulier, si B est le milieu de $[AC]$, B' est le milieu de $[A', C']$.
2. L'image d'une droite par une une isométrie est une droite.

PREUVE : 1. Soient trois points A, B et C alignés dans cet ordre et f une isométrie. On pose $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$. On a : $AC = AB + BC$, donc $A'C' = A'B' + B'C'$ ce qui traduit que les points A', B' et C' sont alignés dans cet ordre.

2. D'après a), si M est un point de la droite (AB), où A et B deux points distincts, $M' = f(M)$ est un point de la droite $(A'B')$. Soit alors N' un point de la droite $(A'B')$, il existe un point N tel que $N = f^{-1}(N')$, soit $N' = f(N)$. Comme f^{-1} est une isométrie, le raisonnement précédent permet de dire que N est sur la droite (AB).

1.2 Translations, rotations et réflexions

DÉFINITION 5.4 : Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur.On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{w}$, notée $t_{\overrightarrow{w}}$, la transformation qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$.

PROPOSITION 5.2 : Tout translation est un déplacement.

Expression analytique d'une translation

Soient $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ un vecteur et $M(x,y)$, $M'(x',y')$ deux points du plan $\mathcal{P}$.

$$t_{\overrightarrow{w}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

PROPOSITION 5.3 : Translation et nombres complexes.
Toute translation peut être définie par une relation de type $z' = z + b$ où b est un complexe, et réciproquement.

PREUVE : Les affixes respectives z, z' et b de M, M' et $\overrightarrow{MM'}$ sont liés par les relations $z' = z + b$ et $z = z' - b$; le nombre b est l'affixe du point $O' = t(O)$, où O est l'origine du repère.

DÉFINITION 5.5 : Soient Ω un point de $\mathcal{P}$ et θ un réel.
On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ la transformation $r : M \to M'$ telle que

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \theta[2\pi] & \text{si } M \neq \Omega \\ r(\Omega) = \Omega \end{cases}$$

On la note : $r_{(\Omega,\theta)}$.

PROPOSITION 5.4 : Toute rotation est une isométrie.

PREUVE : Soit r une rotation de centre Ω et d'angle θ. Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$.
On pose $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$.
On a par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega N}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega N'}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega N'},\overrightarrow{\Omega N}}) \\ &\equiv \theta + (\widehat{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega N'}}) - \theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega N'}}) \quad [2\pi]\end{aligned}$$

Et, d'après les relations suivantes : $MN^2 = \Omega M^2 + \Omega N^2 - 2\Omega M\ \Omega N\ \cos(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega N}})$ et $M'N'^2 = \Omega M'^2 + \Omega N'^2 - 2\Omega M'\ \Omega N' \cos(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega N'}})$, on a : $MN = M'N'$. Ainsi, r est une isométrie.

PROPOSITION 5.5 : Si r est une rotation de centre Ω et d'angle θ, alors $z' = e^{i\theta}z + b$, où z et z' sont les affixes des points M et M' resp. et $M' = r(M)$.
La réciproque est vraie si $e^{i\theta} \neq 1$ ou $b = 0$.

PREUVE : Les affixes respectives ω, z et z' de O, M et M' sont liées par les relations $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ soit $z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega = e^{i\theta}z + b$.
Réciproquement, toute rotation du type $z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$ où $\omega = \dfrac{b}{1-e^{i\theta}}$, définit la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Expression analytique d'une rotation

Soient $M(x,y)$, $M'(x',y')$ deux points du plan $\mathcal{P}$.
$r(M) = M' \Leftrightarrow z' - b = e^{i\theta}z \Leftrightarrow \begin{cases} x' - \alpha = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' - \beta = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$, où $\alpha + i\beta$ la forme algèbrique de b.

PROPOSITION 5.6 : Soient $r_{(\omega,\theta)}$ une rotation et M, N deux points distincts de $\mathcal{P}$.
Alors, $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}}) \equiv \theta[2\pi]$, où $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$.

PREUVE : Il suffit d'utiliser $z_{N'} - z_{M'} = e^{i\theta}(z_N - z_M)$.

PROPOSITION 5.7 : Toute rotation $r_{(\omega,\theta)}$ est un déplacement de $\mathcal{P}$.

PREUVE : Posons $O' = r(O)$, $I' = r(I)$ et $J' = r(J)$. D'après la proposition précédente, $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{O'I'}}) \equiv \theta[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{O'J'}}) \equiv \theta[2\pi]$. Donc,
$(\widehat{\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'J'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{OI}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}) + (\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{O'J'}}) \equiv -\theta + \dfrac{\pi}{2} + \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

PROPOSITION 5.8 : Soient $r'(\omega',\theta')$ et $r''(\Omega'',\theta'')$ deux rotations. Alors, $r'' \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta' + \theta''$.

PREUVE : Si ω' et ω" sont les affixes des centres Ω' et Ω'' resp., on dispose des égalités : $z' - \omega' = e^{i\theta'}(z-\omega')$ et $z'' - \omega'' = e^{i\theta''}(z'-\omega'') = e^{i\theta''}\left[(z'-\omega') + (\omega'-\omega'')\right]$, puis $z'' = \omega'' + e^{i\theta''}\left[e^{i\theta'}(z-\omega') + (\omega'-\omega'')\right]$, que l'on peut écrire, pour $\theta \neq 2k\pi$, sous la forme $z" - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ avec $\theta = \theta' + \theta''$ et $\omega = \dfrac{e^{i\theta"}(1-e^{i\theta'})\omega' + (1-e^{i\theta''})\omega''}{1-e^{i\theta}}$.
On notera qu'en général $r''(\omega'',\theta'') \circ r'(\Omega',\theta')$ et $r'(\Omega',\theta') \circ r''(\Omega'',\theta'')$ sont des transformations différentes.

I.3 Réflexions

DÉFINITION 5.6 : Soit Δ une droite du plan $\mathcal{P}$. On appelle symétrie orthgonale (ou réflexion) la transformation qui, à tout point M, associe le point M' de la perpendiculaire à Δ issue de M tel que le milieu du segment $[MM']$ appartient à Δ.

On note une telle symétrie S_Δ.

$S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \Big((MM') \perp \Delta,\ (MM') \cap \Delta = \{H\}\ et\ \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}\Big)$.

REMARQUES

1. $S_\Delta \circ S_\Delta = Id_{\mathcal{P}}$.

2. S_Δ est une isométrie.

Expression analytique d'une réflexion

Soit Δ la droite d'équation : $ax + by + c = 0$, où $(a,b) \neq (0,0)$. On a $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est un vecteur normal à Δ. On désigne par $M(x,y)$ un point du plan, $M'(x',y')$ l'image de M par la réflexion S_Δ et $H(x_o,y_o)$ le point de Δ vérifiant : $\overrightarrow{HM} = \lambda\vec{w}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$.

$$\begin{aligned}
S_\Delta(M) = M' &\Leftrightarrow (MM') \perp \Delta,\ (MM') \cap \Delta = \{H\} \text{ et } \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} ax_o + by_o + c = 0 \\ x_o = -\lambda a + x \text{ et } y_o = -\lambda b + y \\ x' = 2x_o - x \text{ et } y' = 2y_o - y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}x - \dfrac{2ab}{b^2 + a^2}y - \dfrac{2ac}{b^2 + a^2} \\ y' = -\dfrac{2ab}{b^2 + a^2}x + \dfrac{a^2 - b^2}{b^2 + a^2}y - \dfrac{2bc}{b^2 + a^2} \end{cases}
\end{aligned}$$

REMARQUES

1. Toute réflexion n'est pas un déplacement. Plus précisément, pour tout triplet $(A,B,C) \in \mathcal{P}^3$ tel que B et C sont distincts de A, $(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$, où A', B' et C' sont les images de A, B et C resp.

1.4 Similitudes directes planes

DÉFINITION 5.7 : On appelle similitude plane, toute transformation du plan qui conserve les rapports de distances.

Autrement dit, une transformation f du plan est une similitude si elle vérifie l'égalité : $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$, pour tout points A, B, C et D de tels que C et D sont distincts et que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$.

PROPOSITION 5.9 : Si f est une similitude, alors il existe un unique nombre réel $k > 0$, appelé rapport de la similitude, tel que pour tout couple (M,N) de points, on ait $\|\overrightarrow{A'B'}\| = k\|\overrightarrow{AB}\|$.

PREUVE : On fixe deux points distincts C et D du plan. Comme f est une similitude, pour tout couple (A,B) de points on a : $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$ c'est à dire $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{C'D'}{CD}$. On pose $k = \dfrac{C'D'}{CD}$.
L'unicité est claire puisque, si A et B sont distincts, l'égalité $k\ AB = k'\ AB$ implique $k = k'$.

EXEMPLES

1. Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) (c'est à dire, la transformation qui, à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$).
h est une similitude de rapport $|k|$.
• Une homothétie a donc deux rapports : son rapport d'homothétie k et son rapport de similitide $|k|$.
• Pour toute homothétie et tout couple (M,N) de points distincts ayant pour images M' et N', on a : $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}}) \equiv 0[2\pi]$. Il en résulte que, pour tout triplet (A,B,C) de points avec B et C distincts de A, on dispose de l'égalité $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})[2\pi]$.
2. Les isométries sont des similitudes de rapport 1, en particulier, les translations, les rotations et les réflexions.

PROPOSITION 5.10 : Si f et f' sont deux similitudes de rapports k et k' resp., alors $f' \circ f$ est une similitude de rapport kk'.

Démonstration. Il suffit de remarquer que, si $\overrightarrow{f'(A')f'(B')} = k'\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, alors $\overrightarrow{f'(A')f'(B')} = kk'\overrightarrow{AB}$.

REMARQUES

1. Tout similitude de rapport k, sa bijection réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

PROPOSITION 5.11 :

1. Une similitude transforme trois points alignés en trois points alignés.
2. L'image d'une droite par une une similitude est une droite.
3. Une similitude de rapport k transforme un cercle de rayon r en un cercle de rayon kr.

DÉFINITION 5.8 : On dit qu'une similitude f est directe s'il existe une translation $t_{\vec{u}}$, une homothétie h et une rotation r telles que $f = t_{\vec{u}} \circ h \circ r$.

REMARQUES

1. L'angle de la rotation figurant dans une telle décomposition de la forme $f = t_{\vec{u}} \circ h \circ r$ ne dépond pas de la décomposition.

En effet, pour tout couple (A, B) de points distincts on a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta[2\pi]$, où θ est l'angle de la rotation r.

DÉFINITION 5.9 : le nombre θ est appelé angle de la similitude directe f.

PROPOSITION 5.12 : Pour toute similitude directe f et tout triplet (A, B, C) de points deux à deux distincts, on a : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$.

PREUVE : Cela résulte de l'égalité $f = t_{\vec{u}} \circ h \circ r$ et des propriétés analogues des translations, des rotations et des homothéties.

REMARQUES

1. La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
2. Pour toute similitude directe f il existe une translation $t_{\vec{u}}$, une homothétie h et une rotation r telles que $f = r \circ h \circ t_{\vec{u}}$.
3. La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

REMARQUES

1. La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
2. Pour toute similitude directe f il une translation $t_{\vec{u}}$, une homothétie h et une rotation r telles que $f = r \circ h \circ t_{\vec{u}}$.
3. La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

En effet, pour $b)$ il suffit d'appliquer à f^{-1} la définition d'une similitude directe.

c) Le produit est une similitude qui conserve la mesure $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ d'un angle d'un triangle formé par trois points A, B et C deux à deux distincts. Il suffit de les choisir non alignés pour vérifier qu'alors on ne peut pas avoir à la fois $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [2\pi]$, ce qui prouve que ce produit est une similitude directe.

PROPOSITION 5.13 : Similitudes et nombres complexes.
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, l'application qui associe au point d'affixe z le point d'affixe $az + b$ est une similitude directe de rapport $|a|$ et dont l'angle admet pour mesure l'argument principal de a.

PREUVE : Si $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, c'est en effet le produit de la translation définie par b, de l'homothétie de centre O et de rapport $r = |a|$ et enfin de la rotation de même centre et d'angle θ. Il en résulte que les nombres k et θ sont respectivement le rapport et l'angle de la similitude.

PROPOSITION 5.14 : Pour toute similitude f, il existe deux nombres complexes a et b vérifiant $a \neq 0$ tels que l'affixe z' de l'image par f du point d'affixe z soit donnée par $z' = az + b$.

PREUVE : Soit b l'affixe de $f(O)$ et $a + b$ l'affixe de l'image par f du point d'affixe 1. L'application $z \mapsto az + b$ est associée à une similitude directe f' telle que le produit $f^{-1}f'$ laisse fixe les points d'affixes 0 et 1 : c'est donc l'identité, c'est à dire $f = f'$.

PROPOSITION 5.15 : Points invariants par une similitude directe.
Toute similitude directe de rapport $k \neq 1$ admet un seul point invariant.

PREUVE : La seule solution de l'équation $z = az + b$ est en effet $z = \dfrac{b}{1-a}$, ce qui a un sens car $|a| \neq 1$, d'où $a \neq 1$.

PROPOSITION 5.16 : Toute similitude directe de centre Ω d'affixe ω est associé à une écriture complexe de la forme $z' - \omega = a(z - \omega)$.

PREUVE : Cela résulte du faite que ω est l'unique solution de l'équation $z = az + b$.

II. Transformations de l'espace

On suppose dans ce chapitre l'espace usuel $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O et de vecteurs unitaires $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par rapport auquel les coordonnées sont notées (x, y, z).
Pour les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, il existe des uniques points I, J, et K de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

II.1 Transformations, isométries et déplacements

DÉFINITION 5.10 : On dit qu'une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une transformation si f est une bijection de $\mathcal{E}$ sur lui même.

DÉFINITION 5.11 : Une transformation f est une isométrie de l'espace $\mathcal{E}$ si :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \ \|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{M'N'}\|, \text{ où } M' = f(M) \text{ et } f(N) = N'.$$

On dit alors qu'une isométrie est une transformation qui conserve la distance.

REMARQUES

1. Une isométrie conserve les angles géométriques, mais pas nécessairement les angles orientés.

En effet, même démarche que dans le cas des isométries planes.

PROPOSITION 5.17 : 1. Une isométrie transforme trois points alignés en trois points alignés.
En particulier, si B est le milieu de $[AC]$, B' est le milieu de $[A', C']$.
2. L'image d'une droite par une une isométrie est une droite.

PREUVE : Même démarche que dans le cas des isométries planes.

DÉFINITION 5.12 : On dit qu'une isométrie f de $\mathcal{E}$ est un déplacement si $(f(O); \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ est un repère orthonormal direct de $\mathcal{E}$, où $\vec{i'} = \overrightarrow{f(O)\,f(I)}$, $\vec{j'} = \overrightarrow{f(O)\,f(J)}$ et $\vec{k'} = \overrightarrow{f(O)\,f(K)}$.

Rappellons que la base orthonormal $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ est directe si le produit mixte $\vec{i'}.(\vec{j'} \wedge \vec{k'})$ est positif.

REMARQUES

1. Si $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ est une base orthonormal direct, alors
$$\vec{i'}.(\vec{j'} \wedge \vec{k'}) = det_{\beta}(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}) = 1$$

REMARQUES

1. Une isométrie f de $\mathcal{E}$ est un déplacement si, et seulement si, pour tout repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, où $\vec{u} = \overrightarrow{OI_1}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OJ_1}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OK_1}$, le repère $(f(O); \overrightarrow{f(O)\,f(I_1)}, \overrightarrow{f(O)\,f(J_1)}, \overrightarrow{f(O)\,f(K_1)})$ est aussi ortonormal direct de $\mathcal{E}$.

Cette remarque sera montionnée et démontrée en deuxième année, elle justifie qu'un déplacement est indépendant du repère orthonormal direct choisi.

REMARQUES

1. Pour toute isométrie (resp. tout déplacement) f, sa réciproque f^{-1} est également une isométrie (resp. un déplacement).

2. Pour tout couple (f, g) d'isométries (resp. de déplacements), $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des isométries (resp. des déplacements).

II.2 Translations, rotations et réflexions

DÉFINITION 5.13 : Soit $\vec{w}$ un vecteur. On appelle translation de vecteur $\vec{w}$, notée $t_{\vec{w}}$, la transformation qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$.

PROPOSITION 5.18 : Tout translation est un déplacement.

Expression analytique d'une translation

Soient $\vec{w} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ un vecteur et $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ deux points de l'espace $\mathcal{E}$. On a : $t_{\vec{w}}(M) = M' \;\Leftrightarrow\; (x' = x + a\ ,\ y' = y + b \text{ et } z' = z + c)$.

DÉFINITION 5.14 : Pour tout nombre réel θ, on appelle rotation d'axe Oz et d'angle θ l'application dont les restrictions aux plans orthogonaux à Oz sont les rotations d'angle θ et de centres les projections de O sur ces plans. On la note $r(Oz, \theta)$.

Ainsi la rotation d'angle nul est l'identité, et celle d'angle π est la symétrie relative à Oz, c'est-à-dire l'application qui à tout point M associe le point M' symétrique de M par rapport à la droite Oz.

PROPOSITION 5.19 : Pour tout nombre réel θ la rotation $r(Oz, \theta)$ est une transformation de l'espace.

PREUVE : Cela résulte du fait que sa restriction à chaque plan orthogonal à Oz est une transformation du plan.

PROPOSITION 5.20 : le produit de deux rotations d'axe Oz est une rotation.

PREUVE : Cela résulte du fait que le produit de leurs restrictions à chaque plan orthgonal à Oz est une rotation dont l'angle est la somme des angles des deux rotations, donc indépendant du plan choisi.

PROPOSITION 5.21 : Pour tout nombre θ non multiple de 2π, l'axe Oz est l'ensemble des points fixes de la rotation d'axe Oz et d'angle θ.

PROPOSITION 5.22 : Tout cercle d'axe Oz est invariant par toute rotation d'axe Oz.

Expression analytique d'une rotation d'axe Oz

Pour tout nombre réel θ et tout point M de coordonnées (x, y, z), les coordonnées de son image M' par la rotation $r(Oz, \theta)$ sont données par les égalités :
$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ z' = z \end{cases}.$$
En effet, cela résulte du faite que sa restriction à chaque plan orthgonal à Oz est la rotation de centre la projection de O et d'angle θ.

PROPOSITION 5.23 : Pour tout rotation d'axa Oz et toute droite D parallèle à Oz, son image D' est une droite parallèle à Oz situé à la même distance que D de Oz.

PROPOSITION 5.24 : Pour tout rotation $r(Oz, \theta)$, tout triplet (A, B, C) de points de l'espace et leurs images (A', B', C') par $r(Oz, \theta)$, on a l'égalité : $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

PREUVE : C'est clair si les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à Oz puisque les trois points (A, B, C) sont alors dans un même plan orthogonal à Oz et qu'une rotation conserve le produit scalaire.
C'est également clair si les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont parallèles à Oz, d'après la proposition précédente puisque les trois points (A, B, C) sont alors alignés sur une parallèle à Oz.

Ces deux cas particuliers impliquent le cas général, car il suffit de décomposer les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}$ avec $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AK}$ parallèles à Oz et $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{KC}$ orthogonaux à Oz, puis de remarquer l'égalité : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{KC}$

COROLLAIRE 5.24.1 : Toute rotation d'axe Oz conserve l'angle, et l'éventuelle orthogonalité, de deux vecteurs ou de deux droites.

PREUVE : En effet elle conserve le produit scalaire (rappelons que dans l'espace, les angles ne peuvent être orientés).

COROLLAIRE 5.24.2 : Toute rotation d'axe Oz est une isométrie.

PREUVE : En effet $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \sqrt{\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'B'}} = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \|\overrightarrow{AB}\|$.

PROPOSITION 5.25 : Toute rotation $r(Oz, \theta)$ est un déplacement de $\mathcal{E}$.

PREUVE : r étant une rotation d'axe Oz, donc $r(O) = O$, $r(K) = K$ et $\vec{k}' = \vec{k}$. La restriction de r au plan xOy orthgonal à Oz est la rotation de centre O et d'angle θ. Donc,

$$(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\overrightarrow{O\,r(I)}, \overrightarrow{O\,r(J)}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\ et$$

$$\overrightarrow{O\,r(I)}.\left(\overrightarrow{O\,r(J)} \wedge \overrightarrow{O\,r(K)}\right) = \overrightarrow{O\,r(K)}.\left(\overrightarrow{O\,r(I)} \wedge \overrightarrow{O\,r(J)}\right) = \overrightarrow{OK}.(\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{k}.(\vec{i} \wedge \vec{j}) = 1$$

II.3 Réflexions

DÉFINITION 5.15 : Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace $\mathcal{E}$. On appelle symétrie orthgonale par rapport au plan $\mathcal{P}$ (ou réflexion) la transformation qui, à tout point M, associe le point M' de la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ issue de M tel que le milieu du segment $[MM']$ appartient à $\mathcal{P}$.

On note une telle symétrie $S_{\mathcal{P}}$.

$$S_{\mathcal{P}}(M) = M' \iff \left((MM') \perp \mathcal{P},\ (MM') \cap \mathcal{P} = \{H\}\ et\ \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}\right).$$

REMARQUES

1. $S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}} = Id_{\mathcal{P}}$.

2. $S_{\mathcal{P}}$ est une isométrie.

Expression analytique d'une réflexion

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $ax + by + cz + d = 0$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On a $\vec{w} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. On désigne par $M(x, y, z)$ un point de l'espace, $M'(x', y', z')$ l'image de M par la réflexion $S_{\mathcal{P}}$ et $H(x_o, y_o, z_o)$ le point de $\mathcal{P}$ vérifiant : $\overrightarrow{HM} = \lambda.\vec{w}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$.

$$S_{\mathcal{P}}(M) = M' \iff \left((MM') \perp \mathcal{P},\ (MM') \cap \mathcal{P} = \{H\}\ et\ \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}\right)$$

$$\iff [\ ax_o+by_o+cz_o+d = 0,\ (x_o = -\lambda a+x\ ,\ y_o = -\lambda b+y\ ,\ z_o = -\lambda c+z)$$

et $(x' = 2x_o - x\ ,\ y' = 2y_o - y\ ,\ z' = 2z_o - z)\ ]$

$$\iff \begin{cases} x' = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2}x - \dfrac{2ab}{a^2+b^2+c^2}y - \dfrac{2ac}{a^2+b^2+c^2}z - \dfrac{2ad}{a^2+b^2+c^2} \\ y' = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2+c^2}y - \dfrac{2ab}{a^2+b^2+c^2}x - \dfrac{2bc}{a^2+b^2+c^2}z - \dfrac{2bd}{a^2+b^2+c^2} \\ z' = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}z - \dfrac{2ac}{a^2+b^2+c^2}x - \dfrac{2bc}{a^2+b^2+c^2}y - \dfrac{2cd}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}.$$

REMARQUES

1. Toute réflexion $S_{\mathcal{P}}$ n'est pas un déplacement.

En effet, Soient H, I_1, J_1 des points du plan $\mathcal{P}$ tels que $(\widehat{\overrightarrow{HI_1}, \overrightarrow{HJ_1}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et K_1 un point de l'espace $\mathcal{E}$ tel que $(H; \overrightarrow{HI_1}, \overrightarrow{HJ_1}, \overrightarrow{HK_1})$ soit un repère orthonormal direct. Pour ces vecteurs $\overrightarrow{HI_1}$, $\overrightarrow{HJ_1}$ et $\overrightarrow{HK_1}$, ils existent des points I', J' et K' (uniques) tels que $\overrightarrow{HI_1} = \overrightarrow{OI'}$, $\overrightarrow{HJ_1} = \overrightarrow{OJ'}$ et $\overrightarrow{HK_1} = \overrightarrow{OK'}$.
Comme $\overrightarrow{S_{\mathcal{P}}(H)S_{\mathcal{P}}(I_1)} = \overrightarrow{HI_1}$, $\overrightarrow{S_{\mathcal{P}}(H)S_{\mathcal{P}}(J_1)} = \overrightarrow{HJ_1}$ et $\overrightarrow{S_{\mathcal{P}}(H)S_{\mathcal{P}}(K_1)} = -\overrightarrow{HK_1}$, donc le repère orthonormal $(O; I', J'\ K')$ n'est pas direct.

II.4 Exemple

On considère la transformation affine $f : M(x,y,z) \mapsto M'(x',y',z')$, où $\begin{cases} x' = z \\ y' = x \\ z' = y \end{cases}$.

f est une isométrie de $\mathcal{E}$. De plus, f est un déplacement de $\mathcal{E}$, car $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ est une base orthonormal directe.
L'ensemble des points invariants de $\mathcal{E}$ par f est la droite D passant par O est de vecteur directeur $\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.
On construit deux autres vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de sorte que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base orthnormale directe : $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k})$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$.
Soit $(x,y,z,X,Y,Z) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k} = X.\overrightarrow{u} + Y.\overrightarrow{v} + Z.\overrightarrow{w}$.

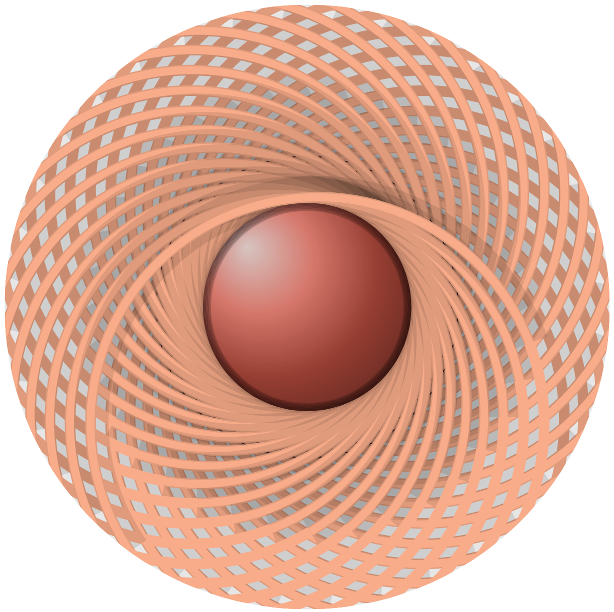
On a $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{6}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}.Y + \frac{1}{\sqrt{3}}.Z \\ y = -\frac{1}{\sqrt{6}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}.Y + \frac{1}{\sqrt{3}}.Z \\ z = \frac{2}{\sqrt{6}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}.Z \end{cases}$.

Soit $M'(x',y',z')$ le point image de M par f, et $(X',Y',Z') \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\overrightarrow{OM'} = x'.\overrightarrow{i} + y'.\overrightarrow{j} + z'.\overrightarrow{k} = X'.\overrightarrow{u} + Y'.\overrightarrow{v} + Z'.\overrightarrow{w}$$

En utilisant les deux systèmes précédents, on obtient $\begin{cases} X' = -\frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y \\ Y' = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y \\ Z' = Z \end{cases}$. Ainsi,

f est une rotation d'axe D et d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$. ❑



Spécial

Préparation aux concours

Les cahiers de prépas

À PROPOS DE L'AUTEUR DE L'ARTICLE

L'auteur, originaire du Souss, a eu son diplôme d'enseignant de secondaire à l'ENS de Rabat en 1988, il rejoint plus tard un centre de préparation au concours de l'agrégation, concours qu'il réussit en 1995. Il est alors affecté au lycée Reda Slaoui à Agadir où il enseigne les mathématiques en classes préparatoires jusqu'à l'an 2000, année où il rejoint le centre de préparation à l'agrégation de Marrackech comme formateur. Il a actuellement la charge de la classe MP* au lycée Ibn Taimia. Sa mutation vers Marrackech lui a permis d'entamer des études de troisième cycle à l'université Cadi Ayyad. Il ainsi pu soutenir son doctorat es mathématiques en 2010.

Monsieur Lhachimi est très apprécié de ses collègues pour sa compétence, sa sympathie et son sens de l'humour très spécial.

« Problème »

FONCTIONS β ET Γ

par LAHCEN LHACHIMI

LYCÉE IBN TAIMIA – MARRAKECH

ÉNONCÉ

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayon 1, telles que $b_n \geq 0$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ diverge.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = +\infty$

2. Montrer que si $a_n \sim b_n$ alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe.

   Montrer que pour tout $x_0 \in I$, l'application $x \to \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

PARTIE 1 :

Pour $x > 0$ on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Soient $\alpha \in]1,+\infty[$ et $\ell = \frac{1}{\alpha}$. On pose Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.
Dans cette partie on calculera $u_n(\alpha)$ à l'aide de Γ.

1. Vérifier que $u_n(\alpha)$ est bien défini et que $n^\ell u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+\frac{u^\alpha}{n})^n}$.

2. En déduire que $u_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell\Gamma(\ell)}{n^\ell}$.

3. **3a.** Justifier l'égalité :

$$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha)x^n = x(1-x)^{\ell-1}u_1(\alpha)$$

3b. Déduire l'expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$

4. Pour $x \in]-1,1[$ on pose $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\ell}x^n$

4a. Vérifier que G est bien définie.

4b. Par comparaison série intégrale montrer que $G(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \Gamma(1-\ell)(1-x)^{\ell-1}$

4c. A l'aide de 2) montrer que $\ell\Gamma(\ell)G(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha)x^n$.

4d. En déduire que $u_1(\alpha) = \ell\Gamma(\ell)\Gamma(1-\ell)$

PARTIE 2 :

1. La fonction beta :

1a. Montrer l'existence pour x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ de $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ et comparer $\beta(x,y)$avec $\beta(y,x)$.

1b. Etablir la relation $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$

1c. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta(n,y)$.

1d. Montrer que pour y fixé, l'application $\beta_y : x \to \beta(x,y)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

1e. Montrer que $\ln\beta_y$ est convexe.

2. Développement en série entière de $x \to \beta(x+1,y)$:

2a. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} \beta(x,y)$

2b. Soit $u_n : t \to \frac{(x\ln t)^n}{n!}(1-t)^{y-1}$ Pour $x \in]-1,1[$, vérifier l'intégrabilité de u_n sur $]0,1[$, puis montrer que la série $\sum_{n\geq0}\int_0^1 |u_n|$ est convergente

2c. En déduire que l'application $x \to \beta(x+1,y)$ est développable en série entières au voisinage de zéro et préciser le rayon de convergence.

3. Expression de Γ comme limite d'une suite :

3a. Montrer que pour $x>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \Gamma(x)$

3b. En déduire que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+x)}$.

3c. En déduire la formule du dédoublement :

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

4. Formule des compléments :

4a. Etablir la relation

$$\frac{1}{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2})$$

4b. Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-\frac{x^2}{n^2})$$

Montrer que f est bien définie , continue sur $[0,1[$ et de classe C^1 sur $]0,1[$.

4c. Soit $x \in]0,1[$ et g la fonction 2π périodique définie par

$$\forall t \in [-\pi,\pi],\ g(t) = \cos(xt)$$

Déterminer la série de Fourier de g, préciser le mode de convergence de cette série et sa somme.

4d. Vérifier la convergence et donner la valeur de la somme de la série

$$\frac{1}{x} + \sum_{n\geq1}\frac{2x}{x^2-n^2}$$

4e. Déduire que pour $x \in]0,1[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-\frac{x^2}{n^2}) = \ln(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})$$

4f. Etablir la formule suivante :

$$\forall x \in]0,1[,\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

4g. En déduire la valeur de $u_1(\alpha)$ de la partie 1.

5. **Caractérisation de Γ** : On rappelle que Γ est continue sur $]0,+\infty[$, $\ln\Gamma$ est convexe, $\Gamma(1) = 1$ et $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Réciproquement soit $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ continue et vérifiant :

i) $g(1) = 1$, ii) $\forall x > 0, g(x+1) = xg(x)$, iii) $\ln g$ est convexe.

On se propose de montrer, réciproquement, que $g = \Gamma$:

5a. Vérifier que pour $x \in]0,1[$

$$\ln g(n) - \ln g(n-1) \leq \frac{\ln g(x+n) - \ln g(n)}{x} \leq \ln g(n+1) - \ln g(n)$$

5b. En déduire que

$$\frac{n}{x+n} g(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)} \leq g(x)$$

5c. Conclure que $g = \Gamma$.

6. **Expression de la fonction beta à l'aide de Γ :**

6a. En considérant $g : x \longmapsto \dfrac{B(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$, montrer que

$$\forall x, y > 0,\ \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

6b. Exprimer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)dt$ en fonction de Γ.

Partie 3 : Extension de la formule de Stirling

1. Vérifier que pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = (\dfrac{x}{e})^x \sqrt{x} \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} (1 + \frac{t}{\sqrt{x}})^x\ e^{-t\sqrt{x}}\ dt$

2. On considère une suite x_n d'éléments de $[1,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, et on pose $f_n(t) = (1 + \dfrac{t}{\sqrt{x_n}})^{x_n}\ e^{-t\sqrt{x_n}}$ si $t > -\sqrt{x_n}$ et $f_n(t) = 0$ si non. Montrer que pour $t > -\sqrt{x_n}$ on a : $f_n(t) = \exp\left[t^2 g(\dfrac{t}{\sqrt{x_n}})\right]$ avec g une application continue sur $]-1,+\infty[$ que l'on précisera et étudier les variations de g.

3. Etablir la domination $0 \leq f_n(t) \leq \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{t^2}{2}) & \text{si } t \leq 0 \\ (1+t)e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

4. Conclure que $\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} (\dfrac{x}{e})^x \sqrt{2\pi x}$

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Résultat préliminaire

1. On a $b_n \geq 0$ donc $\forall n \geq 0$, $x \to b_n x^n$ est croissante sur $[0,1[$, par suite $f_b : x \to \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ l'est aussi donc f_b admet une limite ℓ finie ou non quand x tend vers 1^-

Soit $N \geq 0$ on a $\forall x \in [0,1[$, $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \leq f_b(x)$ quand x tend vers 1^- on obtient

$$\forall N \geq 0,\ \sum_{n=0}^{N} b_n \leq \ell$$

or $\sum_{n=0}^{N} b_n \underset{N\longrightarrow+\infty}{\to} +\infty$ donc $\ell = +\infty$

2. · $f_a(x) \underset{x\to1^-}{\sim} f_b(x)$: Soit $\varepsilon > 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$, $|a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n$.

donc pour $x \in [0,1[$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n - b_n)x^n\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n - b_n| x^n \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon b_n x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon b_n x^n = \varepsilon f_b(x).\end{aligned}$$

D'autre part on a $\lim_{x\to1^-} f_b(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to1^-} \dfrac{\sum_{n=0}^{N}(a_n - b_n)x^n}{f_b(x)} = 0$ donc il existe $\alpha \in]0,1[$, tel que

$$\forall x \in [\alpha, 1[,\ \left|\sum_{n=0}^{N}(a_n - b_n)x^n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} f_b(x)$$

donc $\forall x \in [\alpha,1[, |f_a(x) - f_b(x)| \leq \left|\sum_{n=0}^{N}(a_n - b_n)x^n\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n - b_n)x^n\right| \leq 2\varepsilon f_b(x)$

D'où $f_a(x) \underset{x\to1^-}{\sim} f_b(x)$.

3. Pour $a, b \in I$ avec $a < b$, notons $\varphi(a,b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \varphi(b,a)$.

Soit $c \in]a,b[$ donc il existe $t \in]0,1[$ tel que $c = ta + (1-t)b$, f est convexe donc $f(c) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ par suite

$$f(c) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a)) \text{ et } t(f(b) - f(a)) \leq f(b) - f(c)$$

or $t = \dfrac{b-c}{b-a}$ et $1 - t = \dfrac{c-a}{b-a}$ donc

Pour $a < c < b$ on a : (I) : $\varphi(a,c) \leq \varphi(a,b)$, (II) : $\varphi(a,b) \leq \varphi(b,c)$

Soient maintenant $x, y \in I\backslash\{x_0\}$ tels que $x < y$.

1er cas : $x_0 < x < y$, d'aprés (I) on a $\varphi(x_0,x) \leq \varphi(x_0,y)$

2ème cas : $x < y < x_0$ d'aprés (II) on a $\varphi(x_0,x) \leq \varphi(x_0,y)$

3ème cas : $x < x_0 < y$: D'aprés (I) et (II) on a $\varphi(x_0,x) \leq \varphi(x,y) \leq \varphi(x_0,y)$

Finalement l'application $x \to \varphi(x_0,x)$ est croissante sur $I\backslash\{x_0\}$.

Partie 1

1. $f : t \to \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$ et $\alpha n > 1$

donc f est intégrtable sur $[0,+\infty[$. En posant $t = \dfrac{u}{n^\ell}$ on obtient

$$n^\ell u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+\frac{u^\alpha}{n})^n}$$

2. On a $(1+\dfrac{u^\alpha}{n})^n = \sum_{0\leq k\leq n} C_n^k (\dfrac{u^\alpha}{n})^k \geq 1 + C_n^1 \dfrac{u^\alpha}{n} = 1 + u^\alpha$ on obtient la domination $0 \leq \dfrac{1}{(1+\frac{u^\alpha}{n})^n} \leq \dfrac{1}{1+u^\alpha}$ intégrable donc par TCVD on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^\ell u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{u^\alpha}{n})^n} du = \int_0^{+\infty} e^{-u^\alpha} du = \ell \int_0^{+\infty} t^{\ell-1} e^{-t} dt$$

3. **3a.** On a $u_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell\Gamma(\ell)}{n^\ell}$ donc par D'Alembert la série entière $\sum u_n(\alpha)x^n$ est de rayon 1, d'autre part $u_n(\alpha)x^n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ avec $f_n(t) = \dfrac{x^n}{(1+t^\alpha)^n}$

On a f_n est intégrable et $\sum \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum u_n(\alpha)|x|^n$ est convergente pour $|x|<1$, car la SE est de rayon 1, donc par théorème d'inversion série intégrale on a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha)x^n = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(1+t^\alpha)^n}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\frac{x}{1+t^\alpha}}{1-\frac{x}{1+t^\alpha}}dt = \frac{x}{1-x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{t^\alpha}{1-x}}dt$

En posant $u = \frac{t}{(1-x)^\ell}$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha)x^n = x(1-x)^{\ell-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^\alpha}du = x(1-x)^{\ell-1}u_1(\alpha)$$

3b. On a d'aprés le Dév en SE des fonctions usuelles, pour $|x|<1$,
$(1-x)^{\ell-1} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ell-1)(\ell-2)..(\ell-n)}{n!}(-x)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-\ell)(2-\ell)..(n-\ell)}{n!}x^n$

donc $x(1-x)^{\ell-1}u_1(\alpha) = xu_1(\alpha)+\sum_{n=1}^{+\infty}u_1(\alpha)\frac{(1-\ell)(2-\ell)..(n-\ell)}{n!}x^{n+1}$

$= xu_1(\alpha)+\sum_{n=2}^{+\infty}u_1(\alpha)\frac{(1-\ell)(2-\ell)..(n-1-\ell)}{(n-1)!}x^n$ donc d'aprés a) et par unicité du

Dév en SE on déduit que $\forall n\geq 2$, $u_n(\alpha) = u_1(\alpha)\frac{(1-\ell)(2-\ell)..(n-1-\ell)}{(n-1)!}$

4. 4a. D'après le critère de D'Alembert $R=1$, donc G est bien définie.

4b. On a Pour $x\in[0,1[$, $0\leq\frac{x^t}{t^\ell}\leq\frac{1}{t^\ell}$ et $\ell<1$ donc $g: t\to\frac{x^t}{t^\ell}$ est intégrable sur $]0,1]$, d'autre part $\frac{x^t}{t^\ell} = \frac{e^{t\ln x}}{t^\ell} \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ donc g est intégrable sur $[1,+\infty[$ par suite g est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'autre part g est décroissante sur $]0,+\infty[$ donc

$$\forall n\geq 1,\quad \int_n^{n+1}g(t)dt\leq g(n)\leq\int_{n-1}^n g(t)dt$$

et donc $\int_1^{+\infty}g(t)dt\leq G(x)\leq\int_0^{+\infty}g(t)dt$

Or $\int_0^1 g(t)dt \leq \int_0^1\frac{1}{t^\ell}dt = \frac{1}{1-\ell}$ donc $I(x)-\frac{1}{1-\ell}\leq G(x)\leq I(x)$ avec $I(x) = \int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\ell}dt$.

D'autre part en posant $u=-t\ln x = t|\ln x|$ on obtient :

$$I(x) = \frac{1}{(|\ln x|)^{1-\ell}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u^\ell}du \underset{x\to1^-}{\sim}\frac{1}{(1-x)^{1-\ell}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u^\ell}du = \frac{\Gamma(1-\ell)}{(1-x)^{1-\ell}}\underset{x\to1^-}{\to}+\infty$$

donc $I(x)-\frac{1}{1-\ell}\underset{x\to1^-}{\sim}I(x)$ d'où $G(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\frac{\Gamma(1-\ell)}{(1-x)^{1-\ell}}$.

4c. On a $u_n(\alpha)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ell\Gamma(\ell)}{n^\ell}$ donc d'aprés Le résultat préliminaire on a

$$\ell\Gamma(\ell)G(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(\alpha)x^n$$

4d. On a $\ell\Gamma(\ell)G(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(\alpha)x^n$, donc d'aprés a) $\ell\Gamma(\ell)G(x)\underset{x\to1^-}{\sim}x(1-x)^{\ell-1}u_1(\alpha)$ et ensuite d'aprés b)

$$\ell\Gamma(\ell)\Gamma(1-\ell)(1-x)^{\ell-1}\underset{x\to1^-}{\sim}x(1-x)^{\ell-1}u_1(\alpha)$$

Par unicité de la limite on en déduit que $u_1(\alpha) = \ell\Gamma(\ell)\Gamma(1-\ell)$.

Partie 2

1. 1a. On a $f: t\to t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$

$f(t)\underset{t\to0}{\sim}\frac{1}{t^{1-x}}$ et $x>0$ donc $1-x<1$.

$f(t)\underset{t\to1}{\sim}\frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ et $y>0$ donc $1-y<1$.

ALors f est intégrable sur $]0,1[$.

En faisant le changement de variable $u=1-t$ on obtient $\beta(x,y)=\beta(y,x)$, on aura

$$\begin{aligned}\beta(x+1,y) &= \int_0^1(1-t)^{y-1}t^x dt = \left[-\frac{1}{y}(1-t)^y t^x\right]_0^1+\int_0^1\frac{x}{y}t^{x-1}(1-t)^y dt\\ &= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}dt\\ &= \frac{x}{y}\int_0^1(t^{x-1}-t^x)(1-t)^{y-1}dt\\ &= \frac{x}{y}(\beta(x,y)-\beta(x+1,y))\end{aligned}$$

donc $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$

1b. Si $n\in\mathbb{N}^*$, $\beta(n,y)=\left[\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\beta(k+1,y)}{\beta(k,y)}\right]\beta(1,y)=\left[\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+y}\right]\frac{1}{y}=\frac{(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+y)}$

1c. Soit $f:D=]0,+\infty[\times]0,1[\to\mathbb{R}$, $(x,t)\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$, pour tout $n\geq 0$ la fonction $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}:(x,t)\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ln t)^n$ est continue sur D

Dominations : Soit $x\in[a,b]\subset]0,+\infty[$.

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right|=t^{x-1}(1-t)^{y-1}|\ln t|^n\leq\varphi_n(t)=t^{a-1}(1-t)^{y-1}|\ln t|^n$$

Intégrabilité de φ_n :

On a φ_n est continue sur $]0,1[$.

$\varphi_n(t)\underset{t\to1}{\sim}(1-t)^{y-1}|t-1|^n=\frac{1}{(1-t)^{1-(n+y)}}$ et $1-(n+y)<1$.

$\varphi_n(t)\underset{t\to0}{\sim}t^{a-1}|\ln t|^n=o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ et $1-\frac{a}{2}<1$.

donc φ_n est intégrable sur $]0,1[$, par théorème de dérivation on conclut que β est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et $\beta^{(n)}(x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ln t)^n dt$

1d. On a $(\ln\beta_y)''=\frac{\beta_y''\beta_y-(\beta_y')^2}{\beta_y^2}$, posons

$$f(t)=\ln(t)\sqrt{t^{x-1}(1-t)^{y-1}},\quad g(t)=\sqrt{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}$$

On a f et g sont de carré intégrable sur $]0,1[$ donc d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2\leq\int_0^1 f(t)^2dt\int_0^1 g(t)^2dt$$

soit

$$\left(\int_0^1\ln(t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\right)^2\leq\int_0^1(\ln(t))^2t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

par suite $(\beta_y')^2\leq\beta_y''\beta_y$, d'où $(\ln\beta_y)''\geq 0$, finalement $\ln\beta_y$ est convexe.

2. **2a.** On a $\beta(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\beta(x,y)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{x}{y}\beta(x,y)$, d'autre part l'application $u\to\beta(u,y)$ est continue sur $]0,+\infty[$ en particulier continue en 1 donc $\beta(x+1,y)\underset{x\to0^+}{\sim}\beta(1,y)=\frac{1}{y}$ d'où $\beta(x,y)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{x}$ en particulier $\lim_{x\to0^+}\beta(x,y)=+\infty$.

2b. On a $u_n:t\to\frac{(x\ln t)^n}{n!}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$.

$|u_n(t)|\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{|x\ln t|^n}{n!}\underset{t\to0^+}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\|u_n(t)|\underset{t\to1^-}{\sim}\frac{|x|^n}{n!}\frac{1}{(1-t)^{1-(n+y)}}$ avec $1-(n+y)<1$

donc u_n est intégrable sur $]0,1[$.

On a $\sum_{k=0}^n|u_k|=\sum_{k=0}^n\frac{|x\ln t|^n}{n!}(1-t)^{y-1}\leq(1-t)^{y-1}e^{|x\ln t|}=(1-t)^{y-1}e^{-|x|\ln t}$

donc $\sum_{k=0}^n|u_k|\leq\frac{(1-t)^{y-1}}{t^{|x|}}$, l'application $f:t\longmapsto\frac{(1-t)^{y-1}}{t^{|x|}}$ est continue sur $]0,1[$

$f(t)\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{1}{t^{|x|}}$ avec $|x|<1$ et $f(t)\underset{t\to1^-}{\sim}\frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ avec $1-y<1$ donc f est intégrable sur $]0,1[$ par suite $\sum_{k=0}^n\int_0^1|u_k|\leq\int_0^1 f$.

On a $\sum_{k\geq0}\int_0^1|u_k|$ est une série à termes positifs de somme partielle majorée elle est donc convergente.

2c. On a pour $|x|<1$, $\beta(x+1,y)=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt$ et pour $t\in]0,1[$

$t^x(1-t)^{y-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)$, avec $u_n(t)=\frac{(x\ln t)^n}{n!}(1-t)^{y-1}$, d'aprés b) on a u_n est intégrable sur $]0,1[$ et $\sum_{n\geq0}\int_0^1|u_n|$ converge donc par théorème d'inversion série intégrale on a $\beta(x+1,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ où $a_n=\int_0^1\frac{(\ln t)^n}{n!}(1-t)^{y-1}dt$, ainsi l'application $x\to\beta(x+1,y)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ donc le rayon de convergence R vérifie $R\geq1$, d'autre part d'aprés a) on a

$\lim_{x\to0^+}\beta(x,y)=+\infty$ donc $\lim_{x\to(-1)^+}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\lim_{x\to(-1)^+}\beta(x+1,y)=+\infty$ donc $R\leq1$

Finalement $R=1$.

3. **3a.** On a $\int_0^n(1-\frac{t}{n})^nt^{x-1}dt=\int_0^{+\infty}f_n(t)dt$ avec

$$f_n(t)=\begin{cases}(1-\frac{t}{n})^nt^{x-1}\text{ si }t\leq n\\ 0\text{ si }t>n\end{cases}$$

On a $\forall n \geq t$, $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\exp(n\ln(1-\frac{t}{n}))t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1}$.

On a par convexité de exp, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x \leq e^x$, donc pour $t \leq n$ on a

$$|f_n(t)| = (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} \leq \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n t^{x-1} = t^{x-1}e^{-t}.$$

et pour $t > n$ on a $|f_n(t)| = 0 \leq t^{x-1}e^{-t}$.

Ainsi $\forall t > 0$, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ avec $\varphi : t \to t^{x-1}e^{-t}$ intégrable sur $]0,+\infty[$ donc par théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} = \Gamma(x)$$

3b. On a $\displaystyle\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \int_0^1 (1-u)^n(nu)^{x-1}ndu = n^x\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}du$

$= n^x\beta(n+1,x) = \dfrac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+x)}$ donc d'aprés a) on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+x)} = \Gamma(x)$.

3c. Notons $p_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(k+x)$, on a alors

$$p_n(x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{n+1}}\prod_{k=0}^{n}(2k+1+2x) = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{\prod_{k=0}^{2n+1}(k+2x)}{\prod_{k=0}^{n}(2k+2x)} = \frac{1}{2^{2n+2}}\frac{p_{2n+1}(2x)}{p_n(x)}$$

D'oÃ¹ $p_n(x+\frac{1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2^{2n+1}}\dfrac{p_{2n}(2x)}{p_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2^{2n+1}}\dfrac{(2n)^{2x}(2n)!}{\Gamma(2x)}\dfrac{\Gamma(x)}{n^x n!}$, soit

$$p_n(x+\frac{1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2^{2n+1}}\frac{n^x(2n)!}{n!}\frac{(2)^{2x}\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}$$

or $p_n(x+\frac{1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{x+\frac{1}{2}}n!}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}$ donc $\dfrac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{(2)^{2x-1}\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}$ et d'aprés la formule de Stirling on a

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

il en résulte par unicité de la limite que $\dfrac{(2)^{2x-1}\Gamma(x)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2x)} = \dfrac{1}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}$, finalement

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

4. 4a. On a $\Gamma(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+x)}$ donc $\Gamma(1-x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-x}n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+1-x)}$ donc

$\Gamma(x)\Gamma(1-x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n(n!)^2}{\prod_{k=0}^{n}(k+x)\prod_{k=1}^{n+1}(k-x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(n!)^2}{x\prod_{k=1}^{n}(k^2-x)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2})}$ finalement

$$\frac{1}{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2}).$$

4b. On a $1-\dfrac{x^2}{n^2} \geq 1-x^2 > 0$ donc $u_n : x \to \ln(1-\dfrac{x}{n^2})$ est bien définie.

$u_n(0) = 0$ donc la série $\sum u_n(0)$converge, pour $x \neq 0$ on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x^2\dfrac{1}{n^2}$

et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge donc f est bien définie sur $[0,1[$.

On a u_n est continue sur $[0,1[$, soit a$\in]0,1[$ on a

$\|u_n\|_{\infty,[0,a]} \leq -\ln(1-\dfrac{a}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{a}{n^2}$ converge donc $\sum u_n$ cvn sur

[0,a] donc par théorème de continuité f est continue sur $[0,1[$.

D'autre part u_n est de classe C^1 sur $]0,1[$, $u_n'(x) = \dfrac{-2x}{n^2-x^2}$ donc pour

$[a,b] \subset]0,1[$ on a $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq \dfrac{2b}{n^2-b^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2b}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{2b}{n^2}$ converge donc $\sum u_n'$

cvn sur [a,b] donc par théorème de dérivation on a f est de classe C^1 sur $]0,1[$

et $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{-2x}{n^2-x^2}$.

4c. g est paire donc $b_n(g) = 0$ et $a_n(g) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(nt)\cos(xt)dt$

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n+x)t+\cos(n-x)t\,dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n+x)\pi}{n+x}+\frac{\sin(n-x)\pi}{n-x}\right) \\ &= -\frac{2(-1)^n x\sin(x\pi)}{\pi(n^2-x^2)} \end{aligned}$$

g est continue sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 par morçeaux donc la série de Fourier de g cvn vers g, ainsi $g(t)=\frac{\sin(x\pi)}{\pi x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n x\sin(x\pi)}{\pi(n^2-x^2)}\cos(nt)$

4d. Pour $t=\pi$ on déduit de c) que $\cos(x\pi)=\frac{\sin(x\pi)}{\pi x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x\sin(x\pi)}{\pi(n^2-x^2)}$ donc la série $\frac{1}{x}+\sum_{n\geq 1}\frac{2x}{x^2-n^2}$ est convergente et a pour somme $\frac{\pi\cos(x\pi)}{\sin(x\pi)}$

4e. D'aprés b) et d) on a pour $x\in]0,1[$, $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2x}{n^2-x^2}=\frac{\pi\cos(x\pi)}{\sin(x\pi)}-\frac{1}{x}$

donc il existe une constante c tel que $\forall x\in]0,1[$, $f(x)=\ln(\frac{\sin(\pi x)}{x})+c$

et comme f est continue sur $[0,1[$ on obtient en faisant tendre x vers 0

$c+\ln(\pi)=f(0)=0$ donc $c=-\ln\pi$ d'où $f(x)=\ln(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})$

4f. D'aprés a) on a $\frac{1}{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2})$.

D'aprés f) on a $\lim_{n\to+\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2})=\ln(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})$ donc $\frac{1}{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

Finalement $\forall x\in]0,1[$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

4g. D'aprés Partie1,4d) et la question précédente on a :

$u_1(\alpha)=\ell\Gamma(\ell)\Gamma(1-\ell)=\frac{\ell\pi}{\sin(\ell\pi)}$

5. 5a. On a ln g convexe, donc d'aprés les priliminaires on a

$\varphi: t\to\frac{\ln g(t)-\ln g(n)}{t-n}$ est croissante or $x\in]0,1[$ donc $n-1\leq x+n\leq n+1$ par suite

$$\varphi(n-1)\leq\varphi(x+n)\leq\varphi(n+1)$$

d'où

$$\ln g(n)-\ln g(n-1)\leq\frac{\ln g(x+n)-\ln g(n)}{x}\leq\ln g(n+1)-\ln g(n)$$

5b. On a $g(x+n)=\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{g(x+k+1)}{g(x+k)}\right)g(x)=\left(\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)\right)g(x)$. et $g(n+1)=\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+k)\right)g(1)=n!$.

D'aprés a) on a $\left(\frac{g(n)}{g(n-1)}\right)^x\leq\frac{g(x+n)}{g(n)}\leq\left(\frac{g(n+1)}{g(n)}\right)^x$ et on déduit que

$$(n-1)^x\leq\left(\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)\right)\frac{g(x)}{(n-1)!}\leq n^x$$

donc

$$\begin{cases}\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)..(x+n-1)}\leq g(x) & \text{(I)}\\ g(x)\leq\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)..(x+n-1)} & \text{(II)}\end{cases}$$

L'inégalité (I) est vraie $\forall n\in\mathbb{N}^*$, donc en l'appliquant à $n+1$ on obtient :

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)}\leq g(x)$$

D'autre part de (II) on déduit que

$$\frac{n}{n+x}g(x)\leq\frac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)}$$

5c. on a pour $x\in]0,1[$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{n}{n+x}g(x)\leq\frac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)}\leq g(x)$$

En utilisant 3)b) on déduit quand n tend vers $+\infty$:

$$\forall x\in]0,1[,\ g(x)=\Gamma(x)$$

D'autre part si $x=n\in\mathbb{N}^*$ on a

$$g(n)=(n-1)!=\Gamma(n)$$

Si $x\in[1,+\infty[\backslash\mathbb{N}^*$ on pose $n=E(x)$ et $t=x-E(x)\in]0,1[$ on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= g(t+n)=g(t)\prod_{k=0}^{n-1}(t+k) \\ &= \Gamma(t)\prod_{k=0}^{n-1}(t+k)=\Gamma(t+n)=\Gamma(x) \end{aligned}$$

6. Soit $g: x\to\frac{B(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$ on a $g:]0,+\infty[\to\mathbb{R}^{+*}$ continue et :

i) $g(1)=\frac{B(1,y)\Gamma(1+y)}{\Gamma(y)}=\frac{1}{y}\frac{y\Gamma(y)}{\Gamma(y)}=1$.

ii)Pour tout $x > 0$

$$g(x+1) = \frac{B(x+1,y)\Gamma(x+1+y)}{\Gamma(y)} = \frac{xB(x,y)}{x+y}\frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} = xg(x)$$

iii) $\ln g(x) = \ln B(x,y) + \ln\Gamma(x+y) + c$ où c est la constante $-\ln\Gamma(y)$.
Comme $x \to \ln B(x,y)$ et $x \to \ln\Gamma(x+y)$ sont convexe, alors $\ln g$ est convexe comme somme d'applications convexes.

D'aprés 5) on a $g = \Gamma$ càd $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

7. On a $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ et en posant $t = \sin^2(u)$ on obtient

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} u \cos^{2y-1} u\, du \text{ donc } \beta(\frac{x}{2},\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x-1} u\, du$$

par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x u\, du = \frac{1}{2}\beta(\frac{x+1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{x+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{x}{2}+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{x+1}{2})}{\Gamma(\frac{x}{2}+1)}$$

on peut encore écrire par formule du dédoublement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x u\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{x}\frac{\Gamma(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{x}{2})} = \frac{\pi}{x2^{x-1}}\frac{\Gamma(x)}{[\Gamma(\frac{x}{2})]^2}$$

Partie 3

1. On a $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$, donc si on pose $t = x+u$ on obtient

$$\Gamma(x+1) = e^{-x}\int_{-x}^{+\infty}(x+u)^x e^{-u}\,du = (\frac{x}{e})^x \int_{-x}^{+\infty}(1+\frac{u}{x})^x e^{-u} du$$

puis en posant $u = t\sqrt{x}$ on obtient

$$\Gamma(x+1) = (\frac{x}{e})^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}(1+\frac{t}{\sqrt{x}})^x e^{-t\sqrt{x}}\,dt$$

2. On a pour $t > -\sqrt{x_n}$, $f_n(t) = \exp\left(x_n\ln(1+\frac{t}{\sqrt{x_n}}) - t\sqrt{x_n}\right)$ donc pour t non nul on a

$$f_n(t) = \exp[t^2(\frac{\ln(1+\frac{t}{\sqrt{x_n}}) - \frac{t}{\sqrt{x_n}}}{(\frac{t}{\sqrt{x_n}})^2})] = \exp\left[t^2 g(\frac{t}{\sqrt{x_n}})\right] \text{avec } g(u) = \frac{\ln(1+u)-u}{u^2}$$

pour $u > -1$ et u non nul. Comme $f_n(0) = 1$, alors l'égalité

$$f_n(t) = \exp\left[t^2 g(\frac{t}{\sqrt{x_n}})\right]$$

reste valable pour $t = 0$ pour toute valeur de $g(0)$, mais pour que g soit continue en 0 on doit prend $g(0) = -1/2$.

Variations de g : on a

$$g'(u) = -\frac{2}{u^3}(\ln(1+u)-u) + \frac{1}{u^2}(\frac{1}{1+u}-1) = \frac{1}{u^3}(-2\ln(1+u)+2u+\frac{u}{1+u}-u) = \frac{h(u)}{u^3}$$

où $\quad h(u) = -2\ln(1+u) + u + \frac{u}{1+u}h'(u) = \frac{-2}{1+u} + 1 + \frac{1}{(1+u)^2} = (1-\frac{1}{1+u})^2 \geq 0$

donc h est croissante et comme $h(0) = 0$. Alors h a le même signe que u donc g' est positive par suite g est croissante :

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0

3. On a si $t \leq -\sqrt{x_n}$, $f_n(t) = 0 \leq \varphi(t)$.

Si $-\sqrt{x_n} < t \leq 0$, $f_n(t) = \exp t^2 g(\frac{t}{\sqrt{x_n}}) \leq \exp t^2 g(0) = \exp(-\frac{t^2}{2}) = \varphi(t)$.

Si $t > 0$, comme $x_n \geq 1$ alors $\frac{t}{\sqrt{x_n}} \leq t$ et par croissance de g on déduit que :

$f_n(t) = \exp t^2 g(\frac{t}{\sqrt{x_n}}) \leq \exp t^2 g(t) = (1+t)e^{-t} = \varphi(t)$. D'autre part on a f_n positive. Finalement $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_n(t) \leq \varphi(t)$.

4. Limite simple de f_n : On fixe $t \in \mathbb{R}$, comme $-\sqrt{x_n} \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$, alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $-\sqrt{x_n} < t$. Donc

$$\forall n \geq n_0,\ f_n(t) = \exp t^2 g(\frac{t}{\sqrt{x_n}})$$

et comme $\lim\limits_{u\to 0} g(u) = -1/2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction $f : t \to \exp(-\frac{t^2}{2})$.

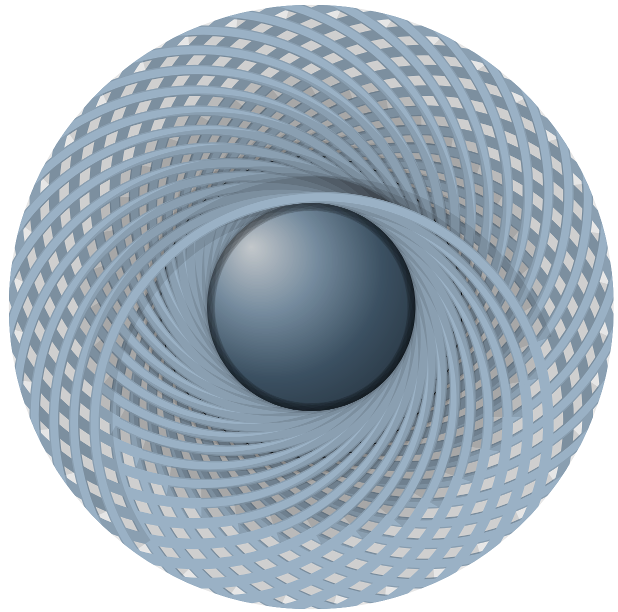
D'aprés 3) on a f_n est dominée par φ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la convergence dominée

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{-\sqrt{x_n}}^{+\infty}(1+\frac{t}{\sqrt{x_n}})^{x_n}e^{-t\sqrt{x_n}}dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

par caractérisation séquentielle de la limite on déduit

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}(1+\frac{t}{\sqrt{x}})^{x}e^{-t\sqrt{x}}\,dt = \sqrt{2\pi}$$

D'où $\Gamma(x+1) = (\frac{x}{e})^x\ \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}(1+\frac{t}{\sqrt{x}})^{x}\ e^{-t\sqrt{x}}\ dt \underset{x\to+\infty}{\sim} (\frac{x}{e})^x\ \sqrt{2\pi x}.$



À propos de l'auteur de l'article

L'auteur est né en 1965 dans la ville de Fès. Il décroche une licence en mathématiques en 1988 à la faculté des sciences de Dhar Al Mahraz dans sa ville natale. Il est ensuite agrégé en mathématique en 1990 et passe la plus grande partie de sa carrière au lycée Moulay Youssef à Rabat où il a eu la charge d'une classe MPSI. Il est actuellement enseignant d'une classe MP au collège Salmane Al Farissi à Salé.

Il a obtenu un doctorat en mathématiques appliquées en 2001 à la faculté des sciences de Rabat. Il s'intéresse actuellement dans le cadre de ces travaux de recherche aux applications des mathématiques à la médecine (problèmes cardio-vasculaires).

Monsieur Errachid, qui fait partie des premières promotions d'agrégatifs au Maroc, bénéficie d'une réputation solide que ce soit dans le milieu des élèves ou celui des enseignants. Réputation justifiée pour sa grande expérience de l'enseignement en classes préparatoires.

« Problème »

Problème de Dirichlet

par Mohammed Errachid

Collège Selmane Al-Farissi – Salé

Le problème porte le nom du Mathématicien allemand du 19ième siécle : Johan Peter Gustav Lejeune Dirichlet. La modélisation mathématique de plusieurs phénomènes physiques comme la diffusion de la chaleur en mode stationnaire ou celle d'un gaz à travers une membrane sous l'effet d'une pression extérieure ou encore lors de l'écoulement d'un liquide à travers un terrain poreux ...etc conduit souvent à un problème du type Dirichlet constitué d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles avec une condition aux bords dite de Dirichlet. L'objet de ce sujet, extrait d'une épreuve du Concours National Marocain, est la résoultion complète d'un exemple de ces problèmes.

Énoncé

Première partie : Questions préliminaires

Les questions de cette partie sont dans une large mesure indépendantes et seront utilisées dans la suite du problème.

1. Soit $F : \begin{array}{l}]0,1[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ (r,\theta)\longmapsto F(r,\theta)\end{array}$ de classe C^2, 2π périodique par rapport à θ. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et $r\in]0,1[$ on pose

$$c_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

1a. En justifiant l'emploi du théorème de dérivation sous le signe $\int$, montrer que c_n est de classe C^2 sur $]0,1[$ et déterminer $c_n'(r)$ et $c_n''(r)$ sous forme d'intégrales.

1b. En effectuant une intégration par parties, montrer qu'on a aussi

$$-n^2c_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

2. Etude d'une série de fonctions
À une "suite" bornée $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de complexes, on associe la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ définies par

$$\forall(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}\ \begin{cases} u_0(r,\theta)=a_0 \\ u_n(r,\theta)=r^n(a_ne^{in\theta}+a_{-n}e^{-in\theta})\text{ pour } n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

et on pose F sa somme.

2a. Montrer que F est bien définie sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ et qu'elle est 2π-périodique par rapport à θ.

2b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est de classe C^∞ et déterminer pour tout $k,s\in\mathbb{N}$ et pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$ la dérivée partielle $\dfrac{\partial^{k+s}u_n}{\partial r^k\partial\theta^s}(r,\theta)$

2c. Montrer que, pour tout $k,s\in\mathbb{N}$ et pour tout segment $[\alpha,\beta]\subset]0,1[$, $\sum\dfrac{\partial^{k+s}u_n}{\partial r^k\partial\theta^s}$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}$.

2d. Citer (avec précision) un théorème qui permet de dériver terme à terme une fonction définie par la somme d'une série convergente sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

2e. Déduire que F est de classe C^2 sur $]0,1[\times\mathbb{R}$, et vérifier que pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$,

$$r^2\frac{\partial^2F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=0$$

3. Résolution d'une suite d'équations différentielles
Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on considère l'équation différentielle

$$x^2y''+xy'-n^2y=0 \qquad (E_n)$$

On appelle S_n l'ensemble des solutions à valeurs complexes sur $]0,1[$ et $\widehat{S_n}$ l'ensemble des fonctions de S_n qui sont bornées.

3a. Montrer que S_n et $\widehat{S_n}$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Quelle est la dimension de S_n?

3b. Trouver S_0 et $\widehat{S_0}$

3c. Pour $n\neq0$, chercher les solutions de E_n de la forme $x\longmapsto x^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R}^*)$

3d. Déterminer S_n pour tout n; et en déduire que $\widehat{S_n}$ est de dimension 1 engendré par la fonction $x\longmapsto x^{|n|}$

Dans la suite de ce problème Ω est le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$ de centre O, de rayon 1.
Γ est le cercle unité et $\overline{\Omega}$ est l'adhérence de Ω, c'est à dire l'union de Ω et de Γ.
Le but *du problème est de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet suivant*

$$\begin{cases}\Delta u=0 \text{ sur } \Omega \\ u=f \text{ sur } \Gamma\end{cases} \qquad (calP)$$

où f est une fonction donnée, définie et continue sur Γ à valeurs réelles.
On appelle solution de $(\mathcal{P})$ une fonction u définie et continue sur $\overline{\Omega}$ à valeurs réelles, coïncidant sur Γ avec f,
de classe C^2 sur Ω et vérifiant

$$\forall(x,y)\in\Omega,\quad\Delta u(x,y)=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)(x,y)=0$$

Deuxième partie : Analyse du problème

1. Soit $\varphi:]0,1[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$

1a. Justifier que φ est de classe C^∞ et déterminer $\Omega'=\varphi(]0,1[\times\mathbb{R})$.

1b. Vérifier que le jacobien de φ ne s'annule pas sur $]0,1[\times\mathbb{R}$.

1c. φ est t-elle un C^∞ difféomorphisme de $]0,1[\times\mathbb{R}$ sur Ω' ?

2. Soit u une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 et posons $F=u\circ\varphi$.

2a. Montrer que F est de classe C^2 sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ et calculer les dérivées : $\dfrac{\partial F}{\partial r}$, $\dfrac{\partial^2F}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^2F}{\partial\theta^2}$ en fonction des dérivées de u par rapport à x et y.

2b. Vérifier que pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$,
$$r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=r^2\Delta u(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

2c. Déduire que
$$\Delta u=0 \text{ sur } \Omega \iff \forall(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R},\ r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=0$$

3. On considère jusqu'à la fin de cette partie une solution u du problème $(\mathcal{P})$ et on pose $F=u\circ\varphi$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, et $r\in]0,1[$, on pose $c_n(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$ comme dans I-1.

3a. En utilisant I montrer que $r\longmapsto c_n(r)$ est dans $\widehat{S}_n$.

3b. En déduire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que :
$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \forall r\in]0,1[,\ c_n(r)=a_n r^{|n|}$$
On associe à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la série de fonctions $\sum u_n$ définie dans I. On admettra que
$$\forall(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R},\ F(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(r,\theta)$$

3c. Montrer que $a_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)e^{-in\theta}d\theta$ (Penser au théorème de la continuité sous le signe intégrale)

4. Quel objectif a t-on montré ? (existence ou unicité de la solution de $(\mathcal{P})$).

Troisième partie : Synthèse

1. Pour $r\in]0,1[$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $P_r(x)=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}r^n(e^{inx}+e^{-inx})$ (P_r est bien définie d'après I)

1a. Montrer les égalités suivantes, pour $r\in]0,1[$ et $x\in\mathbb{R}$
$$P_r(x)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}r^n\cos(nx)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}\right)=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}$$

1b. En déduire que $P_r(x)$ est positif

1c. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, et pour tout $r\in]0,1[$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-x)\,d\theta=1$$
(On pourra, en le justifiant, intégrer terme à terme la somme d'une série)

Pour tout $n\in\mathbb{Z}$ on pose
$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)e^{-in\theta}d\theta$$
et soit $\sum u_n$ la série de fonctions u_n définies sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ associée et soit F sa somme.

2. Montrer que F est bien définie, de classe C^∞ sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ et vérifie
$$r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=0$$

3. Montrer que
$$F(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos t,\sin t)P_r(\theta-t)\,dt$$
Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on pose $g(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$ et on définit pour $(x,y)\in\Omega,\ u(x,y)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\frac{1+(x+iy)e^{-it}}{1-(x+iy)e^{-it}}\,dt\right)$.

4. On admet que u est de classe C^2 sur Ω

4a. Montrer que pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$, $F(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

4b. En déduire que $\Delta u=0$ sur Ω.

5. **5a.** Montrer que $F(r,\theta)-g(\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(g(\theta-t)-g(\theta))\,P_r(t)\,dt$

5b. Montrer que
$$\forall 0<\eta<\pi,\ |F(r,\theta)-g(\theta)|\leqslant\sup_{|x-y|<\eta}|g(x)-g(y)|+\frac{C(1-r^2)}{\sin^2\eta}$$
où C désigne une constante réelle.

5c. En déduire que $\lim\limits_{r\to 1}F(r,\theta)=g(\theta)$, la limite étant uniforme en θ.

6. Conclure.

Fin de l'énoncé

Corrigé

Première partie : Questions préliminaires

1. 1a. L'application $(r,\theta)\longmapsto F(r,\theta)e^{-in\theta}$ est de classe C^2 sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ qui est un ouvert contenant $]0,1[\times[-\pi,\pi]$, alors et en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral sur un segment deux fois, on déduit que c_n est de classe C^2 sur $]0,1[$ avec

$$\begin{aligned} c_n'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ c_n''(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \end{aligned}$$

1b. En intégrant une première fois par parties, on obtient, pour tout $r\in]0,1[$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta=[\frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)e^{-in\theta}]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi}+in\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

et comme F est 2π périodique par rapport à θ, alors $\theta\longmapsto\dfrac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)e^{-in\theta}$ est aussi 2π périodique et par suite $[\dfrac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)e^{-in\theta}]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi}=0$. En intégrant une deuxième fois par parties, nous obtenons enfin

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta &= in\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= in[F(r,\theta)e^{-in\theta}]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi}-n^2\int_{-\pi}^{\pi}F(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \end{aligned}$$

la périodicité par rapport à θ entraîne encore que $[F(r,\theta)e^{-in\theta}]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi}=0$. Il en découle le résultat

$$-n^2c_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

2. Etude d'une série de fonctions

2a. Comme (a_n) est bornée, il existe un réel $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ on ait : $|a_n|\leqslant M$. Alors pour $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$, on a pour tout entier naturel n

$$|u_n(r,\theta)|\leqslant 2Mr^n$$

et comme $r\in]0,1[$, la série géométrique $\sum r^n$ est convergente et par comparaison nous déduisons que $\sum u_n(r,\theta)$ est absolument convergente et donc convergente.

Ce qui justifie que F est bien définie sur $]0,1[\times\mathbb{R}$. Et comme pour tout n, u_n est 2π-périodique par rapport à θ alors il en est de même pour F.

2b. Soit $n\in\mathbb{N}$, par composition d'applications C^∞, les applications $(r,\theta)\longmapsto r^n$, $(r,\theta)\longmapsto a_ne^{in\theta}+a_{-n}e^{-in\theta}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ alors et par produit d'applications de classe C^∞ nous déduisons que u_n est de classe C^∞. Avec pour tout $k,s\in\mathbb{N}$ et pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial^{k+s}u_n}{\partial r^k\partial\theta^s}(r,\theta)=\begin{cases}0 \text{ si } k>n\\ \dfrac{n!(in)^s}{(n-k)!}r^{n-k}(a_ne^{in\theta}+(-1)^sa_{-n}e^{-in\theta}) \text{ sinon}\end{cases}$$

2c. Soient $k,s\in\mathbb{N}$ et $[\alpha,\beta]$ un segment contenu dans $]0,1[$. Alors pour tout $(r,\theta)\in[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}$ et $n\geq k$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^{k+s}u_n}{\partial r^k\partial\theta^s}(r,\theta)\right| &= \left|\frac{n!(in)^s}{(n-k)!}r^{n-k}(a_ne^{in\theta}+(-1)^sa_{-n}e^{-in\theta})\right| \\ &\leqslant 2Mn^{s+1}(n-1)\dots(n-k+1)r^{n-k} \\ &\leqslant 2Mn^{s+1}(n-1)\dots(n-k+1)\beta^{n-k} \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\left\|\frac{\partial^{k+s}u_n}{\partial r^k\partial\theta^s}\right\|_\infty^{[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}}=\sup_{(r,\theta)\in[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k+s}u_n}{\partial r^k\partial\theta^s}(r,\theta)\right|\leqslant 2Mn^{s+1}(n-1)\dots(n-k+1)\beta^{n-k}$$

or, $n^{s+1}(n-1)\dots(n-k+1)\beta^{n-k}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^{k+s}\beta^{n-k}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (d'après la comparaison entre suite géométrique et suite puissance). Et comme $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge nous déduisons par comparaison que $\sum\left\|\dfrac{\partial^{k+s}u_n}{\partial r^k\partial\theta^s}\right\|_\infty^{[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}}$ converge ce qui signifie que $\sum\dfrac{\partial^{k+s}u_n}{\partial r^k\partial\theta^s}$ converge normalement et par suite uniformément sur $[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}$.

2d. Soit $\sum f_n$ une série d'applications définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes

$$\begin{cases}\cdot \text{ Pour tout } n,\ f_n \text{ est de classe } C^1\\ \cdot \sum f_n \text{ converge simplement sur } I\\ \cdot \sum f_n' \text{ converge uniformément sur chaque segment inclus dans } I\end{cases}$$

alors la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n$ est de classe C^1 sur I et pour tout $x\in I$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n\right)'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n'(x)$.

2e. Il s'agit de montrer que $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta\partial r}$ sont définies et continues sur $]0,1[\times\mathbb{R}$. Le raisonnement étant le même, montrons l'existence de $\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial \theta}$ par exemple.
On fixe dans un premier temps r dans $]0,1[$, alors, et d'après les propriétés des applications u_n, la série d'applications $\sum(\theta \longmapsto u_n(r,\theta))$ vérifie les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme sur $\mathbb{R}$. Il en découle que $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ est bien définie en tout point (r,θ) de $]0,1[\times\mathbb{R}$ avec

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial u_n}{\partial \theta}(r,\theta)$$

Puis on démontre de la même manière qu'en fixant θ dans $\mathbb{R}$, la série $\sum\left(r\longmapsto \frac{\partial u_n}{\partial\theta}(r,\theta)\right)$ vérifie aussi les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme sur $]0,1[$, ce qui montre que $\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial \theta}$ est bien défini sur $]0,1[\times\mathbb{R}$, avec

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial \theta}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r\partial \theta}(r,\theta)$$

Ensuite, Soit K un compact contenu dans $]0,1[\times\mathbb{R}$. L'application $p:(x,y)\longmapsto x$ est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en particulier sur le compact K et donc elle y est bornée et y atteint ses bornes ; on en déduit l'existence de $\alpha,\beta\in]0,1[$ $\alpha<\beta$ et tels que $p(K)\subset[\alpha,\beta]$ soit que $K\subset[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}$. De la question I-2-c, on déduit que $\sum\frac{\partial^2 u_n}{\partial r\partial\theta}$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}$ et par héridité sur K. Ainsi la série d'applications $\sum\frac{\partial^2 u_n}{\partial r\partial\theta}$ vérifie les hypothèses du théorème de la continuité terme à terme sur $]0,1[\times\mathbb{R}$, ce qui justifie que $\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial \theta}$ est continue sur $]0,1[\times\mathbb{R}$.
D'où le résultat. Avec pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}nr^{n-1}(a_ne^{in\theta}+a_{-n}e^{-in\theta}),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)r^{n-2}(a_ne^{in\theta}+a_{-n}e^{-in\theta})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}-n^2r^n(a_ne^{in\theta}+a_{-n}e^{-in\theta})$$

on déduit aisément que

$$r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=0$$

3. Résolution d'une suite d'équations différentielles

3a. (E_n) est une équation différentielle du second ordre linéaire homogène et résolue sur $]0,1[$, alors et par application de la théorie de Cauchy Lipschitz on déduit que l'ensemble des solutions (S_n) est un espace vectoriel de dimension 2. Comme l'ensemble des applications bornées est stable par combinaison linéaire et que l'application nulle sur $]0,1[$ est une solution de (E_n) bornée, on déduit que $\widehat{S_n}$ est un sous espace vectoriel de S_n et donc lui même est un espace vectoriel.

3b. Soit $f:]0,1[\to\mathbb{C}$ une application deux fois dérivables. Alors on a

$$\begin{aligned} f\in S_0 &\iff \forall x\in]0,1[,\ x^2f''(x)+xf'(x)=0\\ &\iff \forall x\in]0,1[,\ xf''(x)+f'(x)=0\\ &\iff \forall x\in]0,1[,\ (f'(x)x)'=0\\ &\iff \exists a\in\mathbb{C},\ f'(x)=\frac{a}{x}\ \forall x\in]0,1[\\ &\iff \exists a,b\in\mathbb{C},\ f(x)=a\ln x+b,\ \forall x\in]0,1[\end{aligned}$$

d'où $S_0=vect_{\mathbb{C}}(x\in]0,1[\longmapsto\ln x,\ x\in]0,1[\longmapsto 1)$. On remarque que $\widehat{S_0}\subset S_0$, or pour $a,b\in\mathbb{C}$, tel que $a\neq 0$ l'application $x\longmapsto a\ln x+b$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0. Ainsi $\widehat{S_0}$ est le sous espace formé des applications constantes sur $]0,1[$.

3c. Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Posons $f:x\longmapsto x^\alpha$ est de classe C^2 sur $]0,1[$ avec

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\text{ et }f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

de sorte que

$$f\in S_n\iff\alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2=0\iff\alpha=\pm n$$

donc les solutions de E_n de la forme $x\longmapsto x^\alpha$ sont $x\longmapsto x^n$ et $x\longmapsto x^{-n}$

3d. Soit $n\in\mathbb{Z}^*$. D'après la question 3-a précédente, on sait que S_n est un espace de dimension 2, les solutions précédentes $x\longmapsto x^n$ et $x\longmapsto x^{-n}$ étant linéairement indépendantes, on déduit que $S_n=vect_{\mathbb{C}}(x\longmapsto x^n, x\longmapsto x^{-n})$; or l'application $x\longmapsto x^{-|n|}$ n'appartient pas à $\widehat{S_n}$, donc $\dim\widehat{S_n}<2$ et comme $x\longmapsto x^{|n|}\in\widehat{S_n}$ alors $\widehat{S_n}$ est un sous espace de dimension 1 engendré par $x\longmapsto x^{|n|}$. Le résultat reste valable pour $n=0$ d'après la question 2-b précédente.

Deuxième partie : Analyse du problème

1. Soit $\varphi :]0,1[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1a. Par opérations sur les applications de classe C^∞, nous obtenons que les deux applications coordonnées $(r,\theta)\longmapsto r\cos\theta$ et $(r,\theta)\longmapsto r\sin\theta$ sont de classe C^∞ ce qui montre que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Quand le système des coordonnées polaires (r,θ) parcourt $]0,1[\times\mathbb{R}$ le point (x,y) parcourt le disque ouvert de centre O et de rayon 1 privé de O : $\Omega'=\Omega\backslash\{O\}$.

1b. Le jacobien de φ en $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$ est égal à

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

qui est différent de 0.

1c. φ n'étant pas injective sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ elle n'est pas un C^∞ difféomorphisme.

2. Soit u une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 et posons $F=u\circ\varphi$.

2a. φ est de classe C^2 sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ à valeurs dans Ω et u est de classe C^2 sur Ω alors et par composition F est de classe C^2 sur $]0,1[\times\mathbb{R}$. Avec pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},\quad \frac{\partial F}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

soit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}&=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}\circ\varphi+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\circ\varphi\\ \frac{\partial F}{\partial\theta}&=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}\circ\varphi+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\circ\varphi\end{aligned}$$

en dérivant une deuxième fois

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}&=\cos\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right]+\sin\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\\ \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}&=-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}-r\sin\theta\left[-r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right]\\ &\quad+r\cos\theta\left[-r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\end{aligned}$$

Comme u est de classe C^2 alors et d'après le théorème de Schwarz $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}&=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}&=-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{aligned}$$

2b. On vérifie aisément des formules précédentes que pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$,

$$r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=r^2\Delta u(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

2c. On suppose que $\Delta u=0$ sur Ω alors et d'après la question précédente on déduit que pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$, $r^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\dfrac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=0$.

Inversement :

On suppose que $\forall(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$, $r^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\dfrac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=0$, alors $\Delta u(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$, cela signifie que pour tout $(x,y)\in D(0,1)\backslash\{(0,0)\}$, $\Delta u(x,y)=0$. Et comme u est de classe C^2 sur Ω, alors le laplacien Δu est continue sur Ω en particulier en $(0,0)$, et donc $\Delta u(0,0)=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \neq}}\Delta u(x,y)=0$, on déduit ainsi que $\Delta u=0$ sur Ω.

3. **3a.** Comme F est de classe C^2 sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ et 2π périodique alors et d'après I-1, $r\longmapsto c_n(r)$ est de classe C^2 sur $]0,1[$ et vérifie

$$-n^2c_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

et comme u est solution de $(\mathcal{P})$, $\Delta u=0$ alors et en utilisant la question 2.c. précédente nous déduisons

$$-n^2c_n(r)=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\right)e^{-in\theta}d\theta$$

des expressions de c_n' et c''_n nous obtenons

$$n^2c_n(r)=r^2c''_n(r)+rc_n'(r)$$

soit que c_n est une solution de l'équation (E_n). D'autre part, et comme F est continue sur le compact $[0,1]\times[-\pi,\pi]$ alors F est bornée sur $[0,1]\times[-\pi,\pi]$. Par suite pour tout $r\in]0,1[$

$$\begin{aligned}|c_n(r)|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(r,\theta)|d\theta\\ &\leqslant\sup_{(r,\theta)\in[0,1]\times[-\pi,\pi]}|F(r,\theta)|\end{aligned}$$

ce qui montre que $c_n \in \widehat{S_n}$.

3b. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme $\widehat{S_n}$ est engendré par $r \longmapsto r^{|n|}$ alors il existe une constante a_n dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall r \in]0,1[\,,\ c_n(r) = a_n r^{|n|}$$

d'où le résultat. Remarquons, en outre, que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$|a_n| = \sup_{r\in]0,1[} |c_n(r)| \leqslant \sup_{(r,\theta)\in[0,1]\times[-\pi,\pi]} |F(r,\theta)|$$

ce qui montre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

3c. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a pour tout $r \in]0,1[$

$$a_n r^{|n|} = c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

et comme l'application $(r,\theta) \in [0,1]\times[-\pi,\pi] \longmapsto u(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-in\theta}$ est continue alors et d'après le théorème de continuité sous le signe intégral sur un segment l'application $r \longmapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-in\theta}d\theta$ est continue sur $[0,1]$, soit que c_n est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. Ainsi en faisant tendre r vers 1, on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r\to 1} u(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)e^{-in\theta}d\theta \end{aligned}$$

4. On vient de montrer que le problème $(\mathcal{P})$ admet au maximum une solution u définie sur $\overline{D(0,1)}$ par

$$\begin{cases} u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n(a_n e^{in\theta} + a_{-n}e^{-in\theta}) \text{ pour } (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D(0,1) \\ u(x,y) = f(x,y) \text{ pour } (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$

où (a_n) est définie de manière unique par

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

Troisième partie : Synthèse

1. 1a. Pour $r \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$ et d'après la formule d'Euler

$$\begin{aligned} P_r(x) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(nx) \\ &= 1 + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{inx} \end{aligned}$$

puis et d'après la somme d'une série géométrique convergente

$$\begin{aligned} P_r(x) &= 1 + \mathrm{Re}\frac{2re^{ix}}{1-re^{ix}} \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}\right) \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x} \quad \text{(en multipliant par la partie conjuguée)} \end{aligned}$$

1b. De ce qui précède, on a donc, $P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{(r-\cos x)^2+\sin^2 x}$ qui est positif pour tout $r \in]0,1[$.

1c. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $r \in]0,1[$. Alors pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$

$$P_r(\theta - x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(n(\theta-x))$$

ce qui suggère de considérer la série de fonctions $\sum v_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n : \theta \in [-\pi,\pi] \to 2r^n\cos(n(\theta-x))$$

et $v_0 = 1$ qui sont des applications continues, de plus $\|v_n\|_\infty = \sup|v_n(\theta)| \leqslant 2r^n$ et $r \in]0,1[$ alors la série $\sum v_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-\pi,\pi]$, ce qui justifie l'intégration terme à terme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-x)\,d\theta &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_n(\theta)d\theta \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n(\theta-x))d\theta \end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n(\theta-x))d\theta = \int_{-\pi-x}^{\pi-x}\cos(nu)du = \frac{1}{n}(\sin n(\pi-x) + \sin n(\pi+x)) = 0$$

Ainsi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-x)\,d\theta = 1$$

2. Comme f est continue sur Γ qui est un compact, alors f est bornée. Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} |a_n| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\cos\theta,\sin\theta)e^{-in\theta}\right|d\theta \\ &\leqslant \sup_{(x,y)\in\Gamma}|f(x,y)| \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée. Par suite et d'après I-2, F est bien définie, de classe C^∞ sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ et vérifie

$$r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=0$$

3. Pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$, on a : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)e^{-in\theta}d\theta$

$$\begin{aligned} F(r,\theta) &= a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}r^n\left(a_ne^{in\theta}+a_{-n}e^{-in\theta}\right) \\ &= a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}r^n\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos t,\sin t)e^{-int}dte^{in\theta}+\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos t,\sin t)e^{int}dte^{-in\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos t,\sin t)dt+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2r^nf(\cos t,\sin t)\cos\left(n(\theta-t)\right)dt \end{aligned}$$

De la convergence de la série $\sum r^n$ et comme f est bornée sur Γ on déduit la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum t\longmapsto r^nf(\cos t,\sin t)\cos\left(n(\theta-t)\right)$ sur $[-\pi,\pi]$ ce qui justifie l'intégration terme à terme et par suite

$$\begin{aligned} F(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos t,\sin t)\left[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}r^n\cos\left(n(\theta-t)\right)\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos t,\sin t)P_r(\theta-t)\,dt \end{aligned}$$

4. **4a.** Pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(r\cos\theta,r\sin\theta) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\frac{1+(x+iy)e^{-it}}{1-(x+iy)e^{-it}}\,dt\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)P_r(\theta-t)\,dt \quad \text{(en utilisant la question III-1-a.)} \end{aligned}$$

d'où, l'égalité : $F(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$ pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$.

4b. Comme u est de classe C^2 et $F(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$ pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$, alors et des questions III-2 et II-2-c, on déduit que $\Delta u=0$ sur Ω.

5. **5a.** Soit $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$. Comme $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\,dt=1$ alors on a :

$$\begin{aligned} F(r,\theta)-g(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)P_r(\theta-t)\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)P_r(\theta-t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta}\left(g(\theta-s)-g(\theta)\right)P_r(s)ds \end{aligned}$$

(en effectuant le changement devariables $s=\theta-t$)

puis, en remarquant que $s\longmapsto\left(g(\theta-s)-g(\theta)\right)P_r(s)$ est 2π périodique, on déduit le résultat : $F(r,\theta)-g(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(\theta-t)-g(\theta)\right)P_r(t)\,dt.$

5b. Soit $\eta\in]0,\pi[$. Par la relation de Chasles, l'inégalité triangulaire et la majoration des intégrales nous obtenons :

$$\begin{aligned} |F(r,\theta)-g(\theta)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\Bigg[&\int_{-\pi}^{-\eta}|g(\theta-t)-g(\theta)||P_r(t)|\,du \\ &+\int_{-\eta}^{\eta}|g(\theta-t)-g(\theta)||P_r(t)|\,dt+\int_{\eta}^{\pi}|g(\theta-t)-g(\theta)||P_r(t)|\,dt\Bigg] \end{aligned}$$

g est une application continue et périodique alors elle est bornée. Ce qui justifie l'existence de $C=\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}|g(x)-g(y)|$ dans $\mathbb{R}$. On obtient aussi que, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et $t\in[-\eta,\eta]$,

$$|g(\theta-t)-g(\theta)|\leqslant\sup_{|x-y|\leqslant\eta}|g(x)-g(y)|=\sup_{|x-y|<\eta}|g(x)-g(y)|$$

D'autre part, on remarque que $t\longmapsto P_r(t)=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$ est paire et décroissante, positive sur $[0,\pi]$. On en déduit ainsi que

$$\begin{aligned} \int_{-\eta}^{\eta}|g(\theta-t)-g(\theta)||P_r(t)|\,dt &\leqslant 2\eta\sup_{|x-y|<\eta}|g(x)-g(y)|\leqslant 2\pi\sup_{|x-y|<\eta}|g(x)-g(y)| \\ \int_{\eta}^{\pi}|g(\theta-t)-g(\theta)||P_r(t)|\,dt &\leqslant C(\pi-\eta)\frac{1-r^2}{(r-\cos\eta)^2+\sin^2\eta}\leqslant C\pi\frac{(1-r^2)}{\sin^2\eta} \\ \int_{-\pi}^{-\eta}|g(\theta-t)-g(\theta)||P_r(t)|\,dt &\leqslant C\pi\frac{(1-r^2)}{\sin^2\eta} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité :

$$\forall 0<\eta<\pi,\ |F(r,\theta)-g(\theta)| \leqslant \sup_{|x-y|<\eta} |g(x)-g(y)| + \frac{C(1-r^2)}{\sin^2\eta}$$

5c. g est une application continue et périodique sur $\mathbb{R}$ alors et d'après un résultat classique, g est uniformément continue, donc pour $\boxed{\varepsilon>0}$, il existe un réel $\eta>0$ qu'on peut toujours choisir tel que $\eta<\pi$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x-y|<\eta \Longrightarrow |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

et comme $\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{C(1-r^2)}{\sin^2\eta} = 0$, alors il existe $\boxed{0<\alpha<1}$ tel que pour tout $r\in]\alpha,1[$, $\dfrac{C(1-r^2)}{\sin^2\eta}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, on déduit de la question précédente que

$$\forall r\in]\alpha,1[,\ \forall\theta\in\mathbb{R},\quad |F(r,\theta)-g(\theta)|<\varepsilon$$

D'où le résultat.

6. Soit $(a,b)=(\cos\theta,\sin\theta)\in\Gamma$, pour tout $(x,y)\in\Omega$, on pose $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ avec $r\in]0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On déduit de la question précédente que pour tout $\boxed{\varepsilon>0}$, il existe $\boxed{\alpha>0}$ tel que pour tout $(x,y)\in\Omega$ on a :

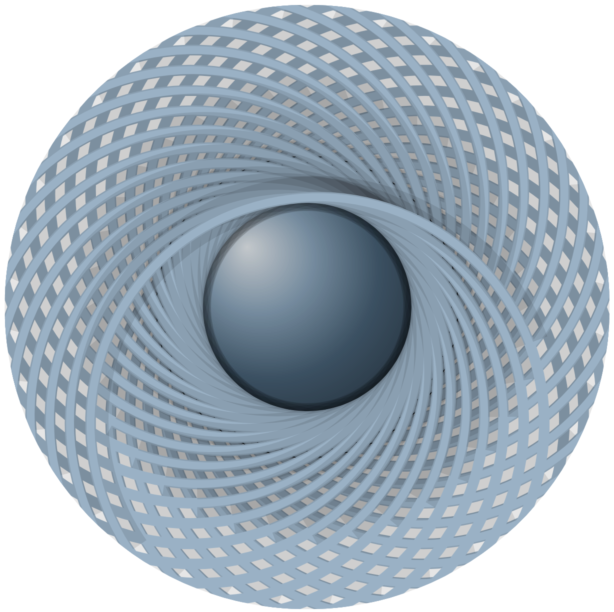
$$\|(x,y)\|_2 = r<\alpha \Longrightarrow |u(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$$

On prolonge alors u par continuité à $\overline{\Omega}$ par :

$$u(x,y)=f(x,y) \text{ pour tout } (x,y)\in\Gamma$$

ce qui permet de construire une solution du problème $(\mathcal{P})$ qui est donc l'unique solution d'après la partie II.

❑



Réflexion pédagogique sur la notion de fonction continue sur une partie

L'enseignement de la continuité et de la limite se fait par plusieur approches pédagogiques selon le niveau, le contexte et les objectifs. En classes préparatoires scientifiques ces notions sont introduites en premiére année dans le contexte des fonctions réelles définies uniquement sur des intervalles. Lors de cette introduction, pour une fonction f définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, on introduit souvent la définition suivante :

Définition 1 : Si $[a,b]$ est un segment contenu dans I, alors on dit que f est continue sur $[a,b]$ si f est continue en tout point de $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b, ce qui sous entend naturellement que f n'est pas nécessairement continue en a ou en b.

Cette définition trouve sa justification lors des énoncés des théorèmes classiques comme le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de Rolle, des accroissements finis...etc.

La question posée : *Comment généraliser la notion de continuité sur une partie d'une fonction entre espaces vectoriels normés ?*

Souvent dans un but de simplification, on introduit uniquement la définition d'une fonction continue f sur son domaine D en précisant que f est dite continue sur D pour exprimer que f est continue en tout point de D. Alors, que signifie f continue sur une partie A de D ? En consultant quelques références contemporains et lors de discussions avec des collègues, il semble qu'on sous entend, à tort, par f continue sur une partie A la continuité de f en tout point de A, ce qui contredit la définition 1, et en tout cas contredit la définition universelle de cette notion.

Dans le but de l'unification des notions enseignées en classes préparatoires et pour éviter toute confusion dans ce sens, je propose qu'on fasse la distinction entre fonction continue sur une partie et fonction continue en tout point de cette partie à travers les définitions suivantes :

Étant donné une fonction f de domaine une partie D d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F, on dira que

- f est continue si f est continue en tout point de D ;
- f est continue sur une partie A de D si la restriction de f à A : $f_{|A}$ est continue (ce qui n'entraine pas nécessairement que f soit continue en tout point de A)

Il est clair que les deux notions coïncident lorsque $A = D$. Et il va de soit que ce principe soit adopté dans les définitions des notions similaires tel que la dérivabilité ou la classe d'une fonction.

Mohammed Errachid

« Problème »

Endomorphismes nilpotents et crochets de Lie

par Mohammed Errachid
Collège Selmane Al-Farissi – Salé

Le problème qui est un extrait d'une épreuve du concours de l'école Centrale, se propose de montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie est nilpotent si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$. Il donne ensuite une application via les crochets de Lie de ce résultat.

Enoncé

Rappels : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ si $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Dans tout l'énoncé E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit de façon similaire un *endomorphisme nilpotent* d'indice p, de l'espace E. La composée de deux endomorphismes u et v de E sera notée uv au lieu de $u \circ v$.

I. Une caractérisation des endomorphismes nilpotents

1. On note $\mathcal{V}_n$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

1a. Montrer que $\mathcal{V}_n$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

Pour tout $(h,k) \in \{1,\dots,n\}^2$, E_{hk} est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme générique d'indices i et j : $\delta_i^h \delta_j^k$.

1b. Pour $h,k,l,m \in \{1,\dots,n\}$, calculer dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $E_{hk}E_{lm}$ puis $E_{hk}E_{kh} - E_{kh}E_{hk}$.

1c. Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

i. Montrer que pour tout $h,k\, [\![1,n]\!]$ tel que $h \neq k$, on a :

$$\varphi(E_{hh}) = \varphi(E_{kk}) \text{ et } \varphi(E_{hk}) = 0$$

ii. Déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\varphi = \lambda tr$.

2. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice p.

2a. Montrer que $p \leqslant n$

2b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure à diagonale nulle (on dit que c'est **une matrice triangulaire supérieure stricte**)

2c. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes constitue une sous-algèbre non-unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2d. Déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Tr}(u^k) = 0$

3. Inversement, soit u un endomorphisme de E tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Tr}(u^k) = 0$.

3a. Soit π_u le polynôme minimal de u. Montrer que son coefficient constant est nul et qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\pi_u = X^q Q$ avec $q \geq 1$ et $Q(0) \neq 0$. On pose $F = \ker(Q(u))$ et $G = \ker(u^q)$.

3b. Montrer que $E = F \oplus G$

3c. Montrer que F et G sont stables par u. Soient v et w les endomorphismes induits par u sur F et G respectivement.

3d. Que peut-on dire de w ?

3e. Déduire que $\operatorname{Tr}(v^k) = \operatorname{Tr}(u^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3f. Calculer $Q(v)$ et montrer que $F = \{0\}$.

3g. Déduire que u est nilpotent. Enoncer le résultat objet de cette partie.

II. Quelques propriétés du crochet de Lie

Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on définit leur crochet de Lie par : $[f,g] = fg - gf$.

1. 1a. Montrer que l'on définit ainsi une application $[.,.]$ de $(\mathcal{L}(E))^2$ dans $\mathcal{L}(E)$, bilinéaire et antisymétrique.

1b. Quels sont les endomorphismes f de E vérifiant : $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \ [f,g] = 0$.

1c. Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$, calculer $tr[f,g]$.

1d. Pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E)$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\begin{aligned} [f, g^{p+1}] &= [f, g^p]g + g^p[f,g] \\ [f^{p+1}, g] &= [f^p, g]f + f^p[f,g] \end{aligned}$$

2. Soit π un projecteur de E. Établir que $\operatorname{rg}(\pi) = \operatorname{Tr}(\pi)$ et que si $\lambda \notin \{0,1\}$ alors $\pi - \lambda id_E$ est inversible.

3. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

3a. On suppose qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $[f,g] = \lambda f$. Montrer qu'il existe une suite de réels non nuls $(a_p)_{p \geq 1}$ telle que

$$\forall p, \quad [f^p, g] = a_p f^p$$

Déduire que f est nilpotent.

3b. Que dire de g si $[f,g] = \lambda g$ avec $\lambda \neq 0$?

3c. Montrer que s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $[f,g] = \alpha f + \beta g$, alors $\alpha f + \beta g$ est nilpotent.

4. On suppose que f et g sont deux projecteurs distincts de E tels que $[f,g] = \alpha f + \beta g$ et $\alpha \notin \{0,1\}$.

4a. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = gh$ puis que $gf = f$. On suppose dans la suite que $f \neq 0$

4b. En considérant un vecteur x non nul de $\operatorname{Im}(f)$, montrer que $\alpha + \beta = 0$

4c. Prouver que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g)$. Déduire l'existence d'un vecteur x non nul de $\ker(f)$ qui n'appartient pas à $\ker g$, et montrer que $\alpha = -1$.

4d. Montrer que $g - f$ est nilpotent. Quel est son indice ?

4e. Réciproquement que dire de $[f,g]$ si $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g)$.

III. Application

Dans cette partie $\dim(E) = 3$ et u, v et w sont des endomorphismes de E tels que

$$[u,v] = 2v,\ [u,w] = -2w \text{ et } [v,w] = u$$

1. Montrer que v et w sont nilpotents.

2. Etablir que pour $p \geq 1$, $[w, v^p] = -p(u - (p-1)id_E)v^{p-1}$

3. On suppose désormais que l'indice de nilpotence de v est 3 et on choisit $x \in E$ tel que $y = v^2(x) \neq 0$.
Calculer $u(y)$. Pour tout $i \geq 1$, on pose $e_i = w^{i-1}(y)$.

4. Montrer qu'il existe $s \in \{1,2,3\}$ tel que $e_s \neq 0$ et $e_{s+1} = 0$. Que dire de la famille $(e_1, \dots, e_s)$.

5. **5a.** Calculer $u(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$.

5b. Même question pour $v(e_i)$.

5c. Montrer que le sous espace F engendré par $(e_1, \dots, e_s)$ est stable par u, v et w. On note u', v' et w' les endomorphismes induits sur F par u, v et w respectivement. A l'aide de $\mathrm{Tr}(u')$ calculer s.

6. Donner relativement à une base de E bien choisie les matrices de u, v et w.

Fin de l'énoncé

Corrigé

I. Une caractérisation des endomorphismes nilpotents

1. **1a.** L'application $tr : A \in \mathcal{M}_n \to \mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{R}$ définit une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n$. Son noyau : $\mathcal{V}_n$ est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n$, c'est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ de dimension $n^2 - 1$; (D'ailleurs une base de cet espace est $(E_{h,k})_{h\neq k} \cup ((E_{h,h} - E_{1,1})_{h\neq 1})$.

1b. Soient $h, k, l, m \in \{1, \dots, n\}$, et soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$, alors on a :

$$\begin{aligned} E_{hk}E_{lm}(i,j) &= \sum_{p=1}^{p=n} E_{hk}(i,p)E_{lm}(p,j) \\ &= \sum_{p=1}^{p=n} \delta_i^h \delta_p^k \delta_p^l \delta_j^m \\ &= \delta_i^h \delta_j^m \sum_{p=1}^{p=n} \delta_p^k \delta_p^l \\ &= \delta_i^h \delta_j^m \delta_k^l \\ &= \delta_k^l E_{h,m}(i,j) \end{aligned}$$

On en déduit que : $E_{hk}E_{lm} = \delta_k^l E_{h,m}$ et que $E_{hk}E_{kh} - E_{kh}E_{hk} = E_{hh} - E_{kk}$.

1c. **i.** Soient $h, k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $h \neq k$ on a, de la linéarité de φ et de la question précédente :

$$\begin{aligned} \varphi(E_{hh}) - \varphi(E_{kk}) &= \varphi(E_{hh} - E_{kk}) \\ &= \varphi(E_{hk}E_{kh} - E_{kh}E_{hk}) \\ &= \varphi(E_{hk}E_{kh}) - \varphi(E_{kh}E_{hk}) \\ &= 0 \text{ (de la propriété de } \varphi) \end{aligned}$$

d'où $\varphi(E_{hh}) = \varphi(E_{kk})$. D'autre part et en prenant, dans la question précédente toujours, $k = l = m$ on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(E_{hk}) &= \varphi(E_{hk}E_{kk}) \\ &= \varphi(E_{kk}E_{hk}) \text{ (de la propriété de } \varphi) \\ &= 0 \text{ (puisque } E_{kk}E_{hk} \text{ est la matrice nulle)} \end{aligned}$$

d'où $\varphi(E_{hk}) = 0$.

ii. On pose donc λ la valeur commune de $\varphi(E_{hh})$ pour $h \in \{1, \ldots, n\}$ et soit $A = (a_{i,j})$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \varphi\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}E_{i,j}\right)\\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\varphi\left(E_{i,j}\right) \text{ (par linéarité de } \varphi)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\varphi\left(E_{i,i}\right) \text{ (puisque } \varphi(E_{i,j}) = 0 \text{ pour } i \neq j)\\
&= \lambda\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}
\end{aligned}$$

On déduit $\varphi = \lambda tr$.

2. 2a. Comme $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, alors le polynôme minimal π_u de u est X^p. Or, on sait que $\deg(\pi_u) \leqslant \dim E = n$ d'où $p \leqslant n$.

2b. Comme le polynôme minimal, X^p, de u est scindé sur $\mathbb{R}$ alors u est trigonalisable, c'est à dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. De plus la diagonale de cette matrice est constituée des valeurs propres de u qui coincident avec les racines de $\pi_u = X^p$. On déduit que la diagonale est nulle

2c. Sachant que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre (unitaire) de $\mathcal{M}_n$ et d'après les propriétés des opérations sur les diagonales de ces matrices, on vérifie aisément que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes est non vide (car il contient la matrice nulle), stable par combinaison linéaire et par multiplication ce qui entraine que c'est une sous-algèbre non-unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2d. Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure stricte. Des propriétés de la trace nous avons, pour$k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Tr}(u^k) = \operatorname{Tr}(A^k)$ et de la question précédente, on déduit que A^k est aussi triangulaire supérieure stricte et donc $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$ ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Tr}(u^k) = 0$.

3. 3a. Posons $\pi_u = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_1X + a_0$. On a $\pi_u(u)$ est nul donc $u^p + a_{p-1}u^{p-1} + \ldots + a_1u + a_0 id_E = 0$ et par linéarité de la trace et de l'hypothèse faite sur u on déduit que : $a_0\operatorname{Tr}(id_E) = 0$ soit que $a_0 = 0$ (puisque $\operatorname{Tr}(id_E) = \dim E \neq 0$). Donc le coefficient constant de π_u est nul ce qui signifie que 0 est une racine de π_u donc l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine de π_u est un entier naturel q non nul, d'où l'existence d'un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\pi_u = X^qQ$ avec $q \geq 1$ et $Q(0) \neq 0$.

3b. Comme $Q(0) \neq 0$ alors X^q et Q sont premiers entre eux alors et d'après le théorème de décomposition des noyaux on a : $E = \ker \pi_u(u) = \ker Q(u) \oplus \ker(u^q)$. Soit que $E = F \oplus G$

3c. Comme u^q et $Q(u)$ sont des polynômes en u alors ils commutent avec u et par suite leurs noyaux sont stables par u. Ainsi F et G sont stables par u.

3d. On a $w \in \mathcal{L}(G)$, or pour tout x de G on a : $w^q(x) = u^q(x) = 0$ car $G = \ker u^q$; donc w^q est nul ce qui signifie que w est un endomorphisme nilpotent.

3e. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et considérons une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. Comme F et G sont stables par u alors la matrice A de u dans cette base est diagonale par blocs de la forme $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où B est une matrice représentant v dans une base de F et C représente w dans une base de G. Et d'après les propriétés des opérations matricielles par blocs, on a : $A^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ 0 & C^k \end{pmatrix}$ par suite : $\operatorname{Tr}(u^k) = \operatorname{Tr}(A^k) = \operatorname{Tr}(B^k) + \operatorname{Tr}(C^k) = \operatorname{Tr}(v^k) + \operatorname{Tr}(w^k)$. Or, w étant nilpotent et comptenu des résultats de la question 1. on déduit que $\operatorname{Tr}(w^k) = 0$ et qu'on a : $\operatorname{Tr}(v^k) = \operatorname{Tr}(u^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3f. $Q(v) \in \mathcal{L}(F)$ et pour tout x de F on a : $Q(v)(x) = 0$ puisque $F = \ker Q(v)$ donc $Q(v) = 0$. Posons $Q = \sum_{k=0}^{s} \alpha_k X^k$ alors $\sum_{k=0}^{s} \alpha_k v^k = 0$, et en prenant les traces et compte tenu du fait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\operatorname{Tr}(v^k) = \operatorname{Tr}(u^k) = 0$ (d'après notre hypothèse) on déduit que : $\alpha_0 \dim(F) = 0$. Or, $\alpha_0 = Q(0) \neq 0$ donc $\dim F = 0$ d'où $F = \{0\}$.

3g. De ce qui précéde on déduit que $E = G = \ker(u^q)$ donc $u^q = 0$ ce qui signifie que u est nilpotent. Comparant ce fait avec le résultat de la question I-1, on dédui l'équivalence

$$u \text{ nilpotent si, et seulement si } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{Tr}(u^k) = 0$$

II. Quelques propriétés du crochet de Lie

1. 1a. Il est claire que pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on a : $[f, g] = -[g, f]$ ce qui signifie que $[.,.]$ est antisymétrique. De plus pour tout $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a .

$$[\lambda f + g, h] \quad = \quad (\lambda f + g)h - h(\lambda f + g)$$

$$= \lambda fh + gh - \lambda hf - hg \text{ (d'après les propriétés des opérations sur les endomorphismes)}$$
$$= \lambda[f,h] + [g,h]$$

ce qui montre que $[.,.]$ est linéaire à gauche et par antisymétrie on déduit qu'il est aussi linéaire à droite. Donc $[.,.]$ est bien bilinéaire et antisymétrique.

1b. Résultat classique : On doit savoir que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties. (Pour une preuve, on se donne un endomorphisme f qui n'est pas une homothétie, alors il existe un vecteur e_1 de E tel que $(e_1, f(e_1))$ est libre (propriété caractéristique des homothéties), on complète cette famille en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_2 = f(e_1)$ et on construit un endomorphisme g de E tel que $g(e_1) = e_1$ et $g(e_2) = e_1 + e_2$ puis on vérifie que $fg \neq gf$...)

1c. $tr[f,g] = 0$.

1d. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}[f,g^p]g + g^p[f,g] &= fg^{p+1} - g^pfg + g^pfg - g^{p+1}f \\ &= [f,g^{p+1}] \text{ de même} \\ [f^{p+1},g] &= [f^p,g]f + f^p[f,g]\end{aligned}$$

2. Soit π un projecteur de E. On a donc $E = \mathrm{Im}\pi \oplus \ker\pi$ et $\mathrm{Im}\pi = \ker(\pi - id_E)$, donc dans une base adaptée à cette décomposition la matrice de π est égale à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \dim \mathrm{Im}\pi = rg\pi$, et on a : $tr\pi = r = rg\pi$. On déduit aussi que $sp(\pi) \subset \{0,1\}$ ce qui entraine que tout $\lambda \notin \{0,1\}$ $\pi - \lambda id_E$ est inversible.

3. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

3a. On suppose qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $[f,g] = \lambda f$. On montre alors par récurrence, grâce à la propriété II-2-d ci-dessus, que pour tout entier $p \geq 1$

$$[f^p, g] = p\lambda f^p$$

(on prend donc $a_p = p\lambda$). De la propriété II-2-c ci-dessus et comme $p\lambda \neq 0$, on déduit que pour tout entier $p \geq 1$, $\mathrm{Tr}(f^p) = 0$ alors et d'après le résultat objet de la partie I, on déduit que f est nilpotent.

3b. Comme $[f,g] = -[g,f]$, alors et en intervertissant les rôles de f et de g dans la question précédente nous pouvons affirmer que g est nilpotent.

3c. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $[f,g] = \alpha f + \beta g$, distinguons alors les deux cas suivants : Si $\beta = \alpha = 0$, alors $\alpha f + \beta g$ est nul et en particulier nilpotent. Sinon, supposons par exemple que $\beta \neq 0$, et comme $[f, \alpha f + \beta g] = \beta[f,g] = \beta(\alpha f + \beta g)$ alors et d'après la question III-3-a ci-dessus on déduit que $\alpha f + \beta g$ est nilpotent. D'où le résultat.

4. On suppose que f et g sont deux projecteurs distincts de E tels que $[f,g] = \alpha f + \beta g$ et $\alpha \notin \{0,1\}$.

4a. On a : $fg - gf = \alpha f + \beta g$, donc : $f(g - \alpha id_E) = \beta g + gf$; or $\alpha \notin \{0,1\}$ et g est un projecteur donc, $g - \alpha id_E$ est inversible. On en déduit l'existence de $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = gh$ où $h = (\beta id_E + f)(g - \alpha id_E)^{-1}$. Par suite, on obtient $gf = g^2h = gh = f$ ($g^2 = g$ puisque g est un projecteur) ;

4b. Soit x un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$, et comme f est un projecteur, alors $f(x) = x$ et de $gf = f$, on obtient $g(x) = x$ aussi. En évaluant $[f,g] = \alpha f + \beta g$ en x on obtient : $(\alpha + \beta)x = 0$ avec x non nul ce qui permet de déduire que $\alpha + \beta = 0$.

4c. Montrons d'abord que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$ et que $\ker(f) \not\subset \ker g$ On a : $f = gh$ entraine que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} g$ et $gf = f$ entraine que $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im} f$, d'où $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$. Supposons alors que $\ker f \subset \ker g$ alors et compte tenu du théorème du rang nous obtenons : $\ker f = \ker g$ aussi, donc les deux projecteurs sont égaux ce qui n'est pas le cas. D'où l'existence d'un vecteur $x \in \ker(f)$ et tel que $x \notin \ker g$. En évaluant alors et encore, $[f,g] = \alpha f + \beta g$ en un tel x, on obtient : $f(g(x)) = \beta g(x)$, avec $g(x)$ non nul ce qui entraine que β est une valeur propre de f, donc $\beta \in \{0,1\}$ et comme $\alpha + \beta = 0$ et α et β ne pouvant pas être simultanéiément nuls, on déduit que $\beta = 1$ et $\alpha = -1$.

4d. Des questions II-3 et II-4-c ci-dessus on déduit que $g - f$ est nilpotent. On a $g \neq f$ et $(g-f)^2 = g + f - gf - fg$. Or $gf = f$ et comme $[g,f] = f - g$, on déduit par analogie que $fg = g$ et donc $(g-f)^2 = 0$. Ainsi l'indice de nilpotence de $g - f$ est 1.

4e. Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$, alors pour tout x de E, ona : $g(x) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f) = \ker(f - id_E)$ donc $f(g(x)) = g(x)$ et de même $g(f(x)) = f(x)$ de sorte que : $[f,g](x) = f(g(x)) - g(f(x)) = g(x) - f(x)$ d'où $[f,g] = g - f$.

On conclut ainsi que pour deux projecteurs f et g, le crochet de Lie $[f,g]$ est combinaison linéaire de f et de g (en fait égal à $g - f$) si, et seulement s'ils ont le même ensemble image.

III. Application

1. Cela découle de la question II-3.

2. On raisonne par récurrence sur $p \geq 1$, D'abord il est clair que

$$[w, v^p] = -p(u - (p-1)id_E)v^{p-1}$$

pour $p = 1$. Ensuite, on suppose la propriété vraie pour un certain $p \geq 1$, vérifions la pour $p+1$. En utilisant l'égalité II-1-d On a :

$$\begin{aligned}[w,v^{p+1}] &= [w,v^p]v+v^p[w,v]\\ &= -p(u-(p-1)id_E)v^p-v^pu\end{aligned}$$

or, $[u,v^p]=uv^p-v^pu$, d'où et comme $[u,v^p]=2pv^p$ on a

$$\begin{aligned}[w,v^{p+1}] &= -p(u-(p-1)id_E)v^p+2pv^p-uv^p\\ &= -(p+1)(u-pid_E)v^p\end{aligned}$$

d'où la récurrence, d'où la propriété.

3. De $[v,w]=u$, on déduit que $u(y)=vw(y)-wv(y)$ et avec $y=v^2(x)$ et $v^3=0$ on obtient : $u(y)=vw(y)=vwv^2(x)$. Or $wv^2=[w,v^2]+v^2w$, d'où tenant compte de la formule précédente :

$$\begin{aligned}u(y) &= v(-2(u-id_E)v)(x)\\ &= -2vuv(x)+2v^2(x)\\ &= -2(uv-[u,v])v(x)+2y\\ &= -2u(y)+6y \text{ (car } v^2(x)=y \text{ et } [u,v]=2v)\end{aligned}$$

ainsi $u(y)=2y$.

4. $\{k\in\{1,2,3\}$ tel que $e_{k+1}=0\}$ est non vide (car $w^3=0$), donc, admet un plus petit élément s. Avec $e_1=y\neq 0$, on déduit que $e_s\neq 0$. On doit savoir démontrer alors que la famille $(e_1,\dots,e_s)$ est libre.

5. ***5a.*** Soit $1\leqslant i\leqslant s$, alors :

$$\begin{aligned}u(e_i) &= uw^{i-1}(y)\\ &= \left([u,w^{i-1}]+w^{i-1}u\right)(y)\\ &= -2(i-1)w^{i-1}(y)+2e_i \text{ (car } u(y)=2y)\\ &= (-2i+4)e_i\end{aligned}$$

ainsi : $u(e_1)=2e_1,\ u(e_2)=0,\ u(e_3)=-2e_3$...tant que $i\leqslant s$.

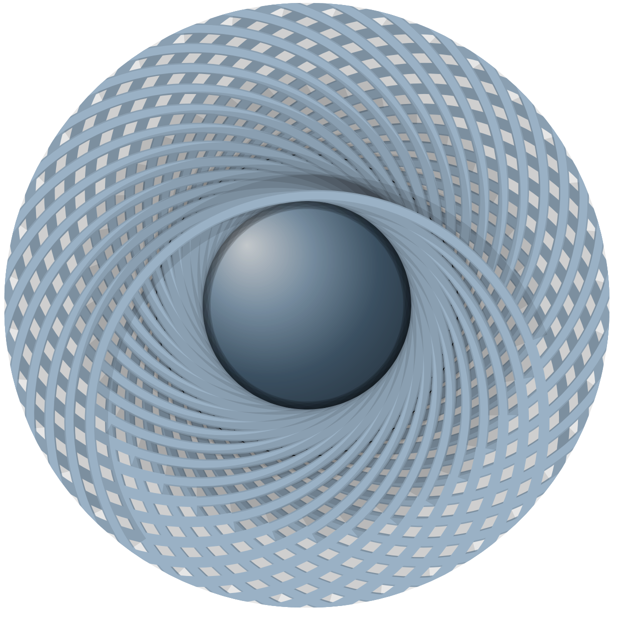
5b. De même on a : $v(e_1)=v^3(x)=0$, $v(e_2)=vw(e_1)=([v,w]+wv)(e_1)=u(e_1)=2e_1$ et enfin $v(e_3)=vw(e_2)=([v,w]+wv)(e_2)=u(e_2)+2w(e_1)=2e_2$.

5c. On pose $F=vect(e_1,\dots,e_s)$. De la question 5-a/ précédente on remarque que $u(e_i)\in F$, pour tout $1\leqslant i\leqslant s$; on déduit que F est stable par u. De même et en raisonant selon les différentes valeurs possibles de s, on remarque que $v(e_i)\in F$ pour tout $1\leqslant i\leqslant s$. Puis on a $w(F)=vect(w(e_1),\dots,w(e_s))$ et comme $w(e_i)=e_{i+1}$ alors $w(F)=vect(e_2,\dots,e_s,e_{s+1})$ et comme $e_{s+1}=0$ on déduit que $w(F)\subset F$. Ainsi F est stable par u,v et w. On a : par stabilité $u'=[v',w']$ ainsi $tru'=0$ or et en déterminant la matrice de u' dans la base $(e_1,\dots,e_s)$ selon les valeurs possibles de s, on déduit que la seule possibilité est $s=3$.

6. De ce qui précéde on déduit que (e_1,e_2,e_3) est une base de E et les matrices de u,v et w dans cette base sont

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

❑



Qu'est ce qu'une topologie ?

La topologie désigne au même temps la branche des mathématiques qui s'occupe de l'étude des déformations continues et la structure de base qui lui est associée et qui permet de définir ensuite des notions telles la continuité d'une application, la convergence d'une suite ... et leurs liens avec les propriétés des ensembles telles la compacité ou la complétude.

Une topologie d'un ensemble donné E et un ensemble de parties de E, $\mathcal{T}$, qui vérifie les propriétés suivantes

1. L'ensemble vide et E lui même sont des éléments de $\mathcal{T}$;
2. Toute réunion d'une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$;
3. Toute intersection d'une famille **finie** d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément $\mathcal{T}$;

Le couple $(E, \mathcal{T})$ est dit un espace topologique. Il est toujours possible de définir sur un ensemble quelconque une topologie particulière (et sans grand intérêt) appelée topologie discrète, qui est l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de toutes les partie de E. Chaque élément de la topologie $\mathcal{T}$ est dit un ouvert de E. Une partie A de E est dite un voisinage d'un point x de E si et seulement s'il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset A$, l'ensemble des voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$. Une partie W de E est dite un fermé de E si et seulement si $E \setminus W$ est un ouvert. On arrive de cette manière à définir de façon précise ce que c'est que une limite l (quand elle existe) d'une suite $(x_n)_{n\in N}$ d'éléments de E

$$\lim x_n = l \iff \forall U \in \mathcal{V}(l),\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geqslant N,\ x_n \in U$$

ou encore ce que c'est que la limite l d'une fonction f d'une partie non vide A de E dans un autre espace topologique $(E', \mathcal{T}')$ en un point x de A (en fait de $\overline{A}$ ...) :

$$l = \lim_x f \iff \forall V \in \mathcal{V}(f(x)),\ \exists U \in \mathcal{V}(x);\ f(U \cap A) \subset V$$

Noter que ses définitions n'assurent pas du tout l'unicité d'une limite quand elle existe. Pour garantir l'unicité de ces limites dans tous les cas les espaces topologiques en jeu doivent vérifier la propriété dite de séparation : L'espace topologique E est dit séparé si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \implies \exists U \in \mathcal{V}(x),\ \exists V \in \mathcal{V}(y)\ ;\ U \cap V = \varnothing$$

Une application $f : A \subset E \to E'$ est dite continue si et seulement si f admet une limite en tout point x de A, cette limite étant alors forcément $f(x)$. On caractérise aussi de façon équivalente la continuité de f par le fait que l'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert pour la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A : $\mathcal{T}_A = \{V \in \mathcal{P}(A) / \exists U \in \mathcal{T};\ V = U \cap A\}$, ou encore, ce qui revient au même, par le fait que l'image réciproque de tout fermé de E' est un fermé de $(A, \mathcal{T}_A)$:

Une classe importante des espaces topologiques est constitué des espaces métriques, dont font partie à leurs tours les espaces vectoriels normés (enseignés dans les classes préparatoires). E est dit uns espace métrique quand il est muni d'une application, appelée distance, $\mathrm{d} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. $\forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}(x,y) \geqslant 0$;
2. $\forall (x,y) \in R^2,\ \mathrm{d}(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ (propriété de séparation) ;
3. $\forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}(y,x) = \mathrm{d}(x,y)$;
4. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$.

Les espaces métriques, grâce au deuxième axiome ci-dessus sont des espaces topologiques séparés. La topologie associée à la distance d est l'ensemble de toutes les réunions des boules ouvertes de (E, d).

La topologie donc est introduite dans les programmes des classes préparatoires à travers le chapitre sur les espaces vectoriels normés. Ce qui pose les bases pour aborder d'autres parties du programme tel le calcul différentiel ou l'étude de modes de convergences des suites et des séries de fonctions. Mais aussi par le biais de quelques propriétés topologiques (comme la densité, la compacité, la connexité, la complétude ...) de traiter différemment certaines problématiques de l'algèbre linéaire.

« Problème »

Utilisation de la topologie en algèbre linéaire

par Sadik Boujaida

Lycée Moulay Yossef – Rabat

L'objectif du problème est l'étude de divers aspects topologiques de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et de fournir quelques applications algébriques des résultats établis.

Merci à

Said Hajmi et Younes El Kadiri

qui ont contribué à élaborer ce sujet

Enoncé

Conventions et notations

De façon usuelle , $\mathbb{K}$ désignera, sauf mention explicite, le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. p désignera un entier naturel non nul. On note $\mathcal{D}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On note pour tout $r \in [\![0, p]\!]$, $\mathcal{I}_r(\mathbb{K})$ l'ensembles des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de rang inférieur ou égal à r et $\mathcal{S}_r(K)$ celui des matrices de rang supérieur strictement à r.

On note $U_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, unitaires, scindés et de degré égal à p.

On notera χ l'application de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}_p[X]$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ \chi(A) = \chi_A$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ on considère l'endomorphisme Φ_A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ \Phi_A(M) = AM - MA.$$

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on pose :

$$\mathcal{C}(A) = \left\{M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K});\ AM = MA\right\}$$

Partie I

1. Montrer que pour tout scalaire λ, l'application d_λ définie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ d_\lambda(A) = \det(A - \lambda I_p)$$

est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

2. Soient $\lambda_0, \lambda_1, .., \lambda_p$ des scalaires quelconques deux à deux distincts. On note $L_0, L_1 \cdots L_p$ les polynômes d'interpolation élémentaires aux abscisses $\lambda_0, \lambda_1, .., \lambda_p$.

2a. Rappeler la valeur du polynôme L_i et montrer $(L_0, L_1 \cdots L_p)$ est une base de $\mathbb{K}_p[X]$.

2b. Exprimer pour $A \in \mathcal{M}_p(K)$ le polynôme χ_A dans cette base.

2c. En déduire que l'application χ est continue.

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

3a. On suppose qu'il existe une suite de matrices $(A_n)_n$ toutes semblables à A qui converge vers 0. Montrer que A nilpotente.

3b. On suppose maintenant que A est nilpotente. Justifier que A est trigonalisable.

Soit $T = (\alpha_{ij})_{ij}$ une matrice triangulaire supérieure semblable à A, et soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice diagonale $D_n = \operatorname{diag}(n, n^2, \cdots, n^p)$.

Déterminer les coéfficients de $D_n T D_n^{-1}$, et en déduire qu'il existe une suite de matrices semblables à A qui converge vers 0.

3c. **Application :** Monter qu'i n'existe aucune norme $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ \forall P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K});\ \mathcal{N}(PAP^{-1}) = \mathcal{N}(A)$$

Partie II

Dans cette partie, on s'interresse aux propriètés topologiques de $\mathcal{D}_p(\mathbb{K})$ et on en donnera quelques applications.

On démontre d'abords que $U_p(\mathbb{K})$ est un fermé.

On pose pour tout polynôme $P = \alpha_p X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{K}_p[X]$

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{p} |\alpha_k|$$

On admet que $\|.\|$ définit une norme de $\mathbb{K}_p[X]$

1. Soit $(P_n)_n$ une suite convergente de polynômes de $U_p(\mathbb{C})$, Montrer que sa limite est un polynôme unitaire de degré p.

En déduire que $U_p(\mathbb{C})$ est un fermé.

2. Soient $P \in \mathbb{K}_p[X]$ un polynôme unitaire et $a \in \mathbb{K}$, on suppose que a est une racine de P.

Montrer que $|a| \leqslant \|P\|$.(*On distinguera les cas* $|a| \leqslant 1$ *et* $|a| > 1$)

3. Soit $(P_n)_n$ une suite convergente de polynômes de $U_p(\mathbb{R})$ de limite P.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots, x_{p,n}$ les racines (non forcément deux à deux distinctes) de P_n et on pose $X_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots, x_{p,n})$.

3a. Donner un exemple où la suite (X_n) est divergente.

3b. Donner, dans le cas où $p = 2$, un exemple où les polynômes P_n sont tous scindés à racines simples mais P n'est pas à racines simples.

3c. Montrer que la suite $(X_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence qu'on notera $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_p)$.

3d. Montrer que $P = \prod_{k=0}^{p}(X - y_k)$.

3e. Déduire de ce qui précéde que $U_p(\mathbb{R})$ est un fermé.

4. Soit $(A_n)_n$ une suite convergente de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer en utilisant l'application χ que $\lim A_n$ est une matrice trigonalisable.

5. Réciproquement, montrer que toutes matrice trigonalisable est la limite d'une suite de matrices diagonalisables à valeurs propres deux à deux distinctes.

6. En déduire que $\mathcal{D}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Quelle est l'adhérence de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$?

7. **Application :** *Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_p(C)$.*

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

7a. Démontrer que si A est diagonalisable alors $\chi_A(A) = 0$

7b. Utiliser la densité de $\mathcal{D}_p(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ pour montrer qu'en général $\chi_A(A) = 0$.

Partie III

Soit $r \in [[1, p]]$.
On veut montrer dans cette partie que $\mathcal{I}_r(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1. Justifier rapidement ce résultat si $r = p$.

2. Soit v un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$. Montrer que $\mathrm{rg}(v) < r$ si et seulement pour toute famille libre $(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ de $\mathbb{K}^p$, la famille $\big(v(e_1), v(e_2), \cdots, v(e_r)\big)$ est liée.

3. On suppose dans cette question que $r < p$.

On se donne une suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{I}_r(\mathbb{K})$ convergente de limite A.

Soient u l'endomorphisme canoniquement associé à A et pour tous $n \in \mathbb{N}$, u_n celui associé à A_n.

Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_{r+1})$ une famille libre quelconque de $\mathbb{K}^p$.

3a. Montrer que pour tout $k \in [[1, r+1]]$, la suite $\big(u_n(e_k)\big)_n$ converge vers $u(e_k)$.

3b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille de scalaires $(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \cdots, \lambda_{r+1,n})$ telle que

$$\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_{k,n} u_n(e_k) = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r+1} |\lambda_{k,n}| = 1$$

3c. Montrer que la suite $(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \cdots, \lambda_{r+1,n})_n$ admet au moins une valeur d'adhérence, qu'on notera $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{r+1})$.

3d. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{r+1} \mu_k u(e_k) = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r+1} |\mu_k| = 1$$

et en déduire que $\mathrm{rg}(u) \leqslant r$.

3e. Montrer que $I_r(\mathbb{K})$ est un fermé.

4. Que peut-on dire de l'ensemble des matrices de rang inférieur strictement à r ?

Montrer que $S_r(\mathbb{K})$ est un ouvert.

Partie IV

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
On voudrait dans cette partie montrer que A est diagonalisable si et seulement l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices semblable à A est un fermé.

1. On suppose que A est diagonalisable et on considère une suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$, convergente de limite B.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A, de multiplicités respectives $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$.

1a. Justifier soigneusement que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [[1, m]]$,

$$\mathrm{rg}(A_n - \lambda_k I_p) = p - \alpha_k.$$

1b. En constatant que la suite $(A_n - \lambda_k I_p)_n$ converge vers $B - \lambda_k I_p$, que peut-on dire de $\mathrm{rg}(B - \lambda_k I_p)$.

1c. Montrer que B est diagonalisable et qu'elle est semblable à A.

1d. conclure.

2. On veut donner une autre démonstration de l'implication établie dans la question précédente.

2a. Montrer que $\chi_B = \chi_A$.

2b. Soit π_A le ploynôme minimal de A. Montrer que l'application

$$\pi : M \longmapsto \pi_A(M)$$

est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

2c. Montrer que $\pi_A(B) = 0$ et en déduire que B est diagonalisable.

2d. Montrer que B est semblable à A et conclure.

3. Pour l'implication réciproque on suppose par contre--apposition que A n'est pas diagonalisable et on considère un matrice triangulaire supérieure T semblable à A.

3a. Justifier l'existence de T et expliquer pourquoi elle n'est pas diagonalisable.

3b. En utilisant les matrices diagonales D_n introduites dans la question I-3-b. construire une suite de matrices semblables à T et qui converge vers une matrice diagonale.

3c. Montrer alors que $\mathcal{A}$ n'est pas un fermé.

Partie V

On se donne dans cette partie une matrice trigonalisable $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et on se propose de montrer, en utilisant les résultats de la partie III, que :

$$\dim \mathcal{C}(A) \geqslant p$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

2. 2a. Soit D une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts.

Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ commute avec D si et seulement elle est diagonale.

2b. En déduire que si A est diagonalisable à valeurs propres deux à deux distinctes, alors $\dim \mathcal{C}(A) = p$

3. On considère une suite de matrices diagonalisables $(A_n)_n$, à valeurs propres deux à deux distinctes qui converge vers A. Une telle suite existe d'après la question II-5.

3a. Montrer que la suite d'endomorphismes $\left(\Phi_{A_n}\right)_n$ converge vers Φ_A.

3b. En déduire que $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant p$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Corrigé

Partie I

1. Si $A = (a_{ij})_{ij}$ alors :

$$d_\lambda(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(a_{\sigma(1)1} - \lambda \delta_{\sigma(1)1}\right) \left(a_{\sigma(2)2} - \lambda \delta_{\sigma(2)2}\right) \cdots \left(a_{\sigma(p)p} - \lambda \delta_{\sigma(p)p}\right)$$

$d_\lambda(A)$ est une fonction polynomiale des coordonnées a_{ij} de A dans la base canonique $(E_{ij})_{ij}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, d_λ est donc continue.

2. 2a. $L_i = \displaystyle\prod_{j=0, j \neq i}^{p} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_i}$.

Si pour une famille de scalaires $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k L_k = 0$, en appliquant à l'élément a_i et sachant que $L_k(a_i) = \delta_{ki}$, on obtient $\alpha_i = 0$, et ceci pour tout $i \in [[0, p]]$. La famille $(L_0, L_1, \cdots, L_p)$ est donc libre. Comme $\dim \mathbb{K}_p[X] = p+1$, c'est une base de $\mathbb{K}_p[X]$.

Notons qu'en posant pour un polynôme $P \in \mathbb{K}_p[X]$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k L_k(X)$, et en substituant a_i à X, on obtient $\alpha_i = P(\lambda_i)$ et donc $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} P(\lambda_k) L_k(X)$.

2b. $\chi_A = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \chi_A(\lambda_k) L_k = \sum_{k=0}^{p} d_{\lambda_k}(A) L_k$.

2c. Les fonctions composantes de χ dans la base $(L_0, L_1, \cdots, L_p)$ de $\mathbb{K}_p[X]$ sont donc les applications d_{λ_k}, elles sont continues donc χ est continue.

3. 3a. la suite $(A_n)_n$ converge vers 0 donc par continuité de l'application χ, la suite $(\chi_{A_n})_n$ converge vers $\chi_0 = (-1)^p X^p$. Comme toute matrice A_n est semblable à A, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_n} = \chi_A$.

Alors $\chi_A = (-1)^p X^p$ et donc, via le théorème de Cayley-Hamilton, $A^p = 0$. A est donc nilpotente.

3b. Si A est nilpotente, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$. X^k est alors un polynôme annulateur scindé de A. A est donc trigonalisable.

Si on note $\beta_{ij}^{(n)}$ le coéfficient d'indice (i,j) de $D_n T D_n^{-1}$ alors :

$$\beta_{ij}^{(n)} = 0 \text{ si } i \geqslant j, \text{ et } \beta_{ij}^{(n)} = \frac{n^i}{n^j}\alpha_{ij} = \frac{1}{n^{j-i}}\alpha_{ij} \text{ si } i < j.$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la suite $(\beta_{ij}^{(n)})_n$ converge vers 0. Donc $(D_n T D_n^{-1})_n$ converge vers la matrice nulle.

3c. **Une omission dans l'énoncé :** $p \geqslant 2$.

Supposons qu'une telle norme existe. Soit A une matrice nilpotente non nulle (si $p = 1$ une telle matrice n'existe pas) et soit, sur la foi des questions précédents, $(A_n)_n$ une suite de matrices sembables à A qui converge vers 0, on aura :

$$\begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathcal{N}(A_n) = \mathcal{N}(A) \\ \mathcal{N}(A_n) \to 0 \end{cases}$$

. On devrait donc avoir $\mathcal{N}(A) = 0$ soit $A = 0$, ce qui constitue une contradiction.

Partie II

N.B. *Soit une suite de polynômes $(P_n)_n$ de $\mathbb{K}_p[X]$. Posons*

$$P_n = a_{p,n}X^p + a_{p-1,n}X^{p-1} + \cdots + a_{1,n}X + a_{0,n}.$$

En considérant la base $(1, X, X^2, \cdots, X^p)$ de $\mathbb{K}_p[X]$, on voit que (c'est dans le cours) la suite $(P_n)_n$ converge si et seulement si pour chaque $k \in [\![0,p]\!]$, la suite $(a_{k,n})_n$ converge et dans ce cas :

$$\lim_n P_n = \lim_n (a_{p,n})X^p + \lim_n (a_{p-1,n})X^{p-1} + \cdots + \lim_n (a_{1,n})X + \lim_n (a_{0,n})$$

On utilisera cette remarque dans la suite du corrigé sans forcément y faire référence.

1. Soit une suite $(P_n)_n$ d'éléments de $U_p(\mathbb{C})$ qui converge dans $\mathbb{K}_p[X]$ vers un polynôme P. Alors pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ la suite formée des coéfficients des polynômes P_n selon X^k, converge vers le coéfficient du même terme de P. Les polynômes P_n étant tous unitaires de degré p, on voit en particulier que P est unitaire de degré p.

Comme tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, P est scindé. Alors $P \in U_p(\mathbb{C})$.

$U_p(\mathbb{C})$ est ainsi un fermé.

2. P un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_p[X]$ et a une racine de P.

Posons $P = X^k + \alpha_{k-1}X^{k-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$. où $k \leqslant p$

Notons que : $\|P\| = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i|$.

Si $vabsa \leqslant 1$ alors $|a| \leqslant \|P\|$.

Si $|a| > 1$ $a^k = -\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i a^i$ donne : $|a|^k \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i||a|^i \leqslant |a|^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i|$

et comme $a \neq 0$ alors : $|a| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i| \leqslant \|P\|$

3. **3a.** Il suffit de prendre une suite $(X_n)_n$ telle que $X_{2n} = (1,-1)$ et $X_{2n+1} = (-1,1)$. On aura pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^2 - 1$, la suite $(P_n)_n$ est constante donc convergente, mais $(X_n)_n$ est clairement divergente.

3b. Il suffit de prendre pour $n \geqslant 2$, $P_n = (X - \frac{1}{n})(X - \frac{1}{n^2}) = X^2 - (\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})X + \frac{1}{n^3}$.

Les polynômes P_n sont tous scindés à racines simples, mais la suite $(P_n)_n$ converge vers $P = X^2$ qui est scindé, mais pas à racines simples.

3c. D'aprés la question **II-2.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![1,p]\!]$, $|x_{k,n}| \leqslant \|P_n\|$, et par suite $\|X_n\|_\infty \leqslant \|P_n\|$.

Comme la suite $(P_n)_n$ est convergente, alors elle est bornée et donc la suite $(X_n)_n$ est bornée.

D'aprés le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(X_n)_n$ admet au moins une valeurs d'adhérence, on va la noter $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_p)$.

3d. Soit une suite extraite $(X_{\varphi(n)})_n$ de $(X_n)_n$ qui converge vers Y. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $(x_{k,\varphi(n)})_n$ converge vers y_k. Posons

$$P_n = \prod_{i=1}^{p}(X - x_{i,n}) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_{k,n}X^k \quad \text{et} \quad Q = \prod_{i=1}^{p}(X - y_i) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} b_k X^k.$$

Maintenant en utilisant les relations entre coéfficients et racines d'un polynôme scindé on a pour tout $k \in [\![1,p]\!]$:

$$a_{p-k,n} = (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant p} x_{i_1,n}x_{i_2,n}\cdots x_{i_k,n}$$

$$b_{p-k} = (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant p} y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_k}$$

On déduit que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $(a_{p-k,\varphi(n)})_n$ converge vers b_{p-k}.

Alors $(P_{\varphi(n)})_n$ converge vers Q, et par unicité de la limite d'une suite $P = Q = \prod_{i=1}^{p}(X - y_i)$.

Autre façon :

On munit $\mathbb{K}[X]$ d'une norme d'algebre $\mathcal{N}$ (la norme $\|.\|_1$ en est un exemple), l'application $B : (P,Q) \mapsto PQ$ de $\mathbb{K}[X]^2$ dans $\mathbb{K}[X]$ et alors continue.

puisque $(x_{k,\varphi(n)})_n$ converge vers y_k alors $(X - x_{k,\varphi(n)})_n$ converge vers $X - y_k$.

par récurrence sur $k \in [\![1,p]\!]$ on montre alors en utilisant la continuité de B que : $(X - x_{1,\varphi(n)})(X - x_{2,\varphi(n)})\cdots(X - x_{k,\varphi(n)}) \longrightarrow (X - y_1)(X - y_2)\cdots(X - y_k)$ pour la norme $\mathcal{N}$.

En particulier pour $k = p$ on obtient $P_{\varphi(n)} \longrightarrow Q = \prod_{i=1}^{p}(X - y_k)$ pour la norme $\mathcal{N}$. la norme induite par $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{K}_p[X]$ est équivalente à la norme considérée $\|.\|$ de $\mathbb{K}_p[X]$ donc $(P_{\varphi(n)})_n$ converge vers Q pour $\|.\|$.

On aurait pu se contenter de définir l'application B de $\mathbb{K}_p[X] \times \mathbb{K}_p[X]$ dans $\mathbb{K}_{2p}[X]$, dans ce cas pas besoin d'une norme d'algebre : B est bilinéaire donc continue (les avantages de la dimension finie).

Mais ce n'est pas bon pour la frime.

3e. On a considéré une suite convergente quelconque d'éléments de $U_p(\mathbb{R})$ et on a montré que sa limite est dans $U_p(\mathbb{R})$. Alors $U_p(\mathbb{R})$ est un fermé.

4. Par continuité de l'application χ, la suite $(\chi_{A_n})_n$ converge vers χ_A et donc $((-1)^p\chi_{A_n})_n$ converge vers $(-1)^p\chi_A$. Les polynômes $(-1)^p\chi_{A_n}$ sont dans $U_p(\mathbb{K})$. $U_p(\mathbb{K})$ étant fermé, la limite $(-1)^p\chi_A$ est dans $U_p(\mathbb{K})$.

En particulier χ_A est scindé et donc A est trigonalisable.

5. Soit A une matrice diagonalisable. Soit T une matrice triangulaire supérieure d'éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_p$ non forcément deux à deux distincts, semblable à A. Et soit P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.

On pose

$$k = \frac{1}{2}\min_{\lambda_i \neq \lambda_j}\left|\frac{\lambda_i - \lambda_j}{i - j}\right| \text{ si Card Sp}(A) > 1 \text{ et } k = 1 \text{ si Card Sp}(A) = 1$$

$$T_n = T + \operatorname{diag}\left(\frac{k}{n}, \frac{2k}{n}, \cdots, \frac{pk}{n}\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$k > 0$ et T_n est une matrice triangulaire superieure dont les coéfficients diagonaux sont les scalaires $\mu_i = \lambda_i + \frac{ik}{n}$. Soit alors $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

Si $\lambda_i = \lambda_j$ alors $\mu_i \neq \mu_j$ puisque $i \neq j$.

Si $\lambda_i \neq \lambda_j$ alors $\mu_i - \mu_j = \lambda_i - \lambda_j + \frac{k}{n}(i-j)$. comme $k|i-j| < |\lambda_i - \lambda_j|$ par définition de k alors $\frac{k}{n}|i-j| < |\lambda_i - \lambda_j|$ et donc $\mu_i - \mu_j \neq 0$.

Ainsi la matrice T_n admet p valeurs propres deux à deux distinctes, elle est donc diagonalisable. La suite $(T_n)_n$ converge en outre vers T. Par continuité de l'application linéaire $M \longmapsto PMP^{-1}$, la suite $(PT_nP^{-1})_n$ converge vers $PTP^{-1} = A$, les matrices PT_nP^{-1} étant toutes diagonalisables.

6. Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est trigonalisable, et d'aprés la question précédente toute matrice trigonalisable est la limite d'une suite de matrices diagonalisables. Alors $\mathcal{D}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

D'aprés la question **II-4.**, la limite d'une suite de matrices diagonalisables est une matrice trigonalisable. Donc $\overline{\mathcal{D}_p(\mathbb{R})} \subset \mathcal{T}_p(\mathbb{R})$, où $\mathcal{T}_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Réciproquement, d'aprés la qustion II-5, tout élément de $\mathcal{T}_p(\mathbb{R})$ est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{T}_p(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{D}_p(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\overline{\mathcal{D}_p(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_p(\mathbb{R})$.

7. 7a. Supposons que A est diagonalisable et soient $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ ses valeurs propres deux à deux distinctes de multiplicités repectives $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$.

En considérant une matrice diagonale semblable à A on voit que

$$\chi_A = (-1)^p\prod_{k=1}^{m}(X - \mu_k)^{\alpha_k}.$$

Maintenant puisque A est diagonalisable, alors $\mathbb{K}^p = \oplus_{k=1}^{m}\ker(A - \mu_k I_p)$ et donc , via le lemme de décomposition des noyaux, $P = \prod_{k=1}^{m}(X - \mu_k)$ est un polynôme annulateur de A. P divise χ_A donc $\chi_A(A) = 0$

7b. Soit A une matrice trigonalisable. D'aprés la question **II-5.** il existe une suite de matrices diagonalisables $(A_n)_n$ qui converge vers A.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_n} = (-1)^p X^p + a_{p-1,n}X^{p-1} + \cdots a_{1,n}X + a_{0,n}$

et $\chi_A = (-1)^p X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b_1 X + b_0$.

Par continuité de l'application χ, $(\chi_{A_n})_n$ converge vers χ_A donc pour tout $k \in [[0, p-1]]$, la suite $(a_{k,n})_n$ converge vers b_k. Ensuite, puisque $(A_n)_n$ converge vers A alors pour tout $k \in [[0,p]]$, $\left(A_n^k\right)_n$ converge vers A^k (continuité de l'application $M \longmapsto M^k$, $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$).

A_n est diagonalisable donc $\chi_{A_n}(A_n) = 0$ d'après la question précédente, on fait alors tendre n vers l'infini dans l'égalité :

$$(-1)^p A_n^p + a_{p-1,n}A_n^{p-1} + \cdots + a_{1,n}A_n + a_{0,n}I_p = 0$$

Pour obtenir

$$\chi_A(A) = (-1)^p A^p + b_{p-1}A^{p-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I_p = 0$$

Partie III

1. Si $r = p$ alors $\mathcal{I}_r(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ...

2. $\Rightarrow$) On suppose que $\mathrm{rg}\, v < r$, alors toute famille de vecteurs $(v(x_1), v(x_2), \cdots, v(x_r))$ de $\mathrm{Im}\, v$ est liée.

$\Leftarrow$) Par contre--apposée, supposons que $\mathrm{rg}\, v \geqslant r$, il existe donc une famille $(v(x_1), v(x_2), \cdots, v(x_r))$ de vecteurs de $\mathrm{Im}\, v$ qui est libre. Forcément $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ est libre.

3. On munit $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$ d'une norme, qu'on notera $\|.\|$, subordonnée à une norme quelconque $\|.\|$ de $\mathbb{K}^p$.

3a. Soit $k \in [[1,p]]$. $\|u_n(e_k) - u(e_k)\| \leqslant \|u_n - u\| \, \|e_k\|$.

Puisque $\|u_n - u\| \longrightarrow 0$ alors $u_n(e_k) \longrightarrow u(e_k)$.

3b. La famille $(u_n(e_1), u_n(e_2), \cdots, u_n(e_{r+1})$ est liée puisque $\mathrm{rg}\, u_n \leqslant r$. Donc il existe des scalaires non tous nuls $\mu_{1,n}, \mu_{2,n}, \cdots, \mu_{r+1,n}$ tels que $\sum_{k=1}^{r+1} \mu_{k,n} u_n(e_k) = 0_{\mathbb{K}^p}$.

On pose alors $\alpha = \sum_{k=1}^{r+1} |\mu_{k,n}|$ et pour tout $k \in [[1, r+1]]$, $\lambda_{k,n} = \mu_{k,n}/\alpha$. On aura :

$$\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_{k,n} u_n(e_k) = 0_{\mathbb{K}^p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r+1} |\lambda_{k,n}| = 1$$

3c. La suite $(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \cdots, \lambda_{r+1,n})_n$ est bornée puisque tous ses éléments sont unitaires pour la norme $\|.\|_1$. D'aprés le théorème de Bolzano--Weierstrass, elle admet donc au moins une valeur d'adhérence, qu'on va noter $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{r+1})$.

3d. Soit $(\lambda_{1,\varphi(n)}, \lambda_{2,\varphi(n)}, \cdots, \lambda_{r+1,\varphi(n)})_n$ une suite extraite de $(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \cdots, \lambda_{r+1,n})_n$ qui converge vers $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{r+1})$.

Pour chaque k la suite $(\lambda_{k,\varphi(n)})_n$ converge vers μ_k. La suite extraite $(u_{\varphi(n)}(e_k))_n$ converge vers $u(e_k)$ d'aprés la question **III-3-a.** On fait alors tendre n vers l'infini dans les égalités :

$$\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_{k,\varphi(n)} u_{\varphi(n)}(e_k) = 0_{\mathbb{K}^p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r+1} \left|\lambda_{k,\varphi(n)}\right| = 1$$

Pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{r+1} \mu_k u(e_k) = 0_{\mathbb{K}^p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r+1} |\mu_k| = 1$$

Déduction : On a montré que pour toute famille $(e_1, e_2, \cdots, e_{r+1})$ de vecteurs $\mathbb{K}^p$, $(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_{r+1}))$ est liée. Donc $\mathrm{rg}(u) \leqslant r$.

3e. ...

4. Si $r > 0$, alors $\mathrm{rg}(A) < r$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A) \leqslant r-1$, l'ensemble des matrices de rang inférieur strictement à r est donc $\mathcal{I}_{r-1}$, c'est un fermé.

$\mathcal{S}_r(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \backslash \mathcal{I}_r(\mathbb{K})$, c'est donc un ouvert.

Partie IV

1. **1a.** Puisque A est diagonalisable on démontre (il faut le faire) que pour tout $k \in [[1, m]]$, $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_p) = \alpha_k$.

A_n est semblable à A donc $A_n - \lambda_k I_p$ est semblable à $A - \lambda_k I_p$ et donc $\dim \mathrm{Ker}(A_n - \lambda_k I_p) = \alpha_k$ ou encore $\mathrm{rg}(A_n - \lambda_k I_p) = p - \alpha_k$.

1b. D'aprés la partie III, $\mathcal{I}_{p-\alpha_k}(\mathbb{C})$ est un fermé donc $\mathrm{rg}(B - \lambda_k I_p) \leqslant p - \alpha_k$.

1c. On a pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\dim \operatorname{Ker}(B - \lambda_k I_p) \geqslant \alpha_k > 0$ donc λ_k est une valeur propre de B.

De plus A est diagonalisable donc $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = p$ et donc $\sum_{k=1}^{m} \dim \operatorname{Ker}(B-\lambda_k I_p) \geqslant p$

... alors $\sum_{k=1}^{m} \dim \operatorname{Ker}(B - \lambda_k I_p) = p$. Ce qui signifie que B est diagonalisable et elle a les mêmes valeurs propres que A, avec les mêmes multiplicités. A et B sont donc semblables à une même matrice diagonale, elles sont donc semblables.

1d. Ce qui precéde démontre que $\mathcal{A}$ est un fermé.

2. 2a. $(A_n)_n$ converge vers B, donc $(\chi_{A_n})_n$ converge vers χ_B. Comme les matrices A_n sont semblables à A alors $\chi_{A_n} = \chi_A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\chi_B = \chi_A$.

2b. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Pour une matrice quelconque $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, les coéfficients de M^k sont des fonctions polynomiales des coéfficients de M, ce qui signifie que les applications composantes de l'application $\Psi_k : M \longmapsto M^k$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ sont des fonctions polynomiales des cordoonées de M, elles sont donc continues et par suite Ψ_k est elle même continue.

L'application $\pi : M \longmapsto \pi_A(M)$ est une combinaison linéaire des applications Ψ_k, elle est donc continue.

2c. π est continue et $(A_n)_n$ converge vers B donc $(\pi_A(A_n))_n$ converge vers $\pi_A(B)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est semblable à A, soit P_n une matrice inversible telle que $A_n = P_n A P_n^{-1}$.

On a alors $\pi_A(A_n) = P_n \pi_A(A) P_n^{-1} = 0$. On en déduit que $\pi_A(B) = 0$.

A est diagonalisable elle admet donc au moins un polynôme annulateur P scindé à racines simples. π_A divise P donc π_A est lui même scindé à racines simple. Comme π_A est un polynôme annulateur de B alors B est diagonalisable.

2d. $\chi_A = \chi_B$ donc A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. A et B sont en plus diagonalisables donc elles vont être semblables à une même matrice diagonale. Elles sont donc semblables ie $B \in \mathcal{A}$.

3. 3a. $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, donc elle est trigonalisable, d'où l'existence de la matrice T. En outre T ne peut être diagpnalisable, sinon A serait diagonalisable.

3b. Posons $T = (\alpha_{ij})_{ij}$ et $D_n T D_n^{-1} = (\beta_{ij}^{(n)})_{ij}$. On a alors

$$\beta_{ij}^{(n)} = \alpha_{ij} = 0 \text{ si } i > j,\ \beta_{ij}^{(n)} = \alpha_{ij} \text{ si } i = j \text{ et } \beta_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n^{j-i}} \alpha_{ij} \text{ si } i < j.$$

On voit ainsi que la suite $(D_n T D_n^{-1})_n$ converge vers la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{pp})$.

3c. $(D_n T D_n^{-1})_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, mais sa limite D n'est pas dans $\mathcal{A}$ car sinon A serait diagonalisable. Donc $\mathcal{A}$ n'est pas un fermé.

Partie V

1. ...

2. 2a. Posons $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$ et soit $M = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice qui commute avec D.

$DM - MD = \left((\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}\right)_{ij} = 0$. Si $i \neq j$ alors $\lambda_i \neq \lambda_j$ et donc $a_{ij} = 0$. Alors M est une matrice diagonale.

2b. On suppose que A est diagonalisable à valeurs propres deux à deux distinctes. Soit une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$ et une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

$M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$

Donc $\mathcal{C}(A) = P\mathcal{C}(D)P^{-1}$. L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant un automorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on a donc $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(D) = p$

3. 3a. Il suffit de remarquer que l'application

$$\Phi : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_p(\mathbb{K})\right),\ M \longmapsto \Phi_M$$

est linéaire. $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, Φ est donc continue. Alors $(\Phi_{A_n})_n$ converge vers Φ_A.

3b. D'après la question **V-2.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim \operatorname{Ker} \Phi_{A_n} = \dim \mathcal{C}(A_n) = p$ et donc $\operatorname{rg} \Phi_{A_n} = p^2 - p$.

D'après la question **III-3.** l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de rang $\leqslant p^2 - p$ est un fermé. Puisque $(\Phi_{A_n})_n$ converge vers Φ_A et $\operatorname{rg} \Phi_{A_n} = p^2 - p$ pour tout n, alors $\operatorname{rg} \Phi_A \leqslant p^2 - p$.

Ainsi $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \operatorname{Ker} \Phi_A \geqslant p$.

❑

« Corrigé de l'épreuve »

CNC 2001, Maths I, MP

par Mimoun Taibi

Lycée Moulay Youssef – Rabat

Partie I

1- Soit $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(x,\theta) \mapsto \cos(x\sin(\theta) - n\theta)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$, donc J_n est bien définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

2- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Effectuer le chgt de variable affine $u = \pi - \theta$ dans l'intégrale définissant J_{-n} , pour obtenir :
$J_{-n}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(\pi-u) - n(\pi-u))d\theta = (-1)^n J_n(x)$.

3- Soit $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(x,\theta) \mapsto \cos(x\sin(\theta) - n\theta)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, J_n est de classe C^∞ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$J_n^{(p)}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\partial^p}{\partial x^p}(\cos(x\sin(\theta) - n\theta))d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^p(\theta)\cos(x\sin(\theta) - n\theta + p\frac{\pi}{2})d\theta$

4- En posant

$$\begin{aligned} g_x(\theta) &= -x^2\sin^2(\theta)\cos(x\sin(\theta)-n\theta) - x\sin(\theta)\sin(x\sin(\theta)-n\theta) \\ &\qquad +(x^2-n^2)\cos(x\sin(\theta)-n\theta) \\ &= x\sin(\theta)\sin(n\theta - x\sin(\theta)) + x^2\cos^2(\theta) - n^2)\cos(x\sin(\theta)-n\theta) \\ &= \frac{d}{d\theta}((x\cos(\theta)+n)\sin(x\sin(\theta)-n\theta)) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} x^2J_n(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g_x(\theta)d\theta \\ &= \left[(x\cos(\theta)+n)\sin(x\sin(\theta)-n\theta)\right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

5- Cours : Equation différentielle lineaire, sans second membre, du 2^{sd} ordre, résolue en y'' sur $I=\mathbb{R}_+^*$, donc l'espace des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est de dimension 2.

Partie II

1- Lemme de Gronwall :
Fixons $y\in\mathbb{R}_+^*$ et posons $w(x)=\left(\int_y^x u(t)v(t)dt\right)\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)$ pour $x>0$

a) Si F désigne une primitive de l'application continue sur $\mathbb{R}_+^*$: $f:x\mapsto u(x)v(x)$, et V celle de l'application v, alors $w(x)=(F(x)-F(y))\exp(V(x)-V(y))$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée d'applications dérivables (elle est même C^1).
On a

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{d}{dx}w(x) \\ &= \underbrace{u(x)v(x)\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{d}{dx}\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)}} + \left(\int_y^x u(t)v(t)dt\right)\frac{d}{dx}\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \\ &= \left(u(x)+\int_y^x u(t)v(t)dt\right)\frac{d}{dx}\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \\ &= \left(\underbrace{u(x)-\int_x^{+\infty}u(t)v(t)dt}_{\leqslant A}+\int_y^{+\infty}u(t)v(t)dt\right)\frac{d}{dx}\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \\ &\leqslant \alpha(y)\frac{d}{dx}\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \quad \text{car} \quad u(x)-\int_x^{+\infty}u(t)v(t)dt\leqslant A \end{aligned}$$

D'où

$$\forall s\in\mathbb{R}_+^*,\quad w'(s)\leqslant\alpha(y)\frac{d}{ds}\exp\left(\int_y^s v(t)dt\right)$$

b) Soit $x\in]0,y]$, par intégration de l'inégalité précédente sur $[x,y]$, on obtient :

$$\begin{aligned} w(y)-w(x) &\leqslant \alpha(y)\left[1-\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)\right] \\ &= \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)\left[\alpha(y)\exp\left(\int_x^y v(t)dt\right)-\alpha(y)\right] \end{aligned}$$

Or $w(y)=0$, donc $-w(x)\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)\leqslant\alpha(y)\exp\left(\int_x^y v(t)dt\right)-\alpha(y)$,

soit encore $\alpha(y)-w(x)\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)\leqslant\alpha(y)\exp\left(\int_x^y v(t)dt\right)$

En utilisant l'expression de $w(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha(y)-w(x)\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) &= \alpha(y)+\int_x^y u(t)v(t)dt \\ &= \underbrace{\alpha(y)-\int_y^{+\infty}uv}_{=A}+\int_x^{+\infty}uv=\alpha(x) \end{aligned}$$

et par suite :

$$u(x)\leqslant\alpha(x)\leqslant\alpha(y)\exp\left(\int_x^y v(t)dt\right) \quad \text{avec} \quad 0<x\leqslant y.$$

Faisons tendre y vers $+\infty$, dans l'inégalité précédente,en tenant compte de $\lim_{y\to+\infty}\alpha(y)=A$, il vient :

$$\forall x>0,\quad u(x)\leqslant A\exp\left(\int_x^{+\infty}v(t)dt\right)$$

2- Autour de l'equation différentielle F_q : $\quad y''+(1+p)y=0$

a) Résolution de F_0 : équation différentielle linéaire à cœfficients constants, son équation caractéristique est $r^2+1=0$. Donc les solutions réelles sont de la forme $y=A\cos(x)+B\sin(x)$ où A,B sont des constantes réelles.

b) La méthode de variations des constantes permet de conclure : posons $y(x)=\lambda(x)\cos(x)+\mu(x)\sin(x)$ où λ,μ sont au moins de calsse C^1.
y est solution de l'equation proposée ssi $\begin{cases}\lambda'\cos(x)+\mu'\sin(x)=0\\ -\lambda'\sin(x)+\mu'\cos(x)=-pf\end{cases}$ ssi

$$\begin{cases}\lambda'=\begin{vmatrix}0 & \sin(x)\\ pf & \cos(x)\end{vmatrix}=-pf\sin(x)\\ \mu'=\begin{vmatrix}\cos(x) & 0\\ -\sin(x) & pf\end{vmatrix}=pf\cos(x)\end{cases}$$

Avec $\lambda(x)=-\int_b^x p(t)f(t)\sin(t)dt$ et $\mu(x)=\int_b^x p(t)f(t)\cos(t)dt$.

Les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont de la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) + \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x) \\ &= A\cos(x) + B\sin(x) + \int_b^x f(t)\underbrace{\left(-p(t)\sin(t)\cos(x) + p(t)\cos(t)\sin(x)\right)}_{\substack{\parallel \\ k_p(x,t)}}dt \end{aligned}$$

c) z est solution de F_p ssi z vérifie $z'' + z = -pz$. Comme en **b)** on obient $z(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \int_b^x z(t)k_p(x,t)dt$ avec ....

3- Soit $n \in \mathbb{Z}$.

a) Soit $q \in C^2(\mathbb{R}^{**}, \mathbb{R})$ tel que $I_n = \dfrac{J_n}{q}$ est solution d'une équation différentielle de type (F_{p_n}), on alors :

$J'_n = q'I_n + qI'_n$, $J''_n = q''I_n + 2q'I'_n + qI''_n$ et puis :

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - n^2)J_n + xJ'_n + x^2J''_n \\ &= \left((x^2 - n^2)q + xq' + x^2q''\right)I_n + \left(xq + 2x^2q'\right)I'_n + x^2qI''_n \qquad (**) \end{aligned}$$

L'équation différentielle $(**)$ est type F_{p_n} ssi $\begin{cases} xq + 2x^2q' = 0 \\ x > 0 \end{cases}$ et $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est une solution qui convient et dans ce cas $p_n(x) = -\dfrac{n^2}{x^2} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{x^3}$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) .On rappelle $\begin{aligned} k_{p_n}(x,t) &= -p_n(t)\sin(t)\cos(x) + p_n(t)\cos(t)\sin(x) \\ &= -p_n(t)(\sin(x-t)). \end{aligned}$

$\left|I_n = \dfrac{J_n}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ car $|J_n| \leqslant 1$, donc

$\left|I_n(t)k_{p_n}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}|p_n(t)| = O(\dfrac{1}{t^{\frac{5}{2}}})$ et comme l'application $t \mapsto I_n(t)k_{p_n}(x,t)$ est continue sur $[1, +\infty[$, son intégrabilité sur $[1, +\infty[$ en résulte.

L'expression de $k_{p_n}(x,t)$ montre que $x \mapsto \int_1^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt$ est une combinaison linéaire des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

c) I_n vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$: $I''_n + I_n = -p_nI_n$, donc d'après 2.c) I_n est de la forme : $I_n(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \int_1^x I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt$ ici $b = 1$

Or $\int_1^x I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt = \int_1^{+\infty} - \int_x^{+\infty} = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) - \int_x^{+\infty}$ avec α et β des constantes réelles (voir question 3.b)).

Donc $I_n(x) = C\cos(x) + D\sin(x) - \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt$ avec C, D des réelles qui ne dépendent -a priori- que de n

d) $|I_n(x)| \leqslant |C| + |D| + \left|\int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)\right|dt$ qui résulte de $\left\{\begin{array}{l} \text{Inégalité triangulaire} \\ \text{intérale et valeur absolue} \\ \text{expression de } K_{p_n}(x,t) \end{array}\right.$

$\leqslant |C| + |D| + \int_x^{+\infty} |I_n(t)||p_n(t)|dt$

Par le lemme de Gronwall (*voir* question 1.b)

$|I_n(x)| \leqslant M\exp(\int_x^{+\infty} |p_n(t)|dt \leqslant M\exp(\int_1^{+\infty} |p_n(t)|dt)$ où $M = |C| + |D|$ et de plus $C = D = 0$, on a $M = 0$ et puis $I_n \equiv 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, impossible car J_n est non nulle.

Remarque : on peut démontrer que I_n est bornée sans utiliser le lemme de Granwall.

e) Par transformation trigonométrique ,on a :

$$\begin{aligned} J_n(x) = qI_n &= \frac{1}{q(x)}(A\cos(x) + B\sin(x)) - \frac{1}{q(x)}\int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}(A_n\cos(x + \beta_n)) - \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt. \end{aligned}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} |I_n(t)|\left|k_{p_n}(x,t)\right|dt \leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} |p_n(t)|dt.$$

où α est un majorant de $|I_n|$.

L'expression de p_n montre que $\int_x^{+\infty} |p_n(t)|dt \leqslant \dfrac{cte}{x\sqrt{x}} + \dfrac{cte}{x^{3/2}\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} O(\dfrac{1}{x^{3/2}})$

D'où $J_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(A_n\cos(x + \beta_n)) + O(\dfrac{1}{x^{3/2}})$ au voisinage de $+\infty$.

Partie III

Ici $n \in \mathbb{N}$.

1- Quelques propriétés de J_n.

a) Pour $(m,k) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a :

$$\begin{aligned} J_{m-1}^{(k-1)}(0) - J_{m+1}^{(k-1)}(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{(k-1)}(\theta)\cos((m-1)\theta + (k-1)\frac{\pi}{2})d\theta \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{(k-1)}(\theta)\cos((m+1)\theta + (k-1)\frac{\pi}{2})d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^k\theta\left(2\sin(m\theta)\sin(k\frac{\pi}{2}) - 2\cos(m\theta)\cos(k\frac{\pi}{2})\right)d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^k(\theta)\left(\cos(\theta m + k\frac{\pi}{2})\right)d\theta$$
$$= J_m^{(k)}(0)$$

b) Soit $n > 0$ et $k \in \{0,...,n-1\}$, on a :
$J_n^{(0)}(0) = J_n(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\sin(n\theta)\right]_0^{\pi} = 0$
supposons que $J_n^k(0) = 0$ pour tout $k \in [0, n-2]$, on a alors :
$2J_n^{(k+1)}(0) = J_{n-1}^{(k-1)}(0) - J_{n+1}^{(k-1)}(0) = 0$

c) Calcul de $J_n^{(n)}(0)$:
$2J_n^{(n)}(0) = J_{n-1}^{(n-1)}(0) - J_{n+1}^{(n-1)}(0) = J_{n-1}^{(n-1)}(0)$. d'où $J_n^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} J_1^{(1)}(0)$.
Or $J_1'(0) = \frac{1}{2}(J_0(0) - J_2(0))$ (relation de 3.1.a), donc $J_1'(0) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$.
D'où finalement $J_n^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d) La formule de taylo-young à l'ordre n autour de 0,donne :
$J_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}J_n^{(k)}(0)x^k + o(x^n) = \frac{x^n}{2^n n!} + o(x^n)$ car $J_n^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.
Ceci montre bien que $J_n(x)$ est de signe de $\frac{x^n}{2^n n!}$ sur un voisinage pointé en 0, d'où l'existence de $\alpha > 0$ telle que J_n est strictement positive sur $]0,\alpha]$.

2- C'est du cours : (voir aussi 3-)

3- J_n solution non nulle sur $]0,\alpha]$ de (E_n) $\Leftrightarrow$ $\phi_f = \frac{f}{J_n}$ est solution de l'équation différentielle : $z'' = \left(2\frac{J_n'(x)}{J_n(x)} + \frac{1}{x}\right)z'$ $\Leftrightarrow$ $\frac{d}{dx}\phi_f$ est solution de (ε_n) :
$z' = \left(-\frac{2n+1}{x} + \psi_n(x)\right)z = 0$, avec $\psi_n(x) = \frac{2n}{x} - 2\frac{J_n'(x)}{J_n(x)}$.

a) La solution générale de l'équation différentielle (ε_n) est de la forme : $z(x) = \lambda\exp(\int_{\alpha}^{x}\left(-\frac{2n+1}{t} + \psi_n(t)\right)dt)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, soit
$$z(x) = \lambda_n\frac{1}{x^{2n+1}}\exp(\int_{\alpha}^{x}\psi_n(t)dt)$$
où $\lambda_n \in \mathbb{R}$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $\lambda_n = -\frac{1}{2^n n!}\frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}$, alors $y_n(x) = J_n(x)\phi_{y_n}(x)$ est une solution de (E_n) telle $\frac{d\phi_{y_n}}{dx} = -\frac{1}{x^{2n+1}}\frac{1}{2^n n!}\frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}\exp(\int_{\alpha}^{x}\psi_n(t)dt) = -\frac{1}{x^{2n+1}}(1+\zeta_n(x))$,
avec $\zeta_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}\exp(\int_{\alpha}^{x}\psi_n(t)dt) - 1$.
Vu l'expression de ψ_n l'application ζ est définie et continue sur $]0,\alpha]$. De plus par $J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} + x^n o(1)$ au voisinage de 0 et
$$\exp\left(\int_{\alpha}^{x}\psi_n(t)dt\right) = \left(\frac{x^n}{J_n(x)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha^n}{J_n(\alpha)}\right)^2$$
on a bien $\lim_{x\to 0^+}\zeta(x) = 0$.
Pour $n = 0$, avec $\lambda_0 = -\frac{1}{J_0(\alpha)}$,le calcul direct donne le résultat.

c) Pour $n = 0$, on a $\frac{d\phi_{y_0}}{dx} = -\frac{1}{x^1}J_0(\alpha)\exp(\int_{\alpha}^{x}\psi_0(t)dt) = -\frac{1}{x}$, donc $\phi_{y_0}(x) = -\ln(x) + c$ où c est un réel et puis $y_0(x) = J_0(x)\left(\ln(\frac{1}{x}) + c\right) \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$ car $J_0(0) = 1$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{d\phi_{y_n}}{dx} = -\frac{1}{x^{2n+1}}(1+\zeta_n(x))$, avec $\lim_{x\to 0^+}\zeta_n(x) = 0$, on reconnait le développement asymptotique de $\frac{d\phi_{y_n}}{dx}$ qui s'intègre car ζ est prolongeable par continuité sur $[0,\alpha]$. D'où $\phi_{y_n}(x) = \frac{1}{2nx^{2n}} + \frac{1}{x^{2n}}o(1)$.... et puis $y_n(x) = J_n(x)\frac{1}{2nx^{2n}} + J_n(x)\frac{1}{x^{2n}}o(1)$. Mais $\frac{J_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2^n n!}$, donc $y_n(x) \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$.

5- Sur $\mathbb{R}_+^*$, le thm de Cauchy-lipschitz s'applique, soit alors N_n une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_n) telle que $N_n(\frac{\alpha}{2}) = y_n(\frac{\alpha}{2})$ et $N'(\frac{\alpha}{2}) = y_n'(\frac{\alpha}{2})$.
N_n et y_n coincident sur $]0,\alpha]$, donc $\lim_{x\to 0^+}N_n(x) = \lim_{x\to 0^+}y_n(x) = +\infty$.

6- Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des solutions $S_H(E_n)$ de l'équation différentielle (E_n) est un espace vectoriel de dimension deux, engendré par (J_n, N_n). Donc toute solution y de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme : $y(x) = AJ_n(x) + BN_n(x)$ où A, B sont des constantes réelles.
Comme J_n est bornée, alors y est bornée ssi $B = 0$. (en prenant $y = 0$,ceci permet aussi de monter que la famille (J_n, N_n) est libre). D'où V ensemble des solutions bornées de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-espace vectoriel de $S_H(E_n)$ de dimension 1 engendré par J_n.

Partie IV

Remarquons d'abord que :
· la fonction f est continue, de classe C^1 par morceaux et paire
·· la fonction g est continue, impaire et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1- Our tout $n \in N$, $a_n(g) = 0$ car g est une fonction impaire
de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ car f est paire
Par les relations liants les coefficients de Fourier trigonométriques et les coef. exponentiels et parités des fonctions f est g, on a :
$\begin{cases} a_n(f) = 2c_n(f) \\ b_n(g) = 2ic_n(g) \end{cases}$ D'autre part on a : $c_n(g') = -inc_n(g)$, d'où $a_n(g') = -nb_n(g)$.
Mais $g' = f - 1$, donc $a_n(g') = a_n(f) - \underbrace{\int_0^1 \cos(2n\pi t)dt}_{=0}$ car $w = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ et puis $a_n(g') = a_n(f)$. par ce qui précède $a_n(f) = a_n(g') = -nb_n(g)$.

2- Pour $x = 0$, $\int_0^\pi \cos(\theta)d\theta = [\sin(\theta)]_0^\pi = 0$
Pour $x \neq 0$,
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta &= \frac{1}{x}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))d(x\sin(\theta)) \\ &= \frac{1}{x}[\sin(x\sin(x))]_0^\pi \\ &= 0.\end{aligned}$$

a) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $J_1(x) = \dfrac{2x}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \cos(xt)\sqrt{1-t^2}dt$
Avec la transformation
$$\cos(x\sin(\theta) - \theta) = \cos(x\sin(\theta))\cos(\theta) + \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)$$
on a :
$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta) - \theta)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos(x\sin(\theta))\cos(\theta) + \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta))\,d\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))\cos(\theta)d\theta}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^\pi \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)d\theta \end{aligned}$$

Faisons le cht de variable $t = \pi - \theta$, dans la seconde intégrale, il vient :
$J_1(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x\sin(t))\sin(t)dt$
Puis par le chgt de variable $u = \cos(t)$, on obtient : $J_1(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(xu)}{\sqrt{1-u^2}}du$
Et enfin par une intégartion par parties $\begin{cases} U = x\sin(xu) \\ V = \sqrt{1-u^2} \end{cases}$, on aboutit à :
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}x\,J_1(x) &= \int_0^1 UdV = [UV]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 VdU \\ &= -\left[x\sin(xu)\sqrt{1-u^2}\right]_{u=0}^{u=1} + \int_0^1 \cos(xu)\sqrt{1-u^2}du \\ &= \int_0^1 \cos(xu)\sqrt{1-u^2}du \end{aligned}$$
Finalement
$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi}\int_0^1 \cos(xu)\sqrt{1-u^2}du$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$a_n(f) = 2\int_0^1 f(t)\cos(2n\pi t)dt = 2\int_0^1 \cos(2n\pi t)\sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{2n\pi}J_1(2n\pi)$$
D'où
$$a_n(f) = \frac{1}{2n}J_1(2n\pi).$$

4- Convergence uniforme de la série de Fourier de f

a) D'après II-3-c) , pour n assez grand :
$$J_1(2n\pi) = \frac{A_1}{\sqrt{2n\pi}}\sin(2n\pi + \beta_1) + O(\frac{1}{n^{3/2}}) = \frac{K}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$$
avec $K = \dfrac{A_1\sin(B_1)}{\sqrt{2\pi}}$. D'où $a_n(f) = \dfrac{1}{2n\pi}J_1(2n\pi) = \dfrac{Cte}{n^{3/2}} + O(\dfrac{1}{n^{3/2}}) = O(\dfrac{1}{n^{3/2}})$

b) Par $a_n(f) = O(\dfrac{1}{n^{3/2}})$, le terme général de la série de Fourier de f vérifie $|a_n(f)\cos(n\pi t)| \leqslant |a_n(f)| \leqslant \dfrac{c^{te}}{n^{3/2}}$, il y'a convergence normale (donc uniforme) de la série de fourier de f sur $\mathbb{R}$.

a) Voir la remarque ci-dessus...

b) Résultats du cours (thm de Direchlet de convegence normale des séries de fourier)

6- Sous les hypothèses f est continue sur $\mathbb{R}$
f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$
f est à points de discontinuités réguliers
la conclusion en résulte.

Partie V

1- Comme J_0 est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et $t \mapsto e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $p>0$, alors l'application continue $t \mapsto J_0(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $p>0$.

2- Les inégalités de 5.2) sont immédiates car les fonctions facteur de e^{-pt} sont majorées en valeur absolue par 1

3- Pour $p>0$ fixé, et $a>0$, on a :
$$\left|\int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt}dt - \int_0^{a} J_0(t)e^{-pt}dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt}dt\right| \leqslant \frac{e^{-ap}}{p} \underset{a\to+\infty}{\to} 0$$
D'où $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^{a} J_0(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt}dt$. Mais
$$\int_0^{a} J_0(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{a}\left(\int_0^{\pi} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)d\theta\right)dt \overset{Fubini}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{a} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta$$
Or
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{a} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta\right| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\left(\int_a^{+\infty} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\int_a^{+\infty} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right|d\theta \\ &\leqslant \frac{e^{-ap}}{p} \underset{a\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$
De ces résultas on déduit que :
$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*,\quad F(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta$$

4- Ecrivons $e^{-pt}\cos(t\sin(\theta)) = \mathrm{Re}(e^{-pt}e^{i(t\sin(\theta))}) = \mathrm{Re}(e^{t(-p+i\sin(\theta))})$, alors
$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(t\sin(\theta))dt = \mathrm{Re}(\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{t(-p+i\sin(\theta))}dt)$$
Comme
$$\begin{aligned}\int_0^{x} e^{t(-p+i\sin(\theta))}dt &= \left[\frac{1}{-p+i\sin(\theta)}e^{t(-p+i\sin(\theta))}\right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \left(\frac{-p}{p^2+\sin^2\theta} - i\frac{\sin\theta}{p^2+\sin^2\theta}\right)\left(e^{x(-p+i\sin(\theta))}-1\right)\end{aligned}$$
et que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x(-p+i\sin(\theta))} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left|e^{x(-p+i\sin(\theta))}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-xp} = 0$ car $p>0$, on a
alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(t\sin(\theta))dt = \mathrm{Re}\left(\frac{p}{p^2+\sin^2\theta} + i\frac{\sin\theta}{p^2+\sin^2\theta}\right) = \frac{p}{p^2+\sin^2\theta}$.

Par $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta \overset{chgt\ de\ var\ \theta\leftrightarrow\pi/2-\theta}{=} \int_0^{\pi/2}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta$ on a :
$$\begin{aligned}F(p) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta\end{aligned}$$
Pour le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta$ on fait le cht de variable $u=\tan(\theta)$, alors
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta &= \int_0^{+\infty}\frac{p}{(p^2+\frac{u^2}{1+u^2})(1+u^2)}du \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{p}{(p^2+(1+p^2)u^2)}du \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(\frac{x\sqrt{p^2+1}}{p})}{\sqrt{p^2+1}} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\end{aligned}$$
Finalement $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ pour tout $p>0$

❑

Les élèves marocains à l'école polytechnique

L'école polytechnique française, connue dans le milieu des taupins par l'X, demeure l'école la plus recherchée par les élèves marocains des classes préparatoires ayant un haut potentiel. En fait, intégrer l'X est un prestige qui mérite pour certains d'entre eux que l'on fasse 5/2 voire 7/2, même s'ils réussissent entre temps d'autres concours. Ceci peut être justifié par le fait que c'est l'école des « futurs patrons ». Grâce à la valeur de leur diplôme, les polytechniciens occupent des postes de « decision makers » de haut niveau, surtout pour ceux qui font le choix de rentrer au pays. Ce ne sont pas les exemples qui manquent : Chakib Ben Moussa (ex-ministre de l'intérieur), Driss Benhima (PDG de la RAM), Mohammed Hassad (ex-ministre), ...

En effet, l'X offre aux taupins une formation théorique solide et leurs ouvre les horizons pour des carrières prestigieuses. La formation paramilitaire offerte renforce leur cursus et leur permet de se forger une forte personnalité. Conscient de l'importance de ces compétences pour assurer le développement de pays, l'état marocain comme le secteur privé, font tout pour persuader ces lauréats de rentrer au pays en leur proposant de très bons salaires, et ce même pour les nouveaux diplômés.

En parallèle de leur scolarité assidue, les étudiants Marocains à l'X sont connus pour l'effervescence de leurs activités parascolaires. Par le biais de fondations et d'associations, ils essayent, en collaborant avec leurs compatriotes des autres écoles françaises, de communiquer leur culture et de se créer un milieu qui leur permet de vivre et pratiquer les traditions de leurs pays en France. Enfin, pour garder contact avec les nouveaux diplômés et afin de leurs offrir les meilleurs opportunités et expériences, les anciens lauréats de l'X se sont réunis au Maroc sous un groupe nommé « groupe X-Maroc ».

« Corrigé de l'épreuve »

Centrale 2001, Math II, filière PSI

par Sadik Boujaida

Lycée Moulay Yossef – Rabat

Le sujet fait un survol des différents résultats de décompositions matricielles. Il commence par la décomposition LU en adoptant une approche algorithmique, puis établit en utilisant cette dernière la décomposition QR puis celle de Cholesky.

L'énoncé de l'épreuve est disponible au téléchargement ici

En plus des notations adoptées par l'énoncé, on notera $\mathcal{E} = \left(E_1, E_2, \cdots, E_n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Partie I

I.A – **N.B :** qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est triangulaire supérieure si et seulement si elle laisse stables les sevs $F_k = Vect\left\{E_1, E_2, \cdots, E_k\right\}$, triangulaire inférieure ssi elle laisse stables les sevs $G_k = Vect\left\{E_k, E_{k+1}, \cdots, E_n\right\}$.

I.A.1) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ triangulaire, par exemple supérieure, et inversible. A induit une bijection de F_k sur lui même. A^{-1} aussi, elle est donc triangulaire supérieure.

Le même argument est utilisable avec les sevs G_k si A est triangulaire inférieure.

I.A.2) D'abords $\mathcal{L}_n$ est inclu dans le groupe linéaire $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, puisque tout élément de $\mathcal{L}_n$ a pour déterminant 1.

Il est clair que la matrice identité I_n est dans $\mathcal{L}_n$. Si A et B sont des matrices de $\mathcal{L}_n$ alors les sevs G_k, stables par A et par B, sont aussi stables par AB et donc AB est triangulaire inférieure. De plus les éléments diagonaux de AB, qui sont les produits deux à deux des éléments diagonaux de A et de B, sont tous égaux à 1. Alors $AB \in \mathcal{L}_n$. Si maintenant $A \in \mathcal{L}_n$ alors A^{-1} est triangulaire inférieure et ses éléments diagonaux, inverses de ceux de A, sont tous égaux à 1, donc $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$.

Ainsi $\mathcal{L}_n$ est un sous groupe de $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$.

I.B – Soit $A \in \mathcal{M}_n$

I.B.1) Supposons que A est inversible et qu'il existe des couples $(L, U) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{U}_n$ tels que $A = LU$. Forcément les matrices L et U sont inversibles puisque $\det(A) = \det(L)\det(U) \neq 0$.

Soient (L_1, U_1), (L_2, U_2) de tels couples. On a $L_1U_1 = L_2U_2$, donc $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$.

Les matrices égales $L_2^{-1}L_1$ et $U_2U_1^{-1}$ sont alors à la fois triangulaires supérieures et inférieures et sont donc diagonales. Comme en plus $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ alors $L_2^{-1}L_1 \in \mathcal{L}_n$ et donc $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I_n$.

Ainsi $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

I.B.2) On suppose que A est inversible et possède une décomposition LU.

Posons

$$L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} U_k & V_1 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}.$$

On a alors par identification des blocs

$$\boxed{A_k = L_kU_k}$$

(relation qui nous sera très utile par la suite)

Le bloc L_k est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux tous égaux à 1, donc $\det(L_k) = 1$. Alors

$$\boxed{\det(A_k) = \det(U_k)}$$

Et comme $\det(U) = \det(U_k)\det(V_2)$ et que $\det(U) \neq 0$ alors $\det(U_k) \neq 0$.

I.B.3) On suppose que $\det(A_{n-1}) \neq 0$ et soit $H \in \mathcal{L}_n$, on pose

$$H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$HA = \begin{pmatrix} H_{n-1}A_{n-1} & H_{n-1}V \\ H'A_{n-1} + W & H'V + A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pour avoir $(HA)_{n,i} = 0$ pour tout $i \in [[1, n-1]]$, il suffit donc d'avoir

$$H'A_{n-1} + W = 0.$$

Il suffit alors de prendre H_{n-1} quelconque dans $\mathcal{L}_{n-1}$, par exemple $H_{n-1} = I_{n-1}$, et $H' \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ donné par $H' = -WA_{n-1}^{-1}$.

Ensuite en posant

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} K_{n-1} & 0 \\ K' & 1 \end{pmatrix}, \text{ on aurait } HH^{-1} = \begin{pmatrix} K_{n-1} & 0 \\ H'K_{n-1} + K' & 1 \end{pmatrix}$$

et en identifiant cette dernière matrice avec la matrice identité on aurait forcément $K_{n-1} = I_{n-1}$ et $K' = -H' = WA_{n-1}^{-1}$.

Finalement, il suffit de prendre

$$H = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -WA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \text{ auquel cas } H^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ WA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

I.B.4) Quand $n = 1$ la propriété est évidente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que la propriété est vraie à l'ordre n et soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}$ telle que $\det(A_k) \neq 0$ pour tout $k \in [[1, n+1]]$.

d'après la question précédente, il existe $H \in \mathcal{L}_{n+1}$ telle que

$$HA = \begin{pmatrix} A_n & V \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } V \in \mathbb{R}^n \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

La matrice A_n, d'ordre n, vérifie l'hypothèse de récurrence donc il existe des matrices $L_1 \in \mathcal{L}_n$ et $U_1 \in \mathcal{U}_n$ telles que $A_n = L_1U_1$

Considérons ensuite des matrices $L' \in \mathcal{L}_{n+1}$ et $U' \in \mathcal{U}_{n+1}$ données par

$$L' = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ K & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U' = \begin{pmatrix} U_1 & W \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ de telle sorte que } L'U' = \begin{pmatrix} L_1U_1 & L_1W \\ KU_1 & KW + \beta \end{pmatrix}$$

Ayant $A_n = L_1U_1$, on a $HA = L'U'$ si et seulement si

$$\begin{cases} L_1W = V \\ KU_1 = 0 \\ KW + \beta = \alpha \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $W = L_1^{-1}V$, $K = 0$ (bien forcé, puisque U_1 est inversible) et donc $\beta = \alpha$.

Ainsi, avec
$$L' = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U' = \begin{pmatrix} U_1 & L_1^{-1}V \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
On a $L' \in \mathcal{L}_{n+1}$, $U' \in \mathcal{U}_{n+1}$ et $L'U' = HA$.

En posant maintenant $L = H^{-1}L'$, $U = U'$ on a $L \in \mathcal{L}_{n+1}$, $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ et $A = LU$.

I.C –

I.C.1) Il suffit d'appliquer la même opération sur les lignes de la matrice identité I_n, pour ainsi obtenir la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{p}^{\text{eme}} \text{ ligne} \\ \\ \leftarrow \text{q}^{\text{eme}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Le produit PA revient alors à échanger la p$^{\text{eme}}$ et la q$^{\text{eme}}$ ligne de A.

I.C.2) **a)** La première ligne de A est obtenue en multipliant la première ligne de L, égale à $(1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$, par les colonnes de U. La première ligne de U est donc la même que celle de A.

b) Si C, V et K désignent les premières colonnes de A, U et L, alors $C = LV$. D'après la question (a), $V = A_{1,1}E_1$, donc $C = A_{1,1}K$. $A_{1,1} = \det(A_1)$ donc $A_{1,1} \neq 0$. Alors $K = \dfrac{1}{A_{1,1}}C$.

Ainsi la première colonne de L est égale à la première colonne de A divisée par le coefficient $A_{1,1}$.

c) Pour tout $k \in [[1, n]]$, $A_k = L_k U_k$, et ensuite $\det(U_k) = \det(A_k)$. Comme U_k est triangulaire alors $\det(U_k) = \prod_{i=1}^{k} U_{i,i}$. On en déduit que
$$U_{1,1} = A_{1,1} \text{ et } \forall k \in [[2, n]]\,,\ U_{k,k} = \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})}$$
ou bien sous forme commune, avec la convention $\det(A_0) = 1$
$$\forall k \in [[1, n]]\,,\ U_{k,k} = \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})}$$

d) Soient $i, j \in [[1, n]]$ tels que $2 \leqslant j < i$. Soit P la matrice de permutation qui permet d'échanger les lignes d'indices i et j.

Intéressons nous aux j premières lignes dans l'égalité $PA = (PL)U$, sachant que dans PA et PL, les lignes de 1 à $j-1$ ne changeront pas et que la j^{eme} ligne sera remplacé par la i^{eme} :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_{j-1}} & \begin{matrix} A_{1,j} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j-1,j} & \dots & A_{j-1,n} \end{matrix} \\ A_{i,1} \dots A_{i,j-1} & A_{i,j} \ \dots \ A_{i,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{L_{j-1}} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ L_{i,1} \dots L_{i,j-1} & L_{i,j} \dots L_{i,n} \end{pmatrix} .U$$

Où bien sûr $L_{i,i+1} = \cdots = L_{i,n} = 0$.

En écrivant U sous la forme $U = \begin{pmatrix} U_j & V \\ 0 & W \end{pmatrix}$, et en identifiant les j premières colonnes dans cette dernière égalité, on voit que

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_{j-1}} & \begin{matrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{j-1,j} \end{matrix} \\ A_{i,1} \dots A_{i,j-1} & A_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{L_{j-1}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ L_{i,1} \dots L_{i,j-1} & L_{i,j} \end{pmatrix} .U_j$$

et en passant au déterminant maintenant
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & j \end{bmatrix}_A = L_{i,j}\det(L_{j-1})\det(U_j) = L_{i,j}\det(U_j)$$
Comme $\det(U_j) = \det(A_j)$ alors
$$L_{i,j} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & j \end{bmatrix}_A}{\det(A_j)}$$

e) Notons que si $A = LU$ alors
$${}^tA = {}^tU\,{}^tL = {}^tUD^{-1}D\,{}^tL \text{ où } D = diag(U_{1,1}, U_{2,2}, \cdots, U_{n,n}).$$
$L' = {}^tUD^{-1} = \left(\dfrac{U_{j,i}}{U_{j,j}}\right)_{i,j}$ est une matrice triangulaire inférieure, ses colonnes s'obtiennent en multipliant dans le même ordre les colonnes de U par les coefficient diagonaux de D^{-1}. En particulier les coefficients diagonaux de L' sont tous égaux à 1, donc $L' \in \mathcal{L}_n$. La matrice $U' = D\,{}^tL$ est naturelement triangulaire supérieure.

On a ainsi ${}^tA = L'U'$ avec $L' \in \mathcal{L}_n$ et $U' \in \mathcal{U}_n$. D'après la question précédente

$$L'_{i,j} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & j \end{bmatrix}_{{}^tA}}{\det({}^tA_j)}$$

Il est aisé de voir que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & j \end{bmatrix}_{{}^tA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & i \end{bmatrix}_{A} \text{ et que } \det({}^tA_j) = \det(A_j)$$

et que d'un autre coté $L'_{i,j} = \dfrac{U_{j,i}}{U_{j,j}}$. Ainsi

$$U_{j,i} = U_{j,j}L'_{i,j} = \frac{\det(A_j)}{\det(A_{j-1})} \times \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & i \end{bmatrix}_{A}}{\det(A_j)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & i \end{bmatrix}_{A}}{\det(A_{j-1})}$$

Ou encore, dans le bon ordre des indices, en prenant cette fois $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $2 \leqslant i < j$

$$U_{i,j} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j \end{bmatrix}_{A}}{\det(A_{i-1})}$$

I.D – On calcule d'abords les coefficients de L colonne par colonne. Si on prend un indice de colonne $j \in [\![2, n]\!]$, et $i \in [\![j, n]\!]$ alors

$$L_{i,j} = \frac{1}{\det(A_j)} \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,j} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j-1,1} & \dots & A_{j-1,j} \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,j} \end{vmatrix}$$

Ces derniers déterminants, y compris $\det(A_j)$, sont tous d'ordre j, et sont de la forme

$$d_j(x_1, x_2, \cdots, x_j) = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,j} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j-1,1} & \dots & A_{j-1,j} \\ x_1 & \dots & x_j \end{vmatrix}$$

Il peut être avantageux de calculer une fois pour toute $d_j(x_1, x_2, \cdots, x_j)$ en fonction des x_k (Maple s'en aquittera vite fait) et de remplacer pour i allant de j à n, $(x_1, x_2, \cdots, x_j)$ par $(A_{i,1}, A_{i,2}, \cdots, A_{i,j})$.

On s'attaque ensuite au calcul des coefficients de U ligne par ligne. Si $i \in [\![2, n]\!]$ est un indice de ligne, pour tout $j \in [\![i, n]\!]$

$$U_{i,j} = \frac{1}{\det(A_{i-1})} \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,i-1} & A_{1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,i-1} & A_{i,j} \end{vmatrix}$$

On agit de la même façon que pour les coefficients de L en considérants les fonctions

$$\delta_i : (y_1, y_2, \cdots, y_i) \longmapsto \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,i-1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,i-1} & y_j \end{vmatrix}$$

I.E –

I.E.1)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On suit la méthode décrite dans la section précédente :

$$d_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Donc $\det(A_2) = d_2(1, 2) = 1$, $L_{3,2} = d_2(0, 1) = 1$ et $L_{4,2} = d_2(1, -1) = -2$.

$$d_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = -5x_1 + 2x_2 + x_3$$

Donc $\det(A_3) = d_3(0, 1, -1) = 1$, $L_{4,3} = d_3(1, -1, 2) = -5$.

$$\delta_2(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = y_2 - y_1$$

Donc $U_{2,3} = \delta_2(3, 1) = -2$, $U_{2,4} = \delta_2(1, 3) = 2$.

$$\delta_3(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 2 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = y_1 - y_2 + y_3.$$

Donc $U_{3,4} = \delta_3(1, 3, 2) = 0$.

Ainsi

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&-2&-5&1\end{pmatrix}\text{ et }U=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&-2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

b) Avec $A=LU$, pour résoudre le système $AX=Y$ il suffit donc de résoudre le système $LZ=Y$ et ensuite $UX=Z$. L'avantage dans ce procédé est que ces deux derniers systèmes sont triangulaires.

I.E.2) La matrice inversible $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ ne possède pas de décomposition LU, puisque $A_{1,1}=0$.

Une matrice inversible admet au plus une décomposition LU, il faut donc essayer avec une matrice non inversible. Un exemple trivial serait de prendre $A=0$ et d'écrire $A=L0$ pour tout $L\in\mathcal{L}_2$. En moins simple

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\text{ on a alors }A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

I.E.3)

a) la formule du binôme donne $(1+X)^{p+q}=\sum_{r=0}^{p+q}C_{p+q}^rX^r$.

et avec la convention adoptée, $C_{p+q}^r=0$ si $r\notin[[0,p+q]]$, on peut écrire

$$(1+X)^{p+q}=\sum_{r\in\mathbb{Z}}C_{p+q}^rX^r$$

D'autre part

$$(1+X)^p(1+X)^q=\left(\sum_{k=0}^pC_p^kX^k\right)\left(\sum_{h=0}^qC_q^hX^h\right)=\sum_{k,h\in\mathbb{Z}}C_p^kC_q^hX^{k+h}=\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{k+h=r}C_p^kC_q^hX^r$$

En identifiant les coefficients du terme en X^r, on obtient

$$C_{p+q}^r=\sum_{k+h=r}C_p^kC_p^h=\sum_{k\in\mathbb{Z}}C_p^kC_q^{r-k}$$

Partie II

II.A – Soit $A\in\mathcal{S}_n$. Par définition de l'énoncé $A\in\mathcal{S}_n^{++}$ ssi $Sp(A)\subset\mathbb{R}_+^*$.

A est symétrique donc elle est orthogonalement diagonalisable, ie qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{V}=(V_1,V_2,\cdots,V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formées de vecteurs propres de A. Posons pour tout $k\in[[1,n]]$, $AV_k=\lambda_kV_k$.

$\Rightarrow$) Si $Sp(A)\subset\in\mathbb{R}_+^*$, Soit $v\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ et posons $v=\sum_{k=1}^nx_kV_k$. On a alors ${}^tvAv=\sum_{k=1}^n\lambda_kx_k^2$, les coordonnées x_k de v ne sont pas toutes nulles, donc ${}^tvAv>0$.

$\Leftarrow$) Si pour tout $v\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, ${}^tvAv>0$, alors en particulier pour tout $k\in[[1,n]]$, $\lambda_k={}^tV_kAV_k>0$. Donc $Sp(A)\subset\mathbb{R}_+^*$.

II.A.1) $A\in\mathcal{S}_n^{++}$. Soit $k\in[[1,n]]$. Soit $v\in\mathbb{R}^k\backslash\{0\}$ et posons

$$V=\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n\text{ et }A=\begin{pmatrix}A_k&B\\C&D\end{pmatrix}$$

${}^tVAV={}^tvA_kv$ avec $V\neq0$ donc ${}^tvA_kv>0$. Par ailleurs, le fait que ${}^tA=A$ implique que ${}^tA_k=A_k$. Alors A_k est symétrique définie positives. Elle est donc diagonalisables de valeurs propres strictement positives. Son déterminant, produit de ces valeurs propres, est strictement positif.

Pour tout $k\in[[1,n]]$, $\det(A_k)\neq0$. D'après la partie I, A admet donc une décomposition LU.

II.A.2) Pour tout $k\in[[1,n]]$, $U_{k,k}=\det(A_k)/\det(A_{k-1})>0$.

II.B –

II.B.1) Une astuce déjà utilisée permet d'écrire, ${}^tA=({}^tUD^{-1})(D^tL)$ où $D=diag(U_{1,1},\cdots,U_{n,n})$.

Comme ${}^tA=A$, et par unicité de la décomposition LU de A on a donc $L={}^tUD^{-1}$ et $U=D^tL$, et ainsi $A=LD^tL$.

Sachant que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs, Soit Δ l'unique matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\Delta^2=D$.

En posant $B=\Delta^tL$, B est bien triangulaire supérieure et ${}^tBB=L\Delta^{2t}L=A$.

L'écriture $A={}^tBB$ est dite décomposition de CHOLESKY de la matrice A.

II.B.2) Supposons que $A={}^tBB={}^tCC$ avec $C\in\mathcal{U}_n$ et pour tout $i\in[[1,n]]$ $B_{i,i}>0$ et $C_{i,i}>0$.

La matrice ${}^tC^{-1t}B=CB^{-1}$ est à la fois triangulaire supérieure et inférieure, elle est donc diagonale. Son i^{eme} coefficient diagonal est $\frac{B_{i,i}}{C_{i,i}}=\frac{C_{i,i}}{B_{i,i}}$. $B_{i,i}^2=C_{i,i}^2$ et les deux réels $B_{i,i}$ et $C_{i,i}$ sont strictement positifs donc $B_{i,i} = C_{i,i}$. Alors les coefficients diagonaux de CB^{-1} sont tous égaux à 1. $CB^{-1} = I_n$ où encore $C = B$.

Noter que la condition $B_{i,i} > 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$ est essentielle pour l'unicité car, par exemple, avec $C = -B$ on a bien $A = {}^tCC$.

II.C –

$i \Rightarrow iii)$ Si $M \in \mathcal{S}_n^{++}$, on a déjà vu (question II.A.1) que pour tout $k \in [[1, n]]$, $\det(M_k) > 0$.

$iii \Rightarrow ii)$ Si M est symétrique et $\det(M_k) > 0$ pour tout $k \in [[1, n]]$. M admet une décomposition LU unique, à partir de laquelle on construit une matrice $B \in \mathcal{U}_n$ forcément inversible telle que $M = {}^tBB$ (comme fait dans la question II.B.1).

$ii \Rightarrow i)$ S'il existe $B \in \mathcal{U}_n$ inversible telle que $M = {}^tBB$. M est symétrique et pour tout $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tvMv = {}^tv{}^tBBv = \|Bv\|^2$, où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme B est inversible $Bv \neq 0$ et donc $\|Bv\| > 0$. Alors ${}^tvMv > 0$. Ainsi $M \in \mathcal{S}_n^{++}$

N.B : L'implication : $\forall k \in [[1, n]]\,,\ \det(M_k) > 0 \Longrightarrow M$ est définie positive.

n'est pas du tout triviale, on l'a contournée ici grâce à la décomposition de CHOLESKY.

PARTIE III

III.A –

III.A.1) Noter que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $v{}^tvx = \langle v, x\rangle v = p(x)$ où p est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur la droite $D = \mathbb{R}v$. $H^{(v)} = I_n - 2p$, donc $H^{(v)}$ est la symétrie orthogonale d'axe l'hyperplan $D^\perp$.

III.A.2) Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et posons $b = (\|a\|, 0, \cdots, 0)$.

Si $b = a$ n'importe quelle reflexion dont l'axe contient a convient.

Si $b \neq a$, $\|a\| = \|b\|$ donc $\langle a - b, a + b\rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0$. En considérant un vecteur v unitaire colinéaire à $b - a$ et $\mathcal{H}$ l'hyperplan orthogonal de la droite $\mathbb{R}v$,

$a = \frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)$, $a-b \in \mathcal{H}^\perp$ et $a+b \in \mathcal{H}$, donc $H^{(v)}(a) = S_{\mathcal{H}}(a) = -\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a+b) = b$.

III.B – Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

III.B.1) Soit $C_1 = (A_{1,1}, \cdots, A_{n,1})$ la première colonne de A. D'après (III.A.2), il existe une matrice de Householder H_1 telle que

$$H_1C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha_1 = \|C_1\|.$$

On peut alors écrire

$$H_1A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \text{ où } B \in \mathcal{M}_{n-1}.$$

Si on suppose qu'il existe des matrices de Householder d'ordre $n-1$, $H_2', H_2', \cdots, H_{n-1}'$ telles que $U' = H_{n-1}' \cdots H_2'B \in \mathcal{U}_{n-1}$ et en posant pour tout $k \in [[2, n-1]]$

$$H_k = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & H_k' \\ 0 & \end{array}\right)$$

ces matrices sont des matrices de Householder (à justifier) et

$$H_{n-1}\cdots H_2H_1A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & H_{n-1}'\cdots H_2'B \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & U' \\ 0 & \end{array}\right)$$

Ainsi $H_{n-1}\cdots H_2H_1A \in \mathcal{U}_n$. Le principe de récurrence permettrait alors de conclure.

III.B.2) Soient des matrices de Householder $H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}$ telles que $U = H_{n-1}\cdots H_1A \in \mathcal{U}_n$. Puisque pour chaque $k \in [[1, n-1]]$, $H_k^{-1} = H_k$ alors $A = H_1\cdots H_{n-1}U$, et en posant $P = H_1H_2\cdots H_{n-1}$, P est orthogonale comme produit de matrices orthogonales et $A = PU$.

Maintenant si on considère la matrice diagonale $D = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ telle que $\varepsilon_k = 1$ si $U_{k,k} \geqslant 0$, -1 si $U_{k,k} < 0$, et si on pose $Q = PD^{-1}$ et $R = DU$ alors $A = QR$, Q étant encore orthogonale et cette fois $R \in \mathcal{U}_n^+$.

III.B.3) Supposons que A est inversible et soient $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_n$ orthogonales et $R_1, R_2 \in \mathcal{U}_n^+$ telles que $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$.

Les matrices R_1 et R_2 sont forcément inversibles (grâce au déterminant) ce qui permet d'avoir $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$.

Posons $B = R_2R_1^{-1} = Q_2^{-1}Q_1$, puisque R_1, R_2 sont dans $\mathcal{U}_n^+$ et qu'elles sont inversibles, alors leurs coefficients diagonaux sont strictement positifs et donc ceux de B aussi.

Maintenant la matrice B est à la fois triangulaire supérieure et orthogonale, elle est forcément égale à la matrice identité I_n.

Première justification en utilisant la décomposition de CHOLESKY. B est orthogonale donc ${}^tBB = I_n$, D'après la question (II.B.2), la décomposition $I_n = {}^tBB$ est unique, comme on a aussi $I_n = {}^tI_nI_n$, alors $B = I_n$.

Deuxième justification de façon élémentaire. B est orthogonale donc ses seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 (grâce à la conservation de la norme). B est triangulaire, ses coefficients diagonaux (strictement positifs) sont donc tous égaux à 1. Puisque chaque vecteur colonne de B est unitaire alors ses colonnes ont tous leurs coefficients nuls sauf celui sur la diagonale, qui vaut 1, ie $B = I_n$.

Ainsi $R_2R_1^{-1} = Q_2^{-1}Q_1 = I_n$ ie $R_1 = R_2$ et $Q_1 = Q_2$.

N.B : En général, une matrice qui est à la fois triangulaire et orthogonale est forcement diagonale et ses éléments diagonaux valent 1 ou -1. Ainsi un automorphisme orthogonale dont le polynôme caractéristique est scindé est diagonalisable, c'est une symétrie orthogonale.

III.C – En utilisant le procédé de GRAM--SCHMIDT.

Soit A une matrice inversible, ces vecteurs colonnes $C_1, C_2, \cdots, C_n$, forment une famille libre. Soit $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \cdots, V_n)$ la base orthonormée obtenue par procédé de GRAM--SCHMIDT à partir de cette famille.

On rappelle que $\mathcal{E}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La formule de passage d'une base à une autre donne
$$A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, \cdots, C_n) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{V}}\, \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{V}}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$$
Si on pose $Q = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{V}}$ et $R = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{V}}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$, alors $A = QR$. Q est orthogonale puisque $\mathcal{E}$ et $\mathcal{V}$ sont des bases orthonormées. Pour chaque $k \in [[1, n]]$, $C_k \in Vect\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$ donc R est triangulaire supérieure.

Reste à justifier qu'en fait $R \in \mathcal{U}_n^+$. C'est du au procédé de GRAM--SCHMIDT. Posons pour $k \in [[1, n]]$, $F_k = Vect\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$ et notons p_k la projection orthogonale sur F_k. le procédé introduit le vecteur $U_k = C_k - p_{k-1}(C_k)$ et pose ensuite $V_k = \dfrac{U_k}{\|U_k\|}$.

on a donc $C_k = U_k + p_{k-1}(C_k) = \|U_k\|\, V_k + p_{k-1}(C_k)$. Sachant que $p_{k-1}(C_k)$ s'exprime à l'aide des vecteurs $V_1, \cdots, V_{k-1}$, la composante de C_k selon V_k, qui est aussi le k^e coefficient diagonal de R, est $\|U_k\|$ qui est positif.

N.B : $\|U_k\| = d(C_k, F_{k-1})$

Le procédé de GRAM--SCHMIDT permet aussi de justifier la décomposition de CHOLESKY

En effet, soit A une matrice symétrique définie positive. et considérons la forme bilinéaire symétrique $\Phi : (X, Y) \longmapsto \langle X, AY\rangle$.

$Mat_{\mathcal{E}}(\Phi) = \big(\Phi(E_i, E_j)\big)_{ij} = \big(\langle E_i, AE_j\rangle\big)_{ij} = \big({}^tE_iAE_j\big)_{ij} = (A_{ij})_{ij} = A$, comme A est définie positive alors Φ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Considérons alors la base Φ-orthonormale $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \cdots, U_n)$ obtenue en appliquant le procédé de GRAM-SCMIDT à la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$ en utilisant ce produit scalaire (Φ bien sÃ »r).

Si $B = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}$ alors la formule de passage pour les formes bilinéaires symétriques donne, sachant que $Mat_{\mathcal{E}}(\Phi) = A$ et $Mat_{\mathcal{U}}(\Phi) = I_n$
$$A = {}^tBI_nB = {}^tBB.$$
Comme expliqué auparavant B, obtenu par le procédé de GRAM--SCHMIDT, est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

Partie IV

IV.A –

IV.A.1) Continuité de l'application bilinéaire $(M, N) \longmapsto MN$ sur $\mathcal{M}_n^2$.

IV.A.2)

a) Noter que pour tout vecteur Y, $\|MY\|, \leqslant \|M\|\ \|Y\|$. Pour tout vecteur X tel que $\|X\| \leqslant 1$ on a donc
$$\|MNX\| \leqslant \|M\|\ \|NX\| \leqslant \|M\|\ \|N\|\ \|X\| \leqslant \|M\|\ \|N\|$$
et en passant au sup $\|MN\| \leqslant \|M\|\ \|N\|$.

b) **1ère façon :** Soient $\lambda \in Sp(M)$ et un vecteur X non nul tel que $MX = \lambda X$. $\|MX\| \leqslant \|M\|\|X\|$ donne $|\lambda| \leqslant \|M\|$.

Si maintenant $\|M\| < 1$ alors -1 ne peut être une valeur propre de M. Donc $I_n + M$ est inversible.

2^eme^ façon : Une récurrence simple basée sur (IV.A.2.a) permet de justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|M^p\| \leqslant \|M\|^p$. Donc si $\|M\| < 1$ alors la série $\sum(-1)^p M^p$ converge absolument. On a alors

$$\begin{aligned}(I_n + M)\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p M^p &= \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p M^p + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p M^{p+1}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p M^p - \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p M^p = I_n\end{aligned}$$

Donc $I_n + M$ est inversible et $(I_n + M)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p M^p$.

IV.A.3) A admet n valeurs propres deux à deux distinctes donc elle est diagonalisable, d'où l'existence de la matrice inversible P.

IV.B – A_1 est semblable à A et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^{-1}(Q_k R_k)Q_k = Q_k^{-1} A_k Q_k$$

donc A_{k+1} est semblable à A_k. Ainsi par récurrence toute les matrices A_k sont semblables (orthogonalement) à A.

IV.C – Posons $L_k = D^k L D^{-k}$, les matrices D^k et D^{-k} étant diagonales les coefficients de L_k se calculent simplement : $(L_k)_{i,j} = \dfrac{\lambda_i^k}{\lambda_j^k} L_{i,j} = \left(\lambda_i/\lambda_j\right)^k L_{i,j}$.

Si $i < j$ la matrice L est triangulaire inférieure donc $(L_k)_{i,j} = L_{i,j} = 0$.

Si $i > j$, $\left|\lambda_i/\lambda_j\right| < 1$ donc $(L_k)_{i,j} \longrightarrow 0$.

Si $i = j$, $(L_k)_{i,i} = L_{i,i} = 1$.

Ainsi la suite $(L_k)_k$ converge vers la matrice identité I_n.

IV.D – $E_k = D^k L D^{-k} - I_n$.

D'après la question précédente la suite $(E_k)_k$ converge vers la matrice nulle 0.

Donc $I_n + RE_kR^{-1} \longrightarrow I_n$. Par continuité du déterminant on a donc $\det(I_n + RE_kR^{-1}) \longrightarrow 1$, et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\det(I_n + RE_kR^{-1}) \geqslant 1/2$. Les matrices $I_n + RE_kR^{-1}$ sont donc inersible à partir dur rang N, chacune à une décomposition QR unique.

IV.E –

IV.E.1) $(\widetilde{Q}_k)$ converge vers $\widetilde{Q}$ donc par continuité de l'application $M \longmapsto {}^tM$, $({}^t\widetilde{Q}_k)$ converge vers $\widetilde{Q}$. D'après la question (IV.A.1), on a donc ${}^t\widetilde{Q}_k\widetilde{Q}_k \longrightarrow {}^t\widetilde{Q}\widetilde{Q}$.

Comme pour tout $k \geqslant N$, ${}^t\widetilde{Q}_k\widetilde{Q}_k$ alors ${}^t\widetilde{Q}\widetilde{Q} = I_n$, $\widetilde{Q}$ est donc orthogonale.

IV.E.2) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{R}_k = \widetilde{Q}_k^{-1}(I_n * RE_kR^{-1}) = {}^t\widetilde{Q}_k(I_n * RE_kR^{-1})$. On en déduit que $\widetilde{R}_k \longrightarrow {}^t\widetilde{Q}$.

Maintenant chaque coefficient de ${}^tR_k$ converge vers le coefficient correspondant de $\widetilde{R} = {}^t\widetilde{Q}$, les matrices $\widetilde{R}_k$ sont triangulaires supérieure donc $\widetilde{R}$ est triangulaire supérieure. Pour la même raison les coefficients diagonaux de $\widetilde{R}$ sont positifs ou nuls, et puisque $\widetilde{R} = {}^t\widetilde{Q}$ est inversible, ils sont strictement positifs. Alors $\widetilde{R} \in \mathcal{U}_n^{++}$.

IV.E.3) $\widetilde{R} = {}^t\widetilde{Q}$ est triangulaire supérieure et orthogonale donc $\widetilde{R} = \widetilde{Q} = I_n$.

IV.F – Vous n'en voudriez pas de toute façon ;--)

❑

À propos de l'auteur de l'article

L'auteur, qui a passé son enfance dans une petite ville du Moyen Atlas (Khénifra), a obtenu une licence en mathématiques à la faculté des sciences de Marrakech. Il intègre ensuite un centre de préparation au concours de l'agrégation, qu'il réussit deux ans après en 1997. Après une année de stage en classes préparatoires au lycée Ibn Taymia, il est affecté à Agadir au lycée Reda Slaoui, ou il enseigne pendant 11 ans, 4 en sup MPSI et 7 en spe MP. Il a actuellement la responsabilité d'une classe de spe PSI au lycée Moulay Youssef, à Rabat, qu'il a rejoint depuis 2009.

Il se dit passionné de l'informatique et des nouvelles technologies en général, avec un penchant certain pour les arts graphiques numériques. Il a pour longtemps utilisé des systèmes d'exploitations à base de Linux comme environnement de travail principal, mais a depuis quelques années "switché" pour MacOS X (un système de type Unix aussi) sur Macintosh.

« Corrigé de l'épreuve »

CNC 2003, Maths I, filière MP

par Sadik Boujaida
Lycée Moulay Youssef – Rabat

Un sujet qui traite de la transformée de Fourier, on y démontre en particulier le principe d'inversion de cette transformation.

Partie I

1. a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,\alpha]$ prolongeable par continuité en 0, elle est donc intégrable sur $]0,\alpha]$

b) La fonction $t \longrightarrow \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$ et $t^2\left(\dfrac{e^{-t}}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

donc elle est intégrable sur $[x,+\infty[$.

2. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

a) Faites bien attention ici, les inégalités demandées sont strictes.

Soit $x>0$. $\varphi(x)>0$ car la fonction $t \longrightarrow \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue positive non nulle sur $[x,+\infty[$.

Ensuite $\forall t \in]x,+\infty[$, $\dfrac{e^{-t}}{t} < \dfrac{e^{-t}}{x}$ donc : $\varphi(x) < \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}dt$ avec $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-x}$ donc $\varphi(x) < \dfrac{e^{-x}}{x}$.

b) On peut écrire $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt$.

La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ d'après le théorème fondamental du calcul intégral.

Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\varphi'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

c) pour un $x>0$,

$$\begin{aligned}\varphi(x)+\ln(x) &= \varphi(1)+\int_1^x \varphi'(t)dt+\ln x = \varphi(1)-\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_1^x\frac{dt}{t}\\ &= \varphi(1)+\int_1^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt\end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est int sur $]0,1]$, donc

$$\lim_{x\to0^+}\int_1^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt = -\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt$$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(\varphi(x)+\ln(x)) = \varphi(1)-\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt$.

d) La fonction $\rho : x \longmapsto \varphi(x)+\ln x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral on a pour tout $x>0$ $\rho(x) = \rho(1)+\displaystyle\int_1^x \rho'(t)dt$. Ce qui donne

$$\begin{aligned}\varphi(x)+\ln x &= \varphi(1)+\int_1^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt\\ &= C+\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt+\int_1^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt\\ &= C+\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le DSE de la fonction exponentielle on a pou $t\neq0$

$$\frac{1-e^{-t}}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}t^{n-1}.$$

(ce qui au passage permet de justifier que la fonction $t\longmapsto\dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$).

Et par primitivisation de la somme d'une série entière :

$$\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}x^n.$$

Ainsi pour tout $x>0$, $\varphi(x)+\ln x = C+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}x^n$.

3. $\forall x\in\,]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(|x|)$.

a) ψ est une fonction paire, il suffit de justifier son intégrabilité sur $]0,+\infty[$.

Sur $]0,+\infty[$, ψ est continue par continuité de φ et d'après la question (2.a), $\psi(x) < \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-x}}{x}$ ce qui justifie l'intégrabilité de ψ sur $[1,+\infty[$. D'après la question (2.c) $\psi(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}\ln x$ donc $\sqrt{x}\psi(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que ψ est intégrable sur $]0,1]$

Alors ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc ψ est intégrable sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. et on a pour tout $x\neq0$,

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(x) &= \int_{-\infty}^0\psi(t)e^{-ixt}dt+\int_0^{+\infty}\psi(t)e^{-ixt}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\psi(-t)e^{ixt}dt+\int_0^{+\infty}\psi(t)e^{-ixt}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\psi(t)(e^{-ixt}+e^{ixt})dt\\ &= 2\int_0^{+\infty}\psi(t)\cos(xt)dt = \int_0^{+\infty}\varphi(t)\cos(xt)dt\end{aligned}$$

c)
- La fonction $\Psi : (x,t)\longmapsto\varphi(t)\cos(xt)$ est continue sur $D=\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et admet pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial^k\Psi}{\partial x^k} : (x,t)\longmapsto t^k\varphi(t)\cos\left(xt+k\dfrac{\pi}{2}\right)$ continue sur D. De plus pout tout $(x,t)\in D$:
- $|\Psi(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
- $\left|\dfrac{\partial^k\Psi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant t^k\varphi(t)$.

La fonction $t \longmapsto t^k\varphi(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Elle est prolongeable par continuité en 0 car $t^k\varphi(t) \underset{0}{\sim} -t^k\ln t$ et donc $t^k\varphi(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Sur $[1,+\infty[$ on a la majoration $t^k\varphi(t) \leqslant t^{k-1}e^{-t}$ et donc $t^2(t^k\varphi(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui achève la justification de l'intégrabilité de la fonction $t \longmapsto t^k\varphi(t)$ sur $]0,+\infty[$.

Alors $\widehat{\psi}$ est bien définie de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\psi}^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^k\varphi(t)\cos\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right)dt$$

d) La fonction $t \longmapsto \varphi(t)\cos(xt)$ étant intégrable sur $]0,+\infty[$, une intégration par partie (en utilisant la suite exhaustive $([\frac{1}{n}, n])_{n>0}$) donne :

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{n}\varphi(t)\cos(xt)dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left[\varphi(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_{1/n}^{n} - \frac{1}{x}\int_{1/n}^{n}\varphi'(t)\sin(xt)dt\right)\\ &= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{n}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt\end{aligned}$$

Car d'un côté la fonction $t \longmapsto \varphi(t)\dfrac{\sin(xt)}{x}$ tend vers 0 en 0 et en $+\infty$ et de l'autre la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.(les deux points à la charge du lecteur). Ensuite $\widehat{\psi}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt = \lim\left([t\varphi(t)]_{1/n}^{n} - \int_{1/n}^{n}t\varphi'(t)dt\right) = \lim\int_{1/n}^{n}e^{-t}dt,$

soit $\widehat{\psi}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}dt = 1$. puisque $t\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 et vers $+\infty$

4. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt = x\widehat{\psi}(x)$

a) Première façon : On utilise la fonction $\widehat{\psi}$

L'expression $\Phi(x) = x\widehat{\psi}(x)$ explique que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$\Phi'(x) = \widehat{\psi}(x) + x\widehat{\psi}'(x) = \widehat{\psi}(x) - x\int_0^{+\infty}t\varphi(x)\sin(xt)dt$$

Une intégration par partie (à faire correctement) donne :

$$x\int_0^{+\infty}t\varphi(t)\sin(xt)dt = \int_0^{+\infty}(\varphi(t)+t\varphi'(t))\cos(xt)dt = \widehat{\psi}(x) - \int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(xt)dt$$

Et donc : $\Phi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(xt)dt$

Deuxième façon : On utilise la formule de Leibniz.

- La fonction $k : (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$ et continue sur $=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et sa dérivée partielle $\dfrac{\partial k}{\partial x} : (x,t) \mapsto e^{-t}\cos(xt)$ est continue sur .
- Via l'inégalité $|\sin(u)| \leqslant u$ si $u \geqslant 0$, on a pour tout $(x,t) \in$, $|k(x,t)| \leqslant xe^{-t}$. Soit donc $a > 0$.

$$\forall (x,t) \in]0,a]\times]0,+\infty[,\ |k(x,t)| \leqslant ae^{-t}$$
$$\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}$$

les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto ae^{-t}$ étant continues intégrables sur $]0,+\infty[$. Alors Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(xt)dt$$

Maintenant la fonction $t \longmapsto e^{-t}e^{ixt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $\left|e^{-t}e^{ixt}\right| = e^{-t}$. donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(xt)dt &= \operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{ixt}dt\right) = \operatorname{Re}\left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{-1+ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Alors : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

b) Pour tout $x > 0$, $\Phi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et la relation $\Phi(x) = x\widehat{\psi}(x)$ implique qu'en fait Φ est continue en 0 puisque $\widehat{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et que $\Phi(0) = 0$. Alors $\Phi(x) = \arctan x$. Anisi

$$\forall x > 0,\ \widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

Ensuite l'écriture $\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\cos(xt)dt$ valable pour tout x non nul implique que $\widehat{\psi}$ est paire sur $\mathbb{R}^*$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

PARTIE II

1. a) f une fonction CPM intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité
$$\forall t \in \mathbb{R}, \left|f(t)e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t)|$$
montre que la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Ensuite pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\widehat{f}(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$. Donc $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Si f est continue, la fonction $(x,t) \longmapsto f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\left|f(t)e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t)|$, $|f|$ étant continue intégrable sur $\mathbb{R}$.

Alors $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) La linéarité de F découle de la linéarité de l'intégrale.

b) Les fonctions $\widehat{f_a}$ et $\widehat{_af}$ sont bien définie puisque les fonctions $t \longmapsto f(t-a)$ et $t \longmapsto f(at)$ sont CPM intégrables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\widehat{f_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ix(a+u)}du = e^{-iax}\widehat{f}(x).$$
et si $a \neq 0$ et $\epsilon = sign(a)$
$$\begin{aligned}\widehat{_af}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-ixt}dt \overset{u=at}{=} \frac{1}{a}\int_{-\epsilon\infty}^{+\epsilon\infty} f(u)e^{-ixu/a}du \\ &= \frac{\epsilon}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ixu/a}du = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

c) Considérons la fonction $g : t \longmapsto f(t)e^{iat}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i(a-x)t}dt = \widehat{f}(x-a).$$

d) Ayant $\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-ixt}dt = \int_{0}^{+\infty} f(-t)e^{ixt}dt$, $\widehat{f}(x) = \int_{0}^{+\infty} (f(t)e^{-ixt} + f(-t)e^{ixt})dt$.

et donc :
$$\widehat{f}(x) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(xt)dt \quad \text{si } f \text{ est paire.}$$
$$\widehat{f}(x) = -2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt \quad \text{si } f \text{ est impaire.}$$

e) Si f est une fonction réelle paire, $\widehat{f}$ est paire et à valeurs réelles. Si f est réelle impaire, $\widehat{f}$ est impaire et à valeurs imaginaires pures.

3. f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

a) f' est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x f'(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$, comme $\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$ ceci revient à ce que f admette une limite finie en $+\infty$. Soit l cette limite.

Supposons que $l \neq 0$, alors il existe $A > 0$ tel que :
$$\forall x \in [A,+\infty[,\ |f(x)| \geqslant \frac{1}{2}|l|.$$
La fonction constante $x \longmapsto \frac{1}{2}|l|$ n'est pas intégrable sur $[A,+\infty[$ donc f ne serait pas intégrable sur $[A,+\infty[$. contradiction.

Alors $l = \lim_{+\infty} f = 0$. On obtient $\lim_{-\infty} f = 0$ en appliquant ce dernier résultat à la fonction $x \longmapsto f(-x)$.

b) Une intégration par partie (à exécuter correctement avec des bornes finies) donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}dt = \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-ixt} - \lim_{t\to-\infty} f(t)e^{-ixt} + ix\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt.$$
$\left|f(t)e^{-ixt}\right| = |f(t)|$ donc d'après la question précédente $\lim_{t\to\pm\infty} f(t)e^{-ixt} = 0$. Alors
$$\widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x).$$

c) D'après (II-1.a), $\widehat{f'}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. La relation $\widehat{f}(x) = \dfrac{\widehat{f'}(x)}{ix}$ implique alors que $\lim_{\pm\infty} \widehat{f} = 0$.

d) On suppose que la fonction $g : t \longmapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Utiliser le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (formule de Leibniz) pour justifier que dans ce cas $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$$\widehat{f}\,'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-ixt}dt = -i\widehat{g}(x)$$
N.B : Ici on a juste besoin que f soit continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $t \longmapsto tf(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Nul besoin que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ et encore moins que f' soit intégrable comme peut le suggérer l'enchaînement des questions de l'énoncé.

Par extension si f est continue sur $\mathbb{R}$ (CPM suffit) et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in\ \widehat{f}^{\,(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)e^{-ixt}dt$$

Partie III

— A —

On considère la fonction $h : t \longmapsto e^{-t^2}$.

1. h est continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t \longmapsto th(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $\lim\limits_{\pm\infty} t^3h(t) = 0$. D'après la question (II-3.c) $\widehat{h}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\widehat{h}\,'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2} e^{-ixt} dt$$

Une intégration par partie donne alors

$$\widehat{h}'(x) = i\left(\left[\frac{e^{-t^2}}{2}e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ix}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-ixt}dt\right) = -\frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}e^{-ixt}dt = -\frac{x}{2}\widehat{h}(x)$$

$\widehat{h}$ est donc une solution de l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}y = 0 \qquad (1)$$

2. Les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda e^{-x^2/4}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{h}(x) = \lambda e^{-x^2/4}$.

Comme $\widehat{h}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ alors $\lambda = \sqrt{\pi}$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-ixt}dt = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$$

3. Soient $\varepsilon > 0$ et la fonction ${}_{\sqrt{\varepsilon}}h : t \longmapsto e^{-\varepsilon t^2}$. D'après (II-2.b),

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{{}_{\sqrt{\varepsilon}}h}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\widehat{h}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-x^2/4\varepsilon}$$

— B —

f une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\widehat{f}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

1. a) v une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Si on pose $v_n(y) = v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}$, les fonctions v_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(v_n)_n$ CVS vers v sur $\mathbb{R}$ puisque $(\varepsilon_n)_n$ converge vers 0 et v est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall y \in \mathbb{R}$, $|v_n(y)| \leqslant |v(y)|$ et v est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de la convergence dominée s'applique ici, il donne :

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)dy.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, le même théorème se base ici sur la domination :

$$\left|w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}\right| \leqslant Me^{-y^2}$$

où $M = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}}|w(u)|$. Il donne :

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)e^{-y^2}dy = w(x)\sqrt{\pi}.$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}dy = \widehat{{}_{\sqrt{\varepsilon_n}}h}(t-x) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}}e^{-(t-x)^2/4\varepsilon_n}$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}dy\right)dt = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(t-x)^2/4\varepsilon_n}dt$$

En posant $s = \dfrac{t-x}{2\sqrt{\varepsilon_n}}$, soit $t = x + 2s\sqrt{\varepsilon_n}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}dy\right)dt &= \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}}.2\sqrt{\varepsilon_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2s\sqrt{\varepsilon_n})e^{-s^2}ds \\ &= 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2s\sqrt{\varepsilon_n})e^{-s^2}ds\end{aligned}$$

3. x u réel donné.

a) Soient $\varepsilon > 0$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$.

Sachant que la fonction $(y,t) \longmapsto f(t)e^{ixy-\varepsilon y^2-iyt}$ est continue sur $[-p,p]\times[-q,q]$, le théorème de Fubini donne :

$$\int_{-p}^{p} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy = \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt.$$

b) Posons pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $F_q(y) = e^{ixy-\varepsilon y^2}\displaystyle\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt$.

Du au fait que $\displaystyle\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(y)$, la suite de fonction $(F_q)_q$ CVS sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $F : y \longmapsto e^{ixy-\varepsilon y^2}\widehat{f}(y)$, fonction qui est continue puisque $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|F_q(y)| \leqslant e^{-\varepsilon y^2}\int_{-q}^{q}|f(t)|\,dt \leqslant Ie^{-\varepsilon y^2}$ où $I = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$.

la fonction $y \longmapsto Ie^{-\varepsilon y^2}$ étant continue intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de la convergence dominée donne alors

$$\lim_{q\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F_q(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}F(y)dy$$

soit :

$$\lim_{q\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q}f(t)e^{-iyt}\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iyt}\right)dy$$

c) De façon similaire on démontre que :

$$\lim_{p\to\infty}\int_{-q}^{q}f(t)\left(\int_{-p}^{p}e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt = \int_{-q}^{q}f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt$$

d) La fonction $A : y \longmapsto e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q}f(t)e^{-iyt}dt\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|A(y)| \leqslant Ie^{-\varepsilon y^2}$ où $I = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$. Donc $\lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{p}A(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}A(y)dy$.

En faisant tendre p vers l'infini dans la relation du (III-B-3.a) et via le résultat démontré dans la question (III-B-3.c) on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q}f(t)e^{-iyt}\right)dy = \int_{-q}^{q}f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt$$

Maintenant en considérant la fonction $B : t \longmapsto f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)$, et vu que f est intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{q\to\infty}\int_{-q}^{q}f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt$$

La relation précédente, via la question (III-B-3.b) donne alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iyt}\right)dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy-\varepsilon y^2}\widehat{f}(y)dy\end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après (III-B-2) et (III-B-3.c), en remplaçant ε par ε_n on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy-\varepsilon_n y^2}\widehat{f}(y)dy = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+2s\sqrt{\varepsilon_n})e^{-s^2}ds$$

D'après (III-B-1.b) $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+2s\sqrt{\varepsilon_n})e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi}\,f(x)$

Et d'après (III-B-1.a) $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy-\varepsilon_n y^2}\widehat{f}(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}\widehat{f}(y)dy$

Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}\widehat{f}(y)dy = 2\pi\,f(x).$$

Résumons : Si f est continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et sa transformée de Fourier est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$, alors on a la relation dite formule d'inversion de la transformée de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(t)e^{ixt}dt$$

❏

“ Corrigé de l'épreuve ”

CNC 2010, Maths I, MP

par Mohammed Tarqi

Lycée Ibn Abdoune – Khouribga

I. Résultats préliminaires

I.1 Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$, alors, d'après le théorème de Schwarz on peut écrire, pour tout $x \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x),$$

donc H_x est une matrice symétrique, et comme elle est réelle, alors H_x est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

I.2

I.2.1 f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$ et admet un maximum en a, donc d'après la condition nécessaire des extremums $df(a) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

Par ailleurs, puisque $\mathcal{U}$ est un ouvert, alors il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset \mathcal{U}$, donc pour tout $|h| < \eta$, $a + h \in \mathcal{U}$ et d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2) = \frac{1}{2} Q_a(h) + o(\|h\|^2).$$

I.2.2

1.2.2.1 Soit $h = t\dfrac{u}{\|u\|}$, alors $|t| \le \eta$, alors
$$f\left(a + t\frac{u}{\|u\|}\right) - f(a) = \frac{t^2}{2\|u\|^2} Q_a(u) + o(t^2) \le 0,$$
ainsi pour t voisin de 0, on a :
$$t^2 Q_a(u) + o(t^2) \le 0.$$

1.2.2.2 L'inégalité précédente s'écrit aussi pour tout $t \in]-\eta, \eta[\backslash\{0\}$:
$$Q_a(u) + \varepsilon(t) \le 0,$$
où $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, donc quand t tend vers 0, on obtient $Q_a(u) \le 0$, donc Q_a est négative.

1.2.3 Comme Q_a est négative, alors
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = (H_a(e_i)|e_i) = Q_a(e_i) \le 0.$$
Où $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(.|.)$ le produit scalaire canonique.
En particulier
$$\triangle f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \le 0.$$

1.3 Applications aux fonctions harmoniques

1.3.1 f est une fonction continue sur la partie compacte K, donc elle bornée et atteint ses bornes.

1.3.2 Supposons que f atteint son maximum en un point a de l'intérieur de K, alors d'après ce qui précède (question [1.2]), $\triangle f(a) \le 0$, ce qui est absurde puisque $\triangle(f) > 0$.
Donc f atteint son maximum sur la frontière de K, c'est à dire :
$$\sup_{\|x\|\le 1} f(x) = \sup_{\|y\|=1} f(y).$$

1.3.3

1.3.3.1 Pour tout $x \in K$, $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$, donc f_ε apparaît comme somme de deux fonctions de $\mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(K)$, alors $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}(K)$ et $\forall x \in \mathcal{U}$,
$$\triangle f_\varepsilon(x) = \triangle f(x) + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon.$$

1.3.3.2 Soit $a \in \mathbb{K}$ tel que $f_\varepsilon(a) = \sup\limits_{\|x\|\le 1} f_\varepsilon(x)$ et comme $\triangle f_\varepsilon > 0$, alors
$$f_\varepsilon(a) = \sup_{\|x\|\le 1} f_\varepsilon(x) = \sup_{\|y\|=1} f_\varepsilon(y) = \varepsilon + \sup_{\|y\|=1} f(y)$$
Donc pour tout $x \in K$,
$$f(x) + \varepsilon\|x\|^2 \le f_\varepsilon(a) = \varepsilon + \sup_{\|y\|=1} f(y)$$
et quand ε tend vers 0, on obtient :
$$f(x) \le \sup_{\|y\|=1} f(y).$$

1.3.3.3 On a $\triangle f = \triangle(-f)$, donc si f est harmonique, alors $-f$ est aussi harmonique et on aura dans ce cas
$$-f(x) \le \sup_{\|y\|=1} (-f)(y) = -\inf_{\|y\|=1} f(y).$$
ou encore
$$\inf_{\|y\|=1} f(y) \le f(x).$$

II. Construction d'une solution du problème

2.1 Si $x \in [-\pi, 0]$, alors $-x \in [0, \pi]$ et donc $\widetilde{\psi}(x) = -\widetilde{\psi}(-x) = -\psi(-x)$; si $x \in [\pi, 2\pi]$, alors $x - 2\pi \in [-\pi, 0]$ et donc $\widetilde{\psi}(x) = \widetilde{\psi}(x - 2\pi) = -\psi(2\pi - x)$ et enfin si $x \in [2\pi, 3\pi]$, alors $x - 2\pi \in [0, \pi]$ et par conséquent $\widetilde{\psi}(x) = \psi(x - 2\pi)$.
La fonction $\widetilde{\psi}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, et
$$\lim_{t\to 0^+} \widetilde{\psi}'(t) = \lim_{t\to 0^+} \psi'(t) = \psi'(0)$$
et
$$\lim_{t\to 0^-} \widetilde{\psi}'(t) = \lim_{t\to 0^-} \frac{d}{dt}(-\psi(-t)) = \psi'(0).$$
De même on montre que $\widetilde{\varphi}'$ est continue en $-\pi$, ainsi $\widetilde{\psi}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.2 On a
$$\begin{aligned} b_p(\widetilde{\psi}) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\psi}(t)\sin(pt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{\psi}(t)\sin(pt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\sin(pt)dt = 2b_p \end{aligned}$$
Puisque ψ est impaire, $a_p(\widetilde{\psi}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2.3 Puisque ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème de Dirichlet (théorème de convergence normale), la série $\sum\limits_{p\ge 1} |b_p(\widetilde{\psi}|)$ converge, donc la série $\sum\limits_{p\ge 1} b_p$ est absolument convergente.

2.4 On a $|v_p(x,t)| \le |b_p|$, donc la série $\sum_{p\ge1} v_p$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$. Par ailleurs, les application $(x,t)\longmapsto b_p\sin(px)e^{-p^2t}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, donc la fonction $(x,t)\longmapsto \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.

2.5 Soit $p\in\mathbb{N}^*$, la fonction v_p est produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}-\frac{\partial v_p}{\partial t}=-p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}+p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}=0.$$

2.6 On a pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[a,+\infty[$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|p^kv_p(x,t)|\le b_pp^ke^{-p^2a}$ et comme $\lim_{p\to\infty}p^ke^{-p^2a}=0$, alors il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p\ge p_0$, on a $p^ke^{-p^2a}\le1$ et par conséquent pour tout $p\ge p_0$, $|p^kv_p(x,t)|\le|b_p|$, donc la série $\sum_{p\ge1}p^kv_p$ converge normalement sur $R\times[a,+\infty[$.

On a $p^k\frac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)=p^{k+1}\cos(px)e^{-p^2t}$, donc le même raisonnement se fait pour montrer que la série $\sum_{p\ge1}p^k\frac{\partial v_p}{\partial x}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}\times[a,+\infty[$.

2.7 Soit $a>0$ et $t\in[a,+\infty[$. Posons $\varphi(x)=\sum_{p=1}^{\infty}v_p(x,t)$. Montrons que φ possède en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée et que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=\sum_{p=1}^{\infty}pb_p\cos(px)e^{-pt^2}$

- φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- $u_p : x\longmapsto v_p(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $p\ge1$ et $u_p'(x)=pb_p\cos(px)e^{-p^2t}$.
- D'après la question [2.6], la série $\sum_{p\ge1}u_p'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : De ces points, on en déduit par un théorème de cours que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\varphi'(x)=\sum_{p=1}^{\infty}u_p'(x).$$

Autrement dit, la fonction f possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}pb_p\cos(px)e^{-p^2t}.$$

Par ailleurs, les applications $(x,t)\longmapsto pb_p\cos(px)e^{-p^2t}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et comme la série $\sum_{p\ge1}pb_p\cos(px)e^{-p^2t}$ converge normalement sur tout $\mathbb{R}\times[a,+\infty[$, pour $a>0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

2.8 Posons $\varphi(t)=\sum_{p=1}^{\infty}v_p(x,t)$. Montrons que φ possède en tout point de $]0,+\infty[$ une dérivée et que $\forall t\in]0,+\infty[$, $\varphi'(t)=-\sum_{p=1}^{\infty}p^2b_p\sin(px)e^{-pt^2}$

- φ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
- $u_p : t\longmapsto v_p(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ pour tout $p\ge1$ et $u_p'(t)=-p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}$.
- La série $\sum_{p\ge1}u_p'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$.

Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que

$$\varphi'(t)=\sum_{p=1}^{\infty}u_p'(t).$$

Autrement dit, la fonction f possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à t et que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=-\sum_{p=1}^{\infty}p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}.$$

D'autre part, les applications $(x,t)\longmapsto p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et comme la série $\sum_{p\ge1}p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}$ converge normalement sur tout $\mathbb{R}\times[a,+\infty[$, pour $a>0$, alors $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

2.9 Il suffit de montrer que les dérivées partielles d'ordre 2 existent et qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. D'après les questions [2.7] et [2.8] f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et on peut utiliser le même raisonnement pour montrer que les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$ existent et qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\sum_{p=1}^{\infty} p^2 \sin(px) e^{-p^2 t}$$

pour tout (x,t) de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
Ainsi $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\sum_{p=1}^{\infty} p^2 \sin(px) e^{-p^2 t} - (-\sum_{p=1}^{\infty} p^2 \sin(px) e^{-p^2 t}) = 0$$

2.10 D'après ce qui précède, $f : (x,t) \longmapsto \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x,t)$ vérifie la condition (i) de (1). D'autre part, pour tout $t \in [0,R]$, $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$; donc la deuxième condition est aussi vérifie, enfin, pour tout x de $[0,\pi]$, $f(x,0) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin(px) = \widetilde{\varphi}(x) = \psi(x)$.
En conclusion, la restriction de f à $\overline{\Omega}$ est solution du problème (1).

III. Unicité de la solution

3.1 Un résultat utile

3.1.1 Par définition $g'(b) = \lim_{t\to b^-} \dfrac{g(t)-g(b)}{t-b}$ et comme $g(t)-g(b) \le 0$ pour tout $t \in]a,b]$, alors $g'(b) \ge 0$.

3.1.2 Il existe un intervalle ouvert $I_\alpha =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset]a,b[$ tel que $\forall x \in I_\alpha$, $g(x) \ge g(x_0)$, alors

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \le 0$$

et comme g est dérivable en x_0 alors

$$g'(x_0) = g'_d(x_0) = g'_g(x_0) = 0$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 s'écrit sous la forme :

$$g(x_0+h) - g(x_0) = \frac{h^2}{2} g''(x_0) + o(h^2).$$

Comme dans la question [1.2] de la première partie, $g''(x_0) \le 0$.

3.2

3.2.1 f est une fonction continue sur $\overline{\Omega_r}$, qui est un compact de $\mathbb{R}^2$; donc f est bornée et atteint ses bornes ; en particulier il existe $(x_0,t_0) \in \overline{\Omega_r}$ tel que

$$F(x_0,t_0) = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega_r}} F(x,t).$$

3.2.2 Si $(x_0,t_0) \in \Omega_r$, qui est ouvert et puisque F est $\mathcal{C}^1$ sur Ω_r, alors d'après la condition nécessaire des extremums,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0) = 0.$$

La fonction $x \longmapsto F(x,t_0)$ est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ et admet un maximum en x_0, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) \le 0$ (la question [3.1.2] de cette partie).

3.2.3 La fonction $g : x \longmapsto F(x,r) = F(x,t_0)$ est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ et admet un maximum en x_0, donc $g''(x_0) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0) \le 0$.
De même, la fonction $t \longmapsto F(x_0,t)$ est deux fois dérivable sur $]0,r]$ et admet un maximum en $t_0 = r$, donc

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0,r) \ge 0.$$

3.2.4 Si $(x_0,t_0) \in \Omega_r$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) \le 0$, mais ceci est absurde.
Si $(x_0,t_0) \in \Lambda_r$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) \le 0$, et ceci aussi est absurde.
Donc la condition $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial f}{\partial t} > 0$ implique que $(x_0,t_0) \in \Gamma_r$.

3.3

3.3.1 Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_{r_p} \subset \Gamma_R$, alors la suite $(z_p)_{p\ge1}$ d'éléments de Γ_R est bornée, et d'après le théorème de Weirstrass, on peut extraire une sous-suite $(z_{\sigma(p)})_{p\ge1}$ qui converge dans Γ_R vers un élément $z = (x^*,t^*)$.
D'autre part, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\Omega_{r_p} \subset \Omega_{r_{p+1}}$, donc $\sup_{(x,t)\in\Omega_p} F(x,t) \le \sup_{(x,t)\in\Omega_{p+1}} F(x,t)$ et par conséquent $F(z_p) \le F(z_{p+1})$, donc $(F(z_p))_{p\ge1}$ est croissante, il est de même de la sous-suite $(F(z_\sigma(p)))_{p\ge1}$.
On a aussi F est continue sur Γ_R et $\lim_{p\to\infty} z_{\sigma(p)} = z$, donc $F(z_{\sigma(p)})_{p\ge1}$ tend vers $F(z)$.

3.3.2 Soit $(x,t)\in[0,\pi]\times[0,R[$, alors il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $(x,t)\in\overline{\Omega}_{\sigma(p)}$ et donc

$$F(x,t)\le \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_{\sigma(p)}} F(x,t)=F(x_{\sigma(p)},t_{\sigma(p)})$$

et par conséquent $F(x,t)\le \lim\limits_{p\to\infty} F(x_{\sigma(p)},t_{\sigma(p)})=F(x^*,t^*)$; et comme F est continue sur $\overline{\Omega}_R$, alors,

$$F(x,R)=\lim_{t\to R} F(x,t)\le F(x^*,t^*).$$

Donc l'inégalité précédente est vraie pour tout $(x,t)\in\overline{\Omega}_R$.

3.4

3.4.1 Il est clair que $F_p\in\mathcal{C}(\overline{\Omega}_R)\cap\mathcal{C}^2(\Omega_R)$ et que $\forall(x,t)\in\Omega_R$,

$$\frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial F_p}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)+\frac{2}{p}>0.$$

3.4.2 D'après la question [3.3] de cette partie, pour chaque $p\in\mathbb{N}^*$, il existe $(x_p,t_p)\in\Omega_p$ tel que

$$F_p(x_p,t_p)=\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F_p(x,t).$$

3.4.3 $(x_p,t_p)_{p\ge1}$ est une suite d'éléments d'une partie bornée, donc admet une sous-suite convergente $(x_{\sigma(p)},t_{\sigma(p)})_{p\ge1}$ vers $(x^*,t^*)\in\Gamma_R$, l'égalité précédente s'écrit enore sous la forme

$$F(x_{\sigma(p)},t_{\sigma(p)})+\frac{x_{\sigma(p)}^2}{\sigma(p)}=\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t)+\frac{R^2}{\sigma(p)}.$$

et quand p tend vers l'infini on obtient l'égalité :

$$F(x^*,t^*)=\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t).$$

3.5 D'après ce précède et par application du résultat de la question [3.4] à F et $-F$, il existe deux couples (x_1^*,t_1^*) et (x_2^*,t_2^*) de Γ_R tels que :

$$0=F(x_1^*,t_1^*)=\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t).$$

$$0=F(x_2^*,t_2^*)=\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R}(-F)(x,t)=-\inf_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t).$$

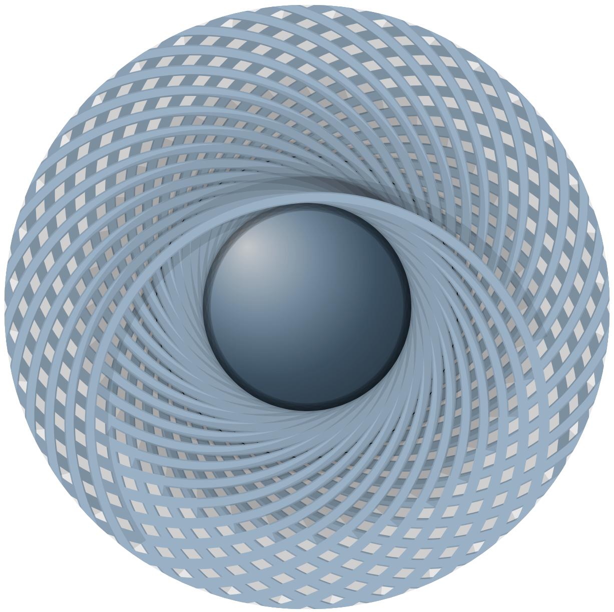
Donc la fonction F est identiquement nulle sur $\overline{\Omega}_R$.

3.6 D'après la deuxième partie, f est solution du problème (1), donc la fonction $G=f_1-f$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

sur Ω_R, et par la question [3.5], la fonction G est nulle sur $\overline{\Omega}_R$, donc $f_1=f$. D'où l'unicité de la solution du problème (1).

❑



À propos de l'auteur de l'article

Mustapha Saadaoui, est né dans la petite ville Zaouiat Cheikh (province Beni Mellal) dans une famille originaire de de Goulmima (Sahara oriental). Il a fini ses études secondaire dans la ville de Beni-Mellal pour ensuite rejoindre la faculté des sciences Semlalia à Marrackech où il a obtenu une licence en mathématiques en 1991. Il intègre immédiatement après un centre de préparation au concours de l'agrégation, concours qu'il passe et réussi deux ans après. Il est depuis affecté au lycée Ibn Taimia à Marrackech, où il a la charge d'une classe MPSI.

Monsieur Saadaoui est un travailleur acharnée et possède à son actif plusieurs articles publiés dans des revues mathématiques (notamment RMS).

« Corrigé de l'épreuve »

Mines 2011, Maths II, MP

par Mustapha Saadaoui

Lycée Ibn Taimia – Marrakech

I. Préliminaire

1°) $1 + j^2 + j^4 = \dfrac{1 - j^6}{1 - j^2} = 0$.

2°) j et $-j$ sont des racines et comme χ_A est à coefficients réels, alors $\bar{j}$ et $-\bar{j}$ sont aussi des racines, Ainsi $\chi_A = (X - j)(X + j)\left(X - \bar{j}\right)\left(X + \bar{j}\right)$

χ_A étant scindé à racines simples, alors A est diagonalisable .

$X = (x, y, z, t) \in \ker(A - jI_4)$ si et seulement si $y = jx,\ z = jy,\ t = jz,$ et $-x - z = jt$ et donc $y = jx$, $z = j^2 x = \bar{j}x$, $t = x$, par suite

$$\ker(A - jI_4) = \operatorname{Vect}\left\{(1, j, \bar{j}, 1)\right\}$$

A étant une matrice réelle, on aura aussi

$$\ker\left(A - \bar{j}I_4\right) = \operatorname{Vect}\left\{(1, \bar{j}, j, 1)\right\}$$

De même $\ker(A + jI_4) = \operatorname{Vect}\left\{(1, -j, \bar{j}, -1)\right\}$ et $\ker\left(A + \bar{j}I_4\right) = \operatorname{Vect}\left\{(1, -\bar{j}, j, -1)\right\}$

Ainsi avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & \bar{j} & -j & -\bar{j} \\ \bar{j} & j & \bar{j} & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on aura $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{j} \end{pmatrix}$

3°) Les solutions du système $X' = AX$ sont de la forme :

$$X : t \mapsto \alpha\, e^{jt}\begin{pmatrix}1\\ j\\ \bar{j}\\ 1\end{pmatrix} + \beta e^{\bar{j}t}\begin{pmatrix}1\\ \bar{j}\\ j\\ 1\end{pmatrix} + \gamma e^{-jt}\begin{pmatrix}1\\ -j\\ \bar{j}\\ -1\end{pmatrix} + \delta e^{-\bar{j}t}\begin{pmatrix}1\\ -\bar{j}\\ j\\ 1\end{pmatrix}$$

4°) Si y est solution de $y^{(4)} + y'' + y = 0$, alors $Y = \begin{pmatrix}y\\ y'\\ y''\\ y'''\end{pmatrix}$ est solution du système

$Y' = AY$, donc de la forme précédente, en particulier il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{C}, y(t) = \alpha\, e^{jt} + \beta e^{\bar{j}t} + \gamma e^{-jt} + \delta e^{-\bar{j}t}$$

Réciproquement : toute fonction de le forme ci-dessus est solution.

Notons φ_λ la fonction définie par $\varphi_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. On a $\left(\varphi_j, \varphi_{-j}, \varphi_{\bar{j}}, \varphi_{-\bar{j}}\right)$ est libre. Alors y est à valeurs réelles si et seulement si $y = \bar{y}$ ou encore $\beta = \bar{\alpha}$ et $\delta = \bar{\gamma}$.

Donc les solutios à valeurs réelles sont de la forme $y(t) = \alpha\, e^{jt} + \bar{\alpha} e^{\bar{j}t} + \gamma e^{-jt} + \bar{\gamma} e^{-\bar{j}t}$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = Ae^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Be^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Ce^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + De^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Où A, B, C et D sont des réels.

Notons φ_λ la fonction définie par $\varphi_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. On a $\left(\varphi_j, \varphi_{-j}, \varphi_{\bar{j}}, \varphi_{-\bar{j}}\right)$ est libre , donc

Comme les fonction les fonctions

II. Un lemme de du Bois – Reymond

5°) Posons $\varphi(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$ et $k(t) = 1 - t^3$. On a alors $h(t) = \varphi \circ k$

Vérifions que φ est de classe $\mathcal{C}^2$. $\varphi'(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$ et $\lim_{t\to 0} \varphi'(t) = 0$

D'après le théorème de prolongement φ est de classe $\mathbf{C}^1$. De même on applique le même théorème pour φ'.

h est la composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, donc elle est $\mathcal{C}^2$.

6°) Soit γ l'application définie par : $\gamma(t) = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_0)\, t + x_1 + x_0\right]$

On a $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et $\gamma(-1) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$ et $\gamma([-1,1]) = [x_0, x_1]$.

Posons $g(x) = h\left(\gamma^{-1}(x)\right)$,g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

- Si $x \in\,]x_0, x_1[$, alors $\gamma^{-1}(x) \in\,]-1, 1[$, donc $g\left(\gamma^{-1}(x)\right) > 0$.
- Si $x \notin\,]x_0, x_1[$, alors $\gamma^{-1}(x) \notin\,]-1, 1[$, donc $g\left(\gamma^{-1}(x)\right) = 0$.

7°) Soit $F \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 F(x)\, u(x)\, dx = 0$ pour tout $u \in E^2_{0,0}$.

Supposons que F est non nulle, alors il existe $x_0 \in\,]0,1[$ tel que $F(x_0) \neq 0$

Puis par continuité, il existe $x_1 \in\,]0,1[$ tel que : $\forall x \in [x_0, x_1]$, $F(x) > 0$.

Soit g l'application définie à la question précédente , $g \in E^2_{0,0}$alors

$$\int_0^1 F(x)\, g(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\, g(x)\, dx > 0 \text{ car } F(x)\, g(x) > 0 \text{ sur } [x_0, x_1].$$

Ce qui est absurde, donc $F = 0$.

III. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

8°) A l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes, si $\deg P = N$, alors :

$$P(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(i)}(x_0)}{i!} h^i$$

Par application de la formule de Taylor pour les polynômes, si $N = \max(\deg P, \deg Q)$

$$\begin{aligned} J(f_0+tu) &= \int_0^1 P(f_0(x)+tu(x))dx + \int_0^1 Q(f_0'(x)+t'u(x))dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(f_0(x))}{k!} t^k (u(x))^k dx + \int_0^1 \sum_{k=0}^{N} \frac{Q^{(k)}(f_0'(x))}{k!} t^k (u'(x))^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} \int_0^1 [P^{(k)}(f_0(x))(u(x))^k + Q^{(k)}(f_0'(x))(u'(x))^k] dx \end{aligned}$$

Donc $J(f_0 + t\, u) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ où

$$a_k = \frac{t^k}{k!} \int_0^1 \left[P^{(k)}(f_0(x))(u(x))^k + Q^{(k)}(f_0'(x))(u'(x))^k\right] dx$$

En particulier $a_1 = \int_0^1 [P'(f_0(x))\, u(x) + Q'(f_0'(x))\, u'(x)]\, dx$.

9°) Si $J(f_0) \leqslant J(f)$ pour tout $f \in E$. On a pour tout $t \in R$, $f_0 + tu \in E$

Donc $q(t) = J(f_0 + tu) \geqslant J(f_0)$ pour tout $t \in R$

La fonction $t \mapsto q(t)$ est dérivable puisque polynômiale et présente un minimum en 0

Donc $q'(0) = 0$ c'est-à-dire $a_1 = 0$.

D'autre part, à l'aide d'une intégration par parties, on a

$$\int_0^1 Q'(f'(x))\, u'(x)\, dx = \underbrace{[u(x)\, Q'(f'(x))]_0^1}_{=0 \text{ car } u(0)=u(1)=0} - \int_0^1 f''(x)\, Q'(f'(x))\, u(x)\, dx$$

Donc $a_1 = \int_0^1 [P'(f_0(x)) - f_0''(x)\, Q'(f_0'(x))]\, u(x)\, dx = 0$ Pour tout $u \in E$.

Comme la fonction $x \mapsto P'(f_0(x)) - f''(x)\, Q'(f_0'(x))$ est continue, donc d'après la question **7.** on a : $P'(f_0(x)) - f_0''(x)\, Q'(f_0'(x)) = 0$, c'est-à-dire que :$P'(f_0(x)) = \frac{d}{dx}[Q'(f_0'(x))]$.

Premier exemple : $E = E_{0,1}^2$ et $J = J_1$ où $J_1(f) = \int_0^1 (f'(t))^2\, dt$

10°) On applique ce qui précède avec $P(x) = 0$ et $Q(x) = x^2$.

$(\Delta) : y'' = 0$. Les solutions ce cette équation sont les fonctions affines $y : x \mapsto ax + b$

$y \in E_{0,1}^2$ si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$, donc $f_0(x) = x$.

11°) Pour tout $f \in E$, on a : $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$, donc,

$$1 = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)dt \leqslant \left(\int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2} = J(f)$$

Donc $J(f) \geqslant 1 = J(f_0)$ pour tout $f \in E$.

Deuxième exemple : $E = E_{0,0}^2$ et $J = J_1$ où $J_1(f) = \int_0^1 \left[(f'(t))^2 + (f'(t))^3\right] dt$

12°) Dans cet exemple $P = 0$ et $Q(x) = x^2 + x^3$ l'équation différentielle (Δ) s'écrit alors :

$$(\Delta) : \frac{d}{dx}\left(2y' + 3(y')^2\right) = 0$$

Si $f \in E$ est une solution de l'équation différentielle (Δ), alors $2f'(x) + 3(f'(x))^2 = C$ constante

D'autre part on a $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ d'après Rolle, il existe $\alpha \in [0,1]$ telle que : $f'(\alpha) = 0$

Par suite $C = 0$, donc $f'(x)(2 + 3(f'(x)))^2 = 0$ ce qui donne que $f'(x) \in \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$

Et comme f' est continue, donc f' est constante égale à $f'(\alpha) = 0$ par suite f est constante

égale à $f(0) = 0$.

13°) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto t\, f(x)$ est un élément de E, de plus

$$J(tf(x)) = t^2 \int_0^1 (2x - 3x^2)^2 dx + t^3 \int_0^1 (2x - 3x^2)^3 dx = \frac{2t^2}{105}\left(\frac{7 - 3t}{3}\right)$$

change de signe donc pas d'extremum .

IV. Un exemple avec dérivée seconde

14°) On a $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |f''|^2\right)$, $|f|^2$ et $|f''|^2$ étant intégrable, donc$|ff''|$ est aussi intégrable .

Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)f(x) = +\infty$, alors il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \geqslant A$, $f'(x)f(x) \geqslant 1$

Puis par intégration, on a $\frac{1}{2}\left(f(x)^2 - (f(x))^2\right) \geqslant x - A$ pour tout $x \geqslant A$

Donc f^2 n'est pas intégrable, ce qui est absurde .

15°) On a $\int_0^x (f'(t))^2\,dt = [f(t)f'(t)]_0^x - \int_0^x f'(t)f''(t)\,dt$

Donc $f(x)f'(x) = \int_0^x (f'(t))^2\,dt + f(0)f'(0) + \int_0^x f'(t)f''(t)\,dt$

Supposons que f'^2 n'est pas intégrable, comme elle est postive, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x (f'(t))^2\,dt = +\infty$

$f'f''$ étant intégrable, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f'(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$ est finie, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)f(x) = +\infty$ absurde.

$(f')^2$ étant intégrable donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = \int_0^{+\infty} (f'(t))^2\,dt + f(0)f'(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)f''(t)\,dt = L \in \mathbb{R}$$

Supposons que L est non nulle, alors $f(x)f'(x) \underset{+\infty}{\sim} L$ puis à l'aide des relations de comparaisons

$$\int_0^X f'(t)f(t)\,dt \underset{+\infty}{\sim} Lx \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$$

Ce qui donne que $(f(x))^2 \underset{+\infty}{\sim} Lx$ et absurde puisque f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

16°) Les solutions de (E) à valeurs réelles peuvent s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \rho_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi_0\right) + \rho_2 e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi_1\right)$$

La fonction $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi_0\right)$ est un élément de L^2 .

Reste à voir $t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi_1\right)$. à l'aide d'un changement de variable on peut se ramener

à la fonction $t \mapsto e^{\frac{t}{\sqrt{3}}} \cos(t)$. Or

$$\int_0^X e^{\frac{2t}{\sqrt{3}}} \cos^2(t)\,dt = \frac{3\sin(2X)}{16} e^{\frac{2X\sqrt{3}}{3}} - \frac{5}{16}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3}e^{\frac{2X\sqrt{3}}{3}} + \frac{\sqrt{13}}{16}\cos(2X)\,e^{\frac{2X\sqrt{3}}{3}}$$

Donc $\int_0^{2n\pi} e^{\frac{2t}{\sqrt{3}}} \cos^2(t)\,dt = -\frac{5}{16}\sqrt{3}\frac{5}{16}\sqrt{3}e^{\frac{2n\pi\sqrt{3}}{3}} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

Donc la fonction n'est pas intégrable .

Par suite $y \in E$ si et seulement si $\rho_2 = 0$ c'est-à-dire si $y \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

17°) D'après ce qui précède les éléments de F appartenant à L^2 sont les éléments du $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

qui est égal à l'ensemble des solutions de $y'' + y' + y = 0$.

Pour $f \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f = \alpha e_1 + \beta e_2$. On a alors :

$$J(f) = J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta\sqrt{3} + 3\beta^2\right) = \frac{1}{4}\left(\alpha + \beta\sqrt{3}\right)^2 \geqslant 0$$

De plus $J(f) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta\sqrt{3} \Leftrightarrow f = \beta\left(e_2 - \sqrt{3}e_1\right) = 2\beta\psi$.

18°) Il suffit d'utiliser $a^2 - b^2 + c^2 = [a + b + c]^2 - -2ab - 2ac - 2bc - 2b^2$

On a f , f' et f'' sont des éléments de L^2,donc les fonctions ff' , ff'' , $f'f''$ sont intégrables

par suite les fonctions $f^2 - (f')^2 + (f'')^2$ et $(f + f' + f'')$ sont intégrables .

L'égalité précedente, donne que $(f(A) + f'(A))^2$ admet une limite finie $L \geqslant 0$.

Et comme $(f + f')^2$ est intégrable, donc $\lim\limits_{A\to+\infty} (f(A) + f'(A))^2 = 0$.

Par passage à la limite, on a alors

$$\boxed{J(f) = \int_0^{+\infty} (f(x) + f'(x) + f''(x))^2\, dx + (f(0) + f'(0))^2 \geqslant 0}$$

19°) D'après l'égalité précédente $J(f)$ est minimale lorsque $f(x)+f'(x)+f''(x) = 0$ et $f(0) + f'(0) = 0$
C'est à dire $f = \alpha e_1 + \beta e_2$ et $f(0) + f'(0) = 0$, ce qui donne la condition de 17°) .

V. Application : une inégalité de Hardy et Littelewood

20°) $f \in E$, donc pour tout $\mu > 0$, $f_\mu \in E$ et $J(f_\mu) \geqslant 0$.

On a $J(f_\mu) = \int_0^{+\infty} f(\mu x) - \mu^2 (f'(\mu x)) + \mu^4 (f''(\mu x))^2\, dx$, utilisons le changement $t = \mu x$, on a :

$$\int_0^{+\infty} (f(\mu x))^2\, dx = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} (f(t))^2\, dt \; ; \int_0^{+\infty} (f'(\mu x))^2\, dx = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\, dt$$

$$\int_0^{+\infty} (f''(\mu x))^2\, dx = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} (f''(t))^2\, dt\, .$$

Donc pour tout $\mu > 0$:

$$(*) \; : J(f_\mu) = \frac{1}{\mu}\left(\int_0^{+\infty} (f(x))^2\, dt - \mu^2 \int_0^{+\infty} (f'(x))^2 + \mu^4 \int_0^{+\infty} (f''(x))^2\, dt\right) \geqslant 0$$

Posons $A = \int_0^{+\infty} (f(x))^2\, dt$, $B = \int_0^{+\infty} (f'(x))^2$, $C = \int_0^{+\infty} (f''(x))^2\, dt$. (discuter le cas $C = 0$ ...)

On a $U(t) = A - Bt + Ct^2 = C\left(t - \frac{B}{2C}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4C}$.

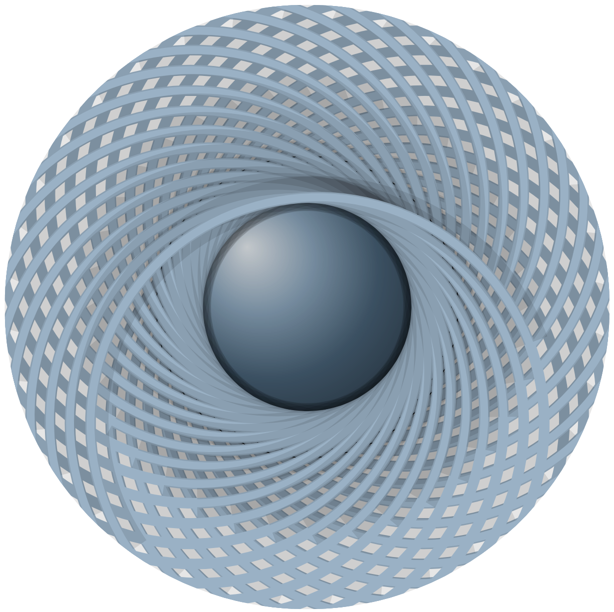
En particuluer $U\left(\frac{B}{2C}\right) = \frac{4AC - B^2}{4C} \geqslant 0$ ce qui donne $B \leqslant 2\sqrt{AC}$ c'est l'inégalité cherchée .

Si l'égalité à lieu, alors $J(f_\mu) = \frac{1}{\mu}U(\mu^2) = \frac{C}{\mu}\left(\mu^2 - \frac{B}{2C}\right)^2 = 0$ pour $\mu = \sqrt{\frac{B}{2C}}$

Or les fonctions minimisant J sont de la forme $\lambda\psi$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$f_\mu = \lambda\psi$ c'est -à-dire $f(\mu x) = \lambda\psi(x)$ donc $f(x) = \lambda\psi\left(\frac{x}{\mu}\right)$ où $\mu = \sqrt{\frac{B}{2C}}$.

❑



« Corrigé de l'épreuve »

Mines 2011, Maths I, MP

par Sadik Boujaida

Lycée Moulay Youssef – Rabat

Le sujet commence par démontrer (l'existence de) la décomposition de Dunford puis en donne deux applications : deux façon de caractériser une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en utilisant l'endomorphisme $M \longmapsto AM - MA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

A. Décomposition de Dunford

1. $\chi_A = (-1)^n \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$. Les polynômes $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ sont deux à deux premiers entre eux donc par utilisation du théorème de Cayley -- Hamilton et du théorème de décomposition des noyaux

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{id}) = \oplus_{k=1}^{r} F_k$$

2. Soit pour $k \in [\![1, r]\!]$, f_k est l'endomorphisme induit par f sur F_k donc pour tout $x \in F_k$, $P_k(f_k)(x) = (f_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k})^{\alpha_k}(x) = (f - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k}(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$. D'où $P_k(f_k) = 0$. $P_k = (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ est un polynôme annulateur de f_k et χ_{f_k} est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc $\chi_{f_k}(X) = (\lambda_k - X)^{d_k}$, ou $d_k = \dim F_k$. Puisque en plus χ_{f_k} divise χ_f et que λ_k est une racine de multiplicité α_k de χ_f alors $d_k \leqslant \alpha_k$ et ceci pour toutes les racines λ_k de χ_f.

Maintenant, l'égalité des degrés dans l'expression $\chi_A = (-1)^n \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ donne $n = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k$ et l'égalité des dimensions dans $E = \oplus_{k=1}^{r} F_k = \mathbb{C}^n$ donne $n = \sum_{k=1}^{r} d_k$. Ainsi

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r} d_k = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \ (= n) \\ \forall k \in [\![1,r]\!],\ d_k \leqslant \alpha_k \end{cases}$$

Donc pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $d_k = \alpha_k$ et finalement $\chi_{f_k} = (\lambda_k - X)^{\alpha_k} = P_k$.

3. On pose pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $n_k = f_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ de telle sorte que $f_k = \lambda_k \mathrm{id}_{F_k} + n_k$ et $n_k^{\alpha_k} = 0$. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $\mathbb{C}^n = \oplus_{k=1}^{r} F_k$, la matrice de f est ainsi de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où N_k est une matrice représentant l'endomorphisme n_k de F_k et qui est de ce fait nilpotente.

4. Soit P la matrice de passage dans la base dans laquelle a été écrite la matrice A' de f : $A = PA'P^{-1}$. On pose

$$D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } N = P \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

On a alors $A = D + N$, D est naturellement diagonalisable, N est nilpotente et

$$DN = ND = P \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r N_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

Une justification de l'unicité : Soient D' et N' deux matrices qui vérifient les mêmes conditions que D et N. $A - D'$ est nilpotente donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(A-D')^p = 0$.

Soit λ une va. p de D' et soit X un vecteur propre associé. $(A-D')^p X = 0$ implique que $(A - \lambda I_n)^p X = 0$, donc $A - \lambda I_n$ est non inversible et donc λ est une valeur propre de A et donc de D. De plus $\mathrm{Ker}(D' - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^p \subset F_\lambda$. F_λ étant le se. p de D associé à λ. On est dans la situation suivante : D et D' sont diagonalisables, toute va. p de D' est une valeur propre de D et le se. p de D' est inclu dans celui de D. Cela implique que $D' = D$, et par suite $N' = N$.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\chi_A = (1-X)(2-X)^2$. Une base du sous espace F_1 associé à la valeur propre 1 est constituée du vecteur $u_1 = (0,1,1)$, une base F_2 associé à la valeur propre 2 est (u_2, u_3) avec $u_2 = (1,1,0)$ et $u_2 = (1,1,1)$, qui vérifient $Au_1 = 2u_1$ et $Au_3 = u_2 + 2u_3$. On a ainsi $A = PA'P^{-1}$ avec

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit ensuite de prendre selon ce qui précéde :

$$D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B. Commutation et conjugaison

6. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P(X) &= \mathrm{conj}_{P^{-1}}\left(APXP^{-1} - PXP^{-1}A\right) \\ &= P^{-1}APX - XP^{-1}AP \\ &= \mathrm{comm}_{P^{-1}AP}(X) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_{P^{-1}AP}$.

7. Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $AE_{i,j} = \lambda_i E_{i,j}$ et $E_{i,j}A = \lambda_j E_{i,j}$. Donc $\mathrm{comm}_A(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$. Ce qui signifie que $E_{i,j}$ est un vecteur propre de comm_A associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$. Ainsi $(E_{i,j})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de comm_A, donc comm_A est diagonalisable.

8. Si A est diagonalisable, soit P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. $\mathrm{comm}_{P^{-1}AP}$ est diagonalisable d'après la question précédente, donc $\mathrm{conj}_{P^{-1}}\circ\mathrm{comm}_A\circ\mathrm{conj}_P$ est diagonalisable. En notant que conj_P et $\mathrm{conj}_{P^{-1}}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inverse l'un de l'autre, Les matrices de comm_A est $\mathrm{conj}_{P^{-1}}\circ\mathrm{comm}_A\circ\mathrm{conj}_P$ dans une base quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, ce qui implique que comm_A est diagonalisable.

9. Supposons que A est nilpotente d'indice p. Notons d_A et g_A les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par

$$d_A(X)=AX \text{ et } g_A(X)=XA$$

On a alors $\mathrm{comm}_A=d_A-g_A$. Sachant que pour tout $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$d_A\circ g_A(X)=g_A\circ d_A(X)=AXA$$

et donc que $d_A\circ g_A=g_A\circ d_A$, la formule du binôme de Newton donne

$$(\mathrm{comm}_A)^{2p}(X)=\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k d_A^{2p-k}\circ g_A^k(X)=\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k A^{2p-k}XA^k$$

On constate alors que si $0\leqslant k\leqslant p-1$, $A^{2p-k}=0$ et si $k\leqslant p\leqslant 2p$, $A^k=0$. Ainsi pour tout $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\mathrm{comm}_A^{2p}(X)=0$, soit $\mathrm{comm}_A^{2p}=0$.

10. On suppose que A est nilpotente et $\mathrm{comm}_A=0$.

$\mathrm{comm}_A=0$ implique que A commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ce qui à son tour implique que A est une matrice scalaire : Il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $A=\lambda I_n$.

La nilpotence de A implique ensuite que $\lambda=0$ soit $A=0$.

11. Considérons la décomposition de Dunford de A, $A=D+N$. Il est aisé de voir que $\mathrm{comm}_A=\mathrm{comm}_D+\mathrm{comm}_N$. Ensuite d'après la question **8.**, comm_D est diagonalisable. Et d'après la question **9.**, comm_N est nilpotent. En outre $\mathrm{comm}_D\circ\mathrm{comm}_N=\mathrm{comm}_N\circ\mathrm{comm}_D$ puisque pour tout $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\mathrm{comm}_D\circ\mathrm{comm}_N(X)=\mathrm{comm}_N\circ\mathrm{comm}_D(X)=NDX+XDN-NXD-DXN$$

Ainsi l'écriture $\mathrm{comm}_A=\mathrm{comm}_D+\mathrm{comm}_N$ représente la décomposition de Dunford de l'endomorphisme comm_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Concluons : Supposons que comm_A est diagonalisable, et considérons la décomposition de Dunford de A, $A=D+N$. comm_A et diagonalisable donc par unicité de la décomposition de Dunford $\mathrm{comm}_A=\mathrm{comm}_D$ et $\mathrm{comm}_N=0$. N et nilpotente et $\mathrm{comm}_N=0$ donc d'après ce qui précède $N=0$ et par suite la matrice $A=D$ est diagonalisable.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

12. On suppose que 0 est effectivement une valeur propre de u.

(i)⇒(ii) On suppose que u est diagonalisable. On a de façon naturelle $\operatorname{Ker}u\subset\operatorname{Ker}u^2$. Inversement soit v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Ker}u^2$ (qui est bien sûr stable par u). $v^2=0$ donc 0 est la seule valeur propre de v. Le polynôme caractéristique de v (qui est scindé) est donc $\chi_v=(-1)^dX^d$, où d est la dimension de $\operatorname{Ker}u^2$. Comme χ_v divise χ_u alors $d\leqslant\alpha$ où α est la multiplicité de la valeur propre 0 de u. u est diagonalisable donc $\alpha=\dim\operatorname{Ker}u$ et ainsi $\dim\operatorname{Ker}u^2\leqslant\dim\operatorname{Ker}u$.

Finalement $\operatorname{Ker}u=\operatorname{Ker}u^2$.

(ii)⇒(iii) On suppose que $\operatorname{Ker}u=\operatorname{Ker}u^2$. Soit $x\in\operatorname{Ker}u\cap\operatorname{Im}u$. $x\in\operatorname{Im}u$ donc il existe $y\in\mathbb{C}^n$ tel que $x=u(y)$. l'égalité $u(x)=0$ donne ensuite $u^2(y)=0$ et puisque $\operatorname{Ker}u^2=\operatorname{Ker}u$ alors $x=u(y)=0$. Ainsi $\operatorname{Ker}u\cap\operatorname{Im}u=\{0\}$.

13. Soient des scalaires $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_q$ tels que $\sum_{k=1}^{q}\lambda_k\varphi_k=0$. Donc pour tout $x\in E$

$$\sum_{k=1}^{q}\lambda_k\varphi_k(x)=b\left(\sum_{k=1}^{q}\lambda_k\varepsilon_k,x\right)=0$$

La forme bilinéaire b est non dégénérée donc $\sum_{k=1}^{q}\lambda_k\varepsilon_k=0$, et puisque la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_q)$ est libre alors $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_q=0$.

Ainsi la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_q)$ est libre.

14. On complète la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_q)$ en une base $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p)$ de E^* et on considère la base antéduale de cette dernière $(e_1,e_2,\cdots,e_p)$.

Soit $x\in E$, les propriétés d'une base duale permettent d'écrire

$$x=\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(x)e_k$$

On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned}
x\in\operatorname{Vect}\{e_{q+1},e_{q+2},\cdots,e_p\} &\iff \forall i\in[\![1,q]\!],\ \varphi_i(x)=0\\
&\iff \forall i\in[\![1,q]\!],\ b(\varepsilon_i,x)=0\\
&\iff \forall y\in F,\ b(y,x)=0\\
&\iff x\in F^{\perp b}
\end{aligned}$$

Ainsi $F^{\perp b} = \mathrm{Vect}\{e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_p\}$, et par suite $\dim F^{\perp b} = p - q$ ou encore

$$\dim F + \dim F^{\perp b} = \dim E \tag{15.1}$$

D. Critère de Clarès

15. La bilinéarité de φ découle immédiatement de la linéarité de la trace. Sa symétrie de la propriété $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$.

Soit maintenant $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(A, X) = 0$. Ce qui signifie que

$$\forall X = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Tr}(AX) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_{j,i} = 0$$

et en prenant successivement $X = E_{h,k}$ on obtient pour tout $(k, h) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{k,h} = 0$. Ainsi $A = 0$.

Alors φ est non dégénérée.

16. En alliant la formule du rang à la relation (15.1) établie dans la question **14.** on obtient $\dim(\mathrm{Ker\,comm}_A)^{\perp\varphi} = \dim(\mathrm{Im\,comm}_A) = n^2 - \dim(\mathrm{Ker\,comm}_A)$.

Notons ensuite qu'en général pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$

$$\begin{aligned}
\varphi\big(\mathrm{comm}_A(M), N\big) &= \mathrm{Tr}(AMN - MAN) \\
&= \mathrm{Tr}(AMN) - \mathrm{Tr}(MAN) \\
&= \mathrm{Tr}(NAM) - \mathrm{Tr}(ANM) \\
&= \mathrm{Tr}(-\mathrm{comm}_A(N)M) \\
&= -\varphi\big(M, \mathrm{comm}_A(N)\big)
\end{aligned}$$

Donc en particulier

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall N \in \mathrm{Ker\,comm}_A,\ \varphi(\mathrm{comm}_A(M), N) = 0$$

Ce qui signifie que $\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A) \subset (\mathrm{Ker\,comm}_A)^{\perp\varphi}$. D'où l'égalité voulue.

17. On suppose que A est nilpotente. Soit $M \in \mathrm{Ker\,comm}_A$. $AM = MA$ donc AM est nilpotente. Comme son polynôme caractéristique est scindé (le corps de base est $\mathbb{C}$) et que sa seule valeur propre est 0 alors sa trace, somme de ses valeurs propres, est nulle. Soit $\varphi(A, M) = \mathrm{Tr}(AM) = 0$.

On a montré que $\forall M \in \mathrm{Ker\,comm}_A$, $\varphi(A, M) = 0$, donc $A \in \big(\mathrm{Ker\,comm}_A\big)^{\perp\varphi}$.

D'après la question précédente, il existe donc $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = \mathrm{comm}_A(X)$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$. $A = AX - XA$ donc

$$\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = (A + \lambda I_n)X - X(A + \lambda I_n) = A$$

18. Soit la décomposition de Dunford $A = D + N$.

Reprenons les écritures de la question **4.**

$$D = P\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } N = P\begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

D'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe $Y_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{comm}_{N_i + \lambda_i I_{\alpha_i}}(Y_i) = N_i$ soit $(N_i + \lambda_i I_{\alpha_i})Y_i - Y_i(N_i + \lambda_i I_{\alpha_i}) = N_i$. Ce qui donne en posant

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Y_r \end{pmatrix} \text{ et } N' = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix}$$

et en considérant la matrice A' de la même question

$$A'Y - YA' = N'$$

Si on pose maintenant $X = PYP^{-1}$ alors,

$$\begin{aligned}
AX - XA &= (PA'P^{-1})(PYP^{-1}) - (PYP^{-1})(PA'P^{-1}) \\
&= P(A'Y - YA')P^{-1} \\
&= PN'P^{-1} \\
&= N
\end{aligned}$$

Soit $\mathrm{comm}_A(X) = N$.

19. On suppose que $\mathrm{Ker\,comm}_A = \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)^2$. D'après la question **12.** $\mathrm{Ker\,comm}_A \cap \mathrm{Im\,comm}_A = \{0\}$. Et d'après la question précédente $N \in \mathrm{Im\,comm}_A$. De plus N commute avec D, donc N commute avec $A = D + N$, et par suite $N \in \mathrm{Ker\,comm}_A$.

Ainsi $N \in \mathrm{Ker\,comm}_A \cap \mathrm{Im\,comm}_A$, d'où $N = 0$. Ce qui implique que A est diagonalisable.

❏

Rubrique Informatique

Les cahiers de prépas

Précis de langage C

« Informatique »

Khalid Ounachad & Sadik Boujaida

Lycée Moulay Youssef – Rabat

Le premier d'une série d'article consacré au langage de programmation **C** , abordé de façon concise et précise.

I. Structure d'un programme C :

Un programme C est constitué d'au moins une fonction (la fonction **main**), plus éventuellement des directives d'inclusion de fichiers d'entête (**#iclude <fic.h>**) et quelques déclarations de variables (globales).

Une fonction C est une portion de code indépendante, elle est composée d'instructions élémentaires. Une description des aspects principaux d'une fonction :

- La fonction **main( )** (dont le nom est imposé) est la seule fonction obligatoire d'un programme **C**. Elle renferme la partie principale d'un programme. C'est dans le corps de la fonction **main** qu'on récupère les données utilisateur et, par exemple, afficher des messages sur la sortie standard ou inscrire des rèsultats dans un fichier.
- Les fonctions **C** (y compris **main**) peuvent faire appel à d'autres fonctions, soit définies dans le(s) fichier(s) du programme lui même, soit fournies par des bibliothèques externes et dont on inclut le contenu grâce à la directive **#include** .

Glossaire de programmation

Langage de programmation Un langage structuré pouvant être traduit en langage machine (exécutable ou bibliothèque binaire) par un compilateur ou un interpréteur.

Compilateur programme capable de traduire du code source écrit dans un langage de programmation compilé en un fichier directement exécutable par le système d'exploitation cible. En général on peut directement compiler en ligne de commande un fichier source qui a été préalablement saisi dans un logiciel dédié (un éditeur de texte), le résultat serait la production d'un exécutable natif. Ex. de langage compilé : C, C++, Pascal, Fortran ...

Interpréteur Programme capable d'exécuter instanément du code source sans passer par une compilation. Le code ne peut être exécuté sans la présence de l'interpréteur dans le système. En général les interpréteurs ont deux modes de fonctionnement, l'un interactif : on entre dans le programme et on commence à interagir avec lui par le biais de commandes. L'autre mode consiste en l'appel en ligne de commande de l'interpréteur avec un fichier contenant du code qu'il va exécuter. Ex. de langage interprété : Javascript, php pour le web (pour Javascript, l'interpréteur est embarqué par le Navigateur), Perl et Python (des langages généralistes, très utilisés et sont capables de (presque) tout faire), Lua (un interpréteur très léger et pouvant être embarqué dans d'autres logiciels, souvent utilisé dans les jeux vidéos, mais aussi dans les appareils portables), Maple dispose aussi de son propre interpréteur ...

Le cas de Java Java est un langage de programmation qui n'est ni vraiment interprété, ni vraiment compilé. On compile du code source Java non pas en un exécutable natif mais en du bytecode qui est ensuite directement exécutable sur n'importe quelle plateforme (matérielle et logicielle) du moment qu'elle dispose d'une machine virtuelle Java (ou JVM).

Éditeur de texte C'est un petit logiciel, en général à l'usage des programmeurs. Ils sont souvent multi–langage et offrent : la coloration syntaxique du code source, la complétion automatique des mots clés, peuvent lancer des programmes externes pour agir sur le texte en cours d'édition (un compilateur ou un interpréteur par exemple)... Ex. d'éditeurs de texte : BBEdit , TextMate (pour Macintosh), Notepad++, jedit, SciTe, ... **N.B :** Saisir du code source **C** dans MS Word est une aberration, Notepad s'en acquittera très bien.

Qu'est ce qu'un IDE ? Un IDE (pour Integrated development Environment, ou environnement de programmation intégré) est en général une suite logicielle dédiée à un ou plusieurs langages de programmation. En plus du(des) compilateur(s) lui même, ils offrent une interface centralisée pour la saisie du code source, sa compilation, son débogage, et les tests d' exécution. Ils intègrent parfois un système d'aide en ligne dédié au(x) langage(s) géré(s). Parfois aussi un logiciel pour la construction d'interfaces graphiques. En outre ils sont capable de gérer tous les aspects de la création d'un logiciel, de la saisie du code source jusqu'à la rédaction de l'aide du dit logiciel. Ex. d'IDE : XCode (IDE officiel pour Macintoch), Visual C++, Visual Studio, Borland C++, Delphi, Eclipse, DevCPP , ...

Quel environnement de programmation C pour tel OS ? Pour OSX sur Macintosh, il suffit d'installer XCode disponible sur les DVD d'installation du système. Pour Linux, installer **gcc** et un éditeur (SciTE, nedit, emacs ou vi pour les experts ...) ou un IDE (Anjuta, Eclipse, ...), pour MS Windows sur PC, l'IDE DevCPP (gratuit) peut être suffisant, TurboC est obsolète, Visual C++ est surdimensionné pour un débutant.

Qu'est ce que gcc ? gcc (pour GNU C Compiler) est un ensemble de compilateurs. C'est le compilateur de la communauté GNU (responsable entre autre de Linux). En fait il comporte des compilateurs pour les langages **C, C++, ObjectiveC**, et même **Java**. Il est disponible pour presque toutes les platformes. C'est le compilateur par défaut sur la plupart des systèmes de type **Unix** : Linux, FreeBSD, NetBSD ... mais aussi MacOS X. Sous Windows, il est installable via le pack **MinGW** (installé avec l'environnement DevCPP).

... à suivre

- Toute fonction est constituée d'un *en-tête* et d'un *bloc* de code.
- L'*en-tête* est constitué de :

> ⇨ Le type de donnée que fournit la fonction en sortie (obligatoire) ;
>
> ⇨ le nom de la fonction elle même ;
>
> ⇨ entre parenthèses, la liste de ses paramètres précédés de leurs types de données respectifs.

Par exemple la ligne :

```c
int somme (int a, int b)
```

déclare une fonction qui porte le nom **somme**, qui prend deux paramètres de type entier et qui fournit un résultat de type entier.

Le type de sortie **void** peut être utilisé pour spécifier que la fonction ne fournit aucun résultat (mais peut très bien afficher des messages sur une sortie). Pour définir une fonction qui ne prend pas de paramètres il suffit de faire suivre son nom de parenthèses vides `()`. Par exemple la déclaration

```c
void fonction ()
```

définit la fonction **fonction** qui ne fournit pas de résultats et ne prend aucun paramètre. Une telle fonction pourrait servir à altérer les valeurs de certaines variables, modifier l'environnement d'exécution du programme ...

La valeur que doit renvoyer une fonction est spécifiée en utilisant le mot clé **return** (avec la syntaxe **return valeur**;).

- Un *bloc* est délimité par des accolades ({ et }) et peut être constitué d'instructions élémentaires, de boucles, de branchements, ... Il peut lui-même contenir d'autres blocs. En revanche, une fonction ne peut jamais contenir d'autres fonctions.
- Un exemple de fonction :

```c
int somme (int a, int b)
{
    return a+b;
}
```

la fonction **somme** prend deux arguments de type entiers et renvoie une valeur de même type qui est la somme des deux arguments.

N.B : Il est d'usage d'appeler paramètres d'une fonction les variables qu'elle prend en entrée lors de sa définition, mais arguments les variables instanciées qu'on lui passe lorsqu'on l'appelle dans un calcul ailleurs dans le programme.

#include Tout programme **C** devrait en principe commencer par l'instruction d'appel **#include** indiquant au compilateur **C** qu'il doit inclure le contenu de certains fichiers bibliothéque pendant la compilation. **Par Exemple :**

```c
#include <stdio.h>
```

signifie au compilateur d'inclure le contenu du fichier **<stdio.h>** de la bibliothèque standard du langage **C** . Ce fichier définit les fonctions d' entrées-sorties standards.

Structure d'un programme C La forme d'un programme **C** devrait ressembler à

```c
#include<stdio.h>
#include ...
    ... ... ...

type1 var1;
type2 var2;
    ... ... ...

void main ()
{
    ... blocs de code ...
}

typesortie1 func1 (type1 param1, type2 param2,...)
{
    ... blocs de code ...
}

typesortie2 func2 (type3 param3,type4 param4, ...)
{
    ... blocs de code ...
```

```
}
    ...  ...  ...
```

En exemple : le classique “Hello World” en **C** , à la sauce locale

```c
#include <stdio.h>
void main()
{
    printf ( "Salam! \n");
}
```

printf est une fonction de la bibliothèque **stdio.h** qui affiche des information sur la sortie standard qui est par défault l'écran.

un programme C peut inclure *Les éléments fondamentaux* suivants :

- Les caractères reconnaissable par le langage C ;
- Les identificateurs et les mots clés ;
- Les types de données ;
- Les constantes ;
- Les variables et les tableaux ;
- Les déclarations ;
- Les expressions ;
- Les instructions.

Dans cet article on traitera des caractères, des identificateurs, des types de données et des constatntes. Le reste suivra dans les prochains numéros.

I.1 L'ensemble des caractères

En **C** un caractère est une lettre, un chiffre, un signe ou un symbole (voir tableau 16.1, colonne 1, page 116)

I.2 Les identificateurs

Un identificateur est une suite de caractères dont le premier caractère est une lettre ou le caractère "souligné " (_). Un identificateur ne peut commencer par un chiffre. Les identificateurs servent à identifier les différents objets (données) manipulés par le programme (variables, tableaux, fonctions, étiquettes ...).
Exemple : X,Somme_1,_temp ...

Lettres	de **A** à **Z** et de **a** à **z**	
Chiffres	de **0** à **9**	
Opérateurs	+, -, *, /	opérateurs d'addition, de soustraction, de multiplication et de division (renvois le quotient de la division euclidienne pour les entiers)
	^	opérateur d'exponentiation (puissance)
	%	opérateur reste de la division euclidienne
	<, >	opérateurs de comparaison inférieur et supérieur
	<=, >=	opérateurs de comparaison inférieur ou égal, supérieur ou égal
	==, !=	opérateurs de comparaison égalité et différence
	=	opérateur d'affectation
	&, |	opérateurs logiques conjonction et disjonction bit par bit (le **et** et le **ou**)
	&&, ||	opérateurs logiques conjonction et disjonction
	!	opérateur de négation logique
	++	opérateur d'incrémentation. **++a** ajoute 1 à **a** et retourne le résultat, **a++** ajoute 1 à **a** mais renvoi l'ancienne valeur de **a**
	--	opérateur de décrémentation, fonctionne selon le même principe que **++**, mais dans le sens inverse
	+=, -=	variantes de l'opérateur d'affectation qui provoquent au même temps une incrémentation ou une décrémentation de la variable
	;	point-virgule, opérateur de terminaison d'une instruction simple
	( )	opérateur d'appel de fonctions
	[ ]	opérateur d'accès aux éléments d'un tableau
	? :	opérateur de branchements ternaire (3 arguments), **a ?b :c** évalue **a** et renvoi **b** si **a** est vrai, **c** sinon
Symboles	#	symbole annonçant une directive du préprocesseur (**#include, #define, #error, ...**)
	'	quote, sert à délimiter un caractère
	"	double quote, sert à délimiter une chaine de caractère
Caractères spéciaux	\a	bell (bip sonore)
	\b	backspace (retour arrière)
	\t	horizontal tabulation (tabulation horizontale)
	\w	vertical tabulation (tabulation verticale)
	\n	newline (saut de ligne, sans saut de chariot)
	\r	carriage return (retour à la ligne, sans de ligne)
	\f	formfeed (nouvelle page)
	\\	le caractère backslash (\)
	\'	le caractère quote (')
	\"	le caractère double quote (")
	\0	le caractère **Null** (fin d'une chaine de caractères)

Tab. 16.1 : Caractères utilisables en **C**

1.3 Les mots clés

Les mots clés sont des noms réservés par le langage, le programmeur ne peut pas les utiliser comme identificateurs. Les mots clés du langage **C** sont :

auto	**break**	**case**	**char**	**const**	**continue**	**default**	**do**
double	**else**	**enum**	**extern**	**float**	**for**	**goto**	**if**
int	**long**	**register**	**return**	**short**	**signed**	**sizeof**	**static**
struct	**switch**	**typedef**	**union**	**unsigned**	**void**	**while**	

REMARQUES

1. Le compilateur **C** est sensible à la casse : une lettre majuscule n'est pas équivalente à la lettre correspondante en minuscule.
2. Les mots clés sont tous en minuscule.

1.4 Les types de données

Le langage **C** supporte plusieurs types de données. Chacun des types pouvant avoir une taille mémoire différente et qui dépend de la plateforme utilisée. Les types de base du langage C se répartissent en 3 grandes catégories :

Type de donné	**Mots clés C**	Description
Le type entier	**int**	correspond à la représentation des nombres entiers relatifs, il inclut les valeurs logiques (0 pour Faux et toute autre valeur pour Vrai, le langage **C** ne dispose pas de type **boolean** dédié).
Le type flottant	**float** **double**	représente les nombres réels (en fait rationnels) sous forme flottante, de taille simple ou double
Le type caractère	**char**	les caractères simples, inclut les caractères non imprimables

Types de données simples du langage **C**

Signalons quand même le type **void** (vide) surtout utilisé pour spécifier qu'une fonction ne retourne pas de valeurs.
À ces types fondamentaux s'ajoutent des types dérivés en leurs apposant les mots clés **short** et **long**. (par ex. **short int**, **long double** ...). Mais aussi les mots clés **signed** et **unsigned**. Les types non signés sont alors de taille double de ceux qui sont signés, puisque le bit réservé au stockage du signe peut être alors libéré.

Ces types sont les **types simples** à partir desquels pourront être construits tous les autres types tels que : les types structurés (tableaux, chaîne de caractères, enregistrement, liste chainée...) et d'autres types simples (pointeurs).

Le type entier

Les différents types d'entiers :

short int (abrégé short)	int	long int (abrégé long)

Chacun de ces types peut être signé ou pas . Il est précédé du mot clé **unsigned** ou **signed**. Chaque type n'a pas la même taille mémoire (qui dépend de la plateforme, 64 bits ou 32 bits). On peut la connaître à l'aide de la fonction **sizeof(type)** où **type** est le nom d'un type de base.

Le type flottant

Le type flottant représente de manière approchée les nombres réels. On distingue 4 types de flottants correspondants á des tailles différentes et des précisions différentes :

float	double	long float	long double

Le type caractère

Le type caractère un type centrale de tout langage de programmation puisque il permet de représenter les caractères du langage naturel. En **C** il'est invariablement de la même taille mémoire quelque soit le compilateur : un octet.
On distingue :

les caractères imprimables qui se notent en écrivant entre guillemet simple le caractère voulu : 'a', 'A', '6', '+' (dans ce dernier cas il s'agit du caractère + lui même pas de l'opérateur d'addition).

Les caractères non imprimables qui provoquent une action particulière à l'exécution du programme. Ils se notent en faisant précéder le caractère voulu de \ (antislash) :

\b \n \f \t \v \r \\ \' \" \? \0

(Voir tableau page 116)

Les symboles du langage C certains caractères sont utilisés par le langage lui même et doivent être précédé d'une séquence d'échappement (le caractère backslah \) si on veut les utiliser comme simple caractère. Par exemple \' pour le caractère ', ou \\ pour le caractère \.

N.B : il est possible d'accéder à un caractère par son code octal ou hexadécimal, en faisant précéder ce code par le caractère \ dans le premier cas, par la séquence **\x** dans le deuxième.

Les constantes

Une constante représente une valeur d'un type donné dans un programme.
Il y a 4 types de constantes :

Les constantes entières (de type entier) Plusieurs représentations possibles :

Représentation	description	exemples
décimale	écriture naturelle en base 10	1432, - 056 (signée)
octale	Le premier chiffre doit être un 0 (zéro)	015 (vaut 13 en décimal)
hexadécimale	la constante doit commencer par 0x	0xff (vaut 255 en décimal)

Représentations des constantes de type entier

Les constantes flottantes Notation décimale des flottants :

- Notation normale : .27 pour (0.27), 4. (pour 4), 0.381234, -.38 ...
- Notation exponentielle, mantisse **E** exposant : 42.5E4 (pour 42.5×10^4), 4e13 ...

Les constantes caractère 'C' 'c' '*' '0'

Les constantes chaînes de caractères Une chaine de caractères est constituée d'une séquence de caractères délimitée par des doubles quotes "

La langage **C** ne définit pas un type dédié aux chaines de caractères (type **string** dans d'autres langages). Une chaine de caractère **C** est en fait un tableau de caractère qui se termine par le caractère \0 (**Null**). Le compilateur **C** les reconnait de façon automatique et il n'est pas besoin d'utiliser la syntaxe propre aux tableaux pour déclarer une chaine de caractère : il suffit de placer la chaine entre double quote.

Exemples de chaines de caractères :

"A"	différent du caractère 'A', puisque encodé sur deux octets, A et **Null**
""	chaine vide (un octet)
"ab\"c"	interprété comme ab"c
"ligne1\nligne2"	<ligne1> <saut de ligne> <ligne2>
"\t to continue, press the \"Return\" key"	<tabulation horisontale> to continue, press the "Return" key

Les constantes symboliques un nom qui substitue une séquence de caractères dans un programme C. On les appelle aussi des macros.

La séquence de caractères peut représenter :

- une constante numérique
- une constante caractère
- une chaîne de caractère

À la compilation du programme C, chaque occurrence de la constante symbolique est remplacée par la séquence de caractères correspondante.

Elle sera définie dans le programme suivant la syntaxe suivante :

```
#define NOM valeur
```

où **NOM** correspond au nom de la constante. Il doit être écrit en lettres majuscules et **valeur** correspond à la séquence de caractères.

Exemple :

```
#include<stdio.h>
#define TAXE 0.34
#define VRAI 1
#define PAYS ''maroc''
void main ()
{
    int c;
    c=VRAI;
    printf(''%f'',TAXE);
    printf(''%s'',PAYS);
}
```

Qu'est ce que Maple™ ?

Maple™, est dit un logiciel de calcul formel, en opposition avec calcul numérique (ou scientifique) qui a aussi ses représentants tel Matlab™ ou Scilab. Il est édité par la société canadienne MapleSoft qui vient d'en sortir la version 14. Maple™ est capable de faire des calculs de façon symbolique sans se soucier de la valeur numérique des variables utilisées, de la même manière qu'un mathématicien manipule des équations sans au préalable imposer des valeurs données à ses variables.

Maple™ dispose, depuis la version 7, de deux interfaces graphiques : l'interface historique renommée Maple Classic™, et une plus récente totalement réécrite en Java. Ce qui a permis à Maple™ d'être porté avec un moindre effort vers les plateformes moins courantes (mais majoritaires dans les milieux universitaires) de type Unix, mais aussi MacOS X. L'interface Classic est disponible pour MS Windows™ et continue à être proposée, mais sans vraiment évoluer, dans les versions récentes, et pour Linux à travers l'exécutable **wcmaple**. Elle n'est par contre pas fournie pour MacOS X. Pour la nouvelle interface le programme d'installation intègre une machine virtuelle Java™ et en général l'utilisateur n'a pas besoin d'en installer une (qui de toute façon ne sera pas utilisée, à moins d'intervenir dans ce sens). Le logiciel intègre un système d'aide en ligne qui peut s'avérer une source d'apprentissage inéstimable et une référence complète pour tout ce qui touche à son utilisation. Il propose en outre depuis la version 7, une technologie appelée Maplet™, qui permet d'exporter de façon transparente un programme Maple™ en une applet Java, qui de cette manière peut être par exemple diffusée sur une page web. Il a aussi depuis un certain temps acquis des capacités de logiciel tableur et peut gérer en import/export des fichiers MS Excel™. Les Maplets et les fonctionnalités tableur ne sont actives que dans l'interface Java™.

Les élèves des classes préparatoires peuvent l'utiliser comme une simple (super)calculatrice pour le calcul, disons de limites, de sommes de séries, de développement limités, d'intégrales et de primitives, de déterminant, valeurs et vecteurs propres de matrices... Il permet de résoudre de façon simple diverses sortes d'équations (système d'équations algébriques, équations de récurrence, équations différentielles). Et il a des capacités graphiques, tel le tracé de graphes de fonctions ou de surfaces dans l'espace.

En outre, Maple™ intègre son propre langage de programmation, ce qui permet d'étendre ses capacités en définissant soit même de nouvelles fonctions. Dans ce sens il peut très bien être utilisé comme un environnement d'initiation à la programmation sans les contraintes liées aux déclarations de types de variables (et donc de la gestion de la mémoire) et aux problèmes de compilation inhérents aux langages de programmation classiques.

« Cours Maple »

Algèbre linéaire avec Maple

par Sadik BOUJAIDA

Lycée Moulay Youssef – Rabat

Un cours dont l'objectif est de donner au lecteur les moyens de résoudre des problèmes de l'algèbre linéaire en s'aidant du logiciel de calcul formel Maple. Il ne s'arrête pas à la description de quelques commandes calculatoires pour avoir telle ou telle information sur une matrice, mais adopte une approche plus constructive et commence par définir les bases d'une utilisation relativement avancée du logiciel.

I. Les listes et les ensembles :

I.1 Séquences :

Une séquence Maple est une suite d'objets maple quelconques, séparés par des virgules. Une séquence en elle même est un objet maple et peut donc recevoir un nom (affectation).

```
> S :=1,2,x^2+1,exp(a),diff(x*ln(x),x) ;
```

$$S := 1,\ 2,\ x^2+1,\ e^a,\ \ln(x)+1$$

Maple™

On peut accéder à un élément d'une séquence en utilisant les crochets [ ] et sa position dans la séquence.

```
> S[1] ;S[3] ;
```

$$1$$
$$x^2+1$$

Maple™

Pour construire des séquences on dispose de l'operateur **$** et de la procédure **seq.**

```
> k $k=1..5 ;   #construction de la sequence 1,2,3,4,5 ;
```

$$1, 2, 3, 4, 5$$

```
> x^k $k=0..5 ;
```

$$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$$

```
> x$3 ;        #construction de la séquence x,x,x
```

$$x, x, x$$

Maple™

Exemples d'utilisation du constructeur **$:**

```
> diff(x^5,x,x,x) ;diff(x^5,x$3) ;
```

$$60\,x^2$$
$$60\,x^2$$

Maple™

et pour **seq :**

```
> seq(x^k,k=0..5) ;
```

$$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$$

Maple™

La séquence vide est NULL.

```
> L :=NULL ;
```

$$L :=$$

```
> L :=L,a ;
```

$$L := a$$

Maple™

I.2 Listes :

Une liste est une séquence mise entre crochets [ ], elle correspond à la notion mathématique de famille finie d'éléments. La liste vide est [ ].Si L est une liste maple :

L[k] **op(k,L)**	désigne le k[ème] élément de L
op(L)	retourne la séquence des éléments de la liste L
nops(L)	retourne le nombre d'éléments dans L

REMARQUES

1. **op** et **nops** ne fonctionnent pas avec les séquences
2. **$** et la procédure **seq** peuvent être utilisés pour construire des listes.

Liste des polynômes de Legendre $P_n = \dfrac{d^n\left[\left(x^2-1\right)^n\right]}{dx^n}$ de 1 à 4 :

```
> L :=[seq(diff((x^2-1)^k,x$k),k=1..4)] ;
```

$$L := \left[2\,x, 12\,x^2-4, 48\,x^3+72\left(x^2-1\right)x, 384\,x^4+1152\left(x^2-1\right)x^2+144\left(x^2-1\right)^2\right]$$

```
> op(3,L) ;
```

$$48\,x^3+72\left(x^2-1\right)x$$

```
> L[3] ;
```

$$48\,x^3+72\left(x^2-1\right)x$$

```
> nops(L) ;
```

$$4$$

Maple™

On peut directement changer la valeur d'un élément de la liste par affectation (ne marche pas avec une séquence)

```
> L[4] :=0 ;
> L ; #pour voir si L[4] a effectivement changé.
```

$$[2\,x, 12\,x^2-4, 48\,x^3+72\,(x^2-1)\,x, 0]$$

Maple™

Et pour récupérer la séquence des éléments de la liste L :

```
> S :=op(L) ;
```

$$S := 2\,x,\ 12\,x^2-4,\ 48\,x^3+72\,(x^2-1)\,x,\ 0$$

Maple™

I.3 Ensembles :

Un ensemble est une séquence placée entre accolades { }, ceci correspond à la notion effective d'ensemble fini. L'ensemble vide est { }.
La différence avec une liste est que dans un ensemble l'ordre d'entrée des éléments n'est pas respecté, les éléments en doubles sont aussi éliminés.

```
> K :={1,2,E,Pi,1} ;
```

$$K := \{1, 2, E, \pi\}$$

Maple™

Noter que le double de 1 à été éliminé et que l'ordre des éléments à changé.
Ce qui a été dit pour les listes reste valable pour les ensembles avec quelques différences de comportements.

```
> K[3] ;op(3,K) ;
```

$$\pi$$
$$\pi$$

```
> nops(K) ;
```

$$4$$

```
> op(K) ;
```

$$1,\ 2,\ \pi,\ E$$

Maple™

I.4 Conversion de types

On peut convertir un objet de type donné , en un autre d'un autre type mais avec les mêmes opérandes, une liste en un ensemble par exemple. Pour cela Maple offre la commande **convert**. Il suffit de connaitre le nom du type cible : une liste est une *list* est un ensemble est un *set* (par exemple).

```
> L :=[x,y,z] ;S :={0,0,1,a,b,c} ;
```

$$L := [x, y, z]$$
$$S := \{0, 1, a, b, c\}$$

```
> convert(L,set) ;
```

$$\{x, y, z\}$$

```
> convert(S,list) ;
```

$$[0, 1, a, b, c]$$

Maple™

Noter que pour changer le type d'un objet en une séquence, il n'est pas besoin d'utiliser **convert**, la procédure **op** suffit

```
> op(L) ;
```

$$x,\ y,\ z$$

Maple™

Une utilisation utile de cette commande est la possibilité de récupérer rapidement l'ensemble des coefficients d'une matrice.

```
> A :=matrix(2,2,[x,y,z,t]) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

```
> convert(A,set);
```

$$\{t, x, y, z\}$$

Maple™

d'autres exemples

```
> convert([x,y,z],`+`);
```

$$x+y+z$$

```
> convert([x,y,z],vector);
```

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

Maple™

II. Expressions et procédures :

II.1 Expressions, expressions polynomiales :

Une expression maple correspond à ce que on peut qualifier d'expression mathématique faisant intervenir des variables, des constantes, des opérateurs, éventuellement des fonctions usuelles ...

```
> a :=x^2+1;
```

$$a := x^2+1$$

```
> b :=x*ln(x+1);
```

$$b := x \ln(x+1)$$

```
> c :=diff(b,x$2)/a;
```

$$c := \left(2\,(x+1)^{-1} - \frac{x}{(x+1)^2}\right)(x^2+1)^{-1}$$

```
> d :=int(a^2+1,x);
```

$$d := 2x + 1/5\,x^5 + 2/3\,x^3$$

Maple™

a,b,c,d sont des exemples d'expressions. Dans une expression, on peut substituer une variable à une autre en utilisant **subs**

```
> subs(x=2,b);
```

$$2\ln(3)$$

```
> subs(x=y+1,b);
```

$$(y+1)\ln(y+2)$$

Maple™

On notera que les indéterminées d'une expression ne sont pas considérées comme des variables scalaires, mais des paramètres formels au sens large du terme, et donc dans une substitution par exemple vous pouvez donner à une variable une valeur matricielle tant qu'il n'y a pas d'incompatibilité aboutissant à une erreur à l'exécution.
Un polynôme et en particulier une expression faisant intervenir une ou plusieurs indéterminées et des constantes liées par les opérateurs **+** et *

```
> P :=sum((n+1)*x^n,n=0..5);
```

$$P := 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5$$

```
> Q :=product(x^k-y,k=1..4);
```

$$Q := (x-y)(x^2-y)(x^3-y)(x^4-y)$$

Maple™

Coefficients d'un polynôme, en utilisant **coeff** :

```
> coeff(P,x^2);
```

$$3$$

```
> coeff(Q,y^3);
```

$$-x-x^2-x^3-x^4$$

```
> coeff(Q,y,3); #la même chose que l'instruction précédente
```

$$-x-x^2-x^3-x^4$$

Maple™

Pour récupérer la séquence des coefficients (non nuls) d'un polynôme, on dispose de **coeffs** :

```
> coeffs(P,x);
```

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

```
> coeffs(x^3+2,x);
```

$$2,\ 1$$

Maple™

coeffs retourne la séquence des coefficients non nuls (seulement) du polynôme, présentés dans l'ordre croissants des puissances de l'indéterminée indiquée. Ce qui dans un exercice d'algèbre linéaire par exemple peut s'avérer inadapté.
Dans ce cas on peut demander explicitement la construction de la séquence des coefficients.

```
> R :=1+p*x+q*x^3;
```

$$R := 1 + px + qx^3$$

```
> C :=seq(coeff(R,x,k),k=0..4);
```

$$C := 1,\ p,\ 0,\ q,\ 0$$

Maple™

N.B : L'instruction **coeff(P,x^0)** retourne un message d'erreur (compréhensible), préférer pour cela toujours la syntaxe **coeff(P,x,k)**.
On peut réordonner l'écriture d'un polynôme suivant les puissances décroissantes d'une indéterminée en utilisant **collect**.

```
> collect(Q,x);
```

$$x^{10} - yx^9 - yx^8 + \left(y^2 - y\right)x^7 + \left(y^2 - y\right)x^6 \\ +2\,y^2x^5 + \left(-y^3 + y^2\right)x^4 - \left(y^2 - y\right)yx^3 - y^3x^2 - y^3x + y^4$$

Maple™

D'autres procédures utiles pour le traitement des expressions polynomiales :

degree(P,x)	pour le degré de P selon l'indéterminée x
expand(P)	pour le développement de P s'il est donné sous forme factorisée
factor(P)	factoriser P (autant que possible, en fait la factorisation se fait dans Q[X])
factor(P,a)	factoriser P dans l'anneau Q[a][X]
roots(P)	la liste des racines dans le corps $\mathbb{Q}$ de P avec leurs ordres de multiplicité
roots(P,a)	la liste des racines de P se trouvant dans le corps Q[a] avec leurs ordres de multiplicité

```
> P :=(x^2+1)^2*(x-1)^3;
```

$$P := \left(x^2+1\right)^2\left(x-1\right)^3$$

```
> Q :=expand(P);
```

$$Q := x^7 - 3\,x^6 + 5\,x^5 - 7\,x^4 + 7\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 1$$

```
> factor(Q);
```

$$\left(x^2+1\right)^2\left(x-1\right)^3$$

```
> roots(P);
```

$$[[1,3]]$$

```
> roots(P,I); # I est le nombre complexe noté usuellement i.
```

$$[[-I,2],[I,2],[1,3]]$$

```
> roots(x^2-2);
```

$$[]$$

```
> roots(x^2-2,sqrt(2));
```

$$[[-\sqrt{2},1],[\sqrt{2},1]]$$

Maple™

II.2 Procédures :

Une procédure maple est ce qui correspondrait à la notion mathématique de fonction.
Pour la construction de fonctions on dispose de l'opérateur **->**(les symboles "moins" et "supérieur"), ou de la procédure **unapply**.
Pour la définition de procédures plus avancées, le constructeur de procédure **proc** est le choix ultime.

```
> f :=x->x^2 ;
```

$$f := x \mapsto x^2$$

```
> g :=(x,y)->x*ln(y) ;
```

$$g := (x, y) \mapsto x \ln(y)$$

```
> f(2) ;f(a^2) ;
```

$$4$$
$$a^4$$

```
> g(3,2) ;g(a,b) ;
```

$$3 \ln(2)$$
$$a \ln(b)$$

Maple™

Encore une fois le domaine de définition d'une procédure est strictement formel, et on peut demander la valeur d'une fonction en n'importe quel objet, pourvu que cela ne provoque pas d'erreurs.

```
> A :=matrix(2,2,[1,1,0,2]) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> f(A) ;
```

$$A^2$$

```
> evalm(f(A)) ;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Maple™

On expliquera le fait qu'il ait fallu passer par evalm pour afficher le résultat dans les prochains paragraphes.
La procédure **unapply** permet de la même façon de construire une fonction à partir d'une expression.

```
> h :=unapply(a*ln(x+1),x) ;
```

$$h := x \mapsto a \ln(x+1)$$

```
> h(b) ;
```

$$a \ln(b+1)$$

Maple™

Et pour une fonction de plusieurs variables :

```
> k :=unapply(a*ln(x+1),x,a) ;
```

$$k := (x, a) \mapsto a \ln(x+1)$$

```
> k(1,3) ;
```

$$3 \ln(2)$$

Maple™

Noter qu'un nom suivi d'un symbole parenthèse fait automatiquement que celui ci est considéré comme le nom d'une procédure, même si ce nom est une constante (il s'agit alors de la fonction constante prenant cette valeur).

```
> 1(x) ;1(3) ;
```

$$1$$
$$1$$

```
> g :=h+1 ;
```

$$g := h+1$$

```
> g(b) ;
```

$$a \ln(b+1)+1$$

Maple™

Une utilisation intéressante des fonctions, pour le sujet que traite cet article, se fait en association avec **map** :
map(*func, expr*) applique la fonction *func* aux opérandes de *expr*, que *expr* soit une liste, un ensemble ou une expression quelconque.

```
> L :=[k $k=0..5] ;
```

$$L := [0, 1, 2, 3, 4, 5]$$

```
> map(k->x^k,L);
```

$$[1, x, x^2, x^3, x^4, x^5]$$

```
> map(k->diff(x^5,x$k),[k $k=1..5]);
```

$$[5\,x^4, 20\,x^3, 60\,x^2, 120\,x, 120]$$

```
> A :=a+b+c;
```

$$A := a + b + c$$

```
> map(x->x^2,A);
```

$$a^2 + b^2 + c^2$$

```
> f :=x->x^2;
```

$$f := x \mapsto x^2$$

```
> map(f+1,A);
```

$$a^2 + 3 + b^2 + c^2$$

Maple™

map ne fonctionne pas avec les séquences, si vous devez "mapper" la fonction f à une séquence S, faites le plutôt avec la liste $[S]$: **map(f,[S])**

II.3 Résolution de systèmes d'équations algébriques

La procédure **solve** permet de résoudre des équations (ou des systèmes d'équations) algébriques (entre autre), la syntaxe est de la forme

solve(*eqs,incs*) ;

où *eqs* est une équation ou un ensemble (au sens Maple) d'équations avec une ou plusieurs indéterminées et *incs* un nom ou un ensemble de noms d' inconnues intervenant dans *eqs*. De cette façon on peut décider que certaine indéterminées jouent le rôle d'inconnues alors que d'autres celui de paramètres. On peut négliger de préciser l'argument *incs*, dans ce cas toutes les indéterminées sont considérées comme des inconnues.

```
> solve(a*x+b=0,x);solve(a*x+b=0);
```

$$-\frac{b}{a}$$

$$\{a = a, b = -a x, x = x\}$$

```
> solve({a*x+b*y=alpha,c*x+d*y=beta},{x,y});
```

$$\left\{x = \frac{d\alpha - \beta\, b}{ad - cb}, y = \frac{-c\alpha + a\beta}{ad - cb}\right\}$$

Maple™

Maple ne se soucie guère de la validité du résultat dans le cas où des paramètres entrent en jeu. Dans le dernier exemple, il a donnée une solution unique du système linéaire que le déterminant $ad - bc$ soit nul ou pas.
Dans le cas où une équation se termine par une égalité avec 0, on peut négliger de préciser =0. Ce détail peut s'avérer très pratique.

```
> solve(a*x+b,x);
```

$$-\frac{b}{a}$$

Maple™

La réponse de Maple est un terme qui représente la solution dans le cas où il y'a une seule inconnue, un ensemble d'égalités dans le cas où il y'en a plusieurs. Bien que dans ce deuxième cas les égalités semblent donner des valeurs aux inconnues, il n'en est rien. Les noms des inconnues restent libres (sans valeurs).

Utilisation de subs pour récupérer les résultats

La syntaxe générale de la procédure **subs** est de la forme

subs(*eqs,expr*) ;

où *eqs* est une égalité , une séquence, une liste ou un ensemble d'égalités et *expr* une expression Maple quelconque. Maple va alors remplacer chaque terme de gauche dans le(s) égalité(s) de *eqs* par le terme de droite de la même égalité dans l'expression *expr*. Aucun calcul ne sera effectué, Maple se contentant d'une substitution pure et simple. Noter que la priorité des substitutions sera différente selon est-ce que *eqs* est une liste ou un ensemble.
On peut alors utilser **subs** pour effectivement affecter les valeurs des solutions d'une équation à des noms donnés.

Exemple :

On voudrait déterminer les matrices carrées d'ordre 2 qui commutent avec la matrice

```
> A :=matrix(2,2,[1,1,0,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Maple™

Pour cela on définit une matrice inconnue X

```
> X :=matrix(2,2,[x,y,z,t]);
```

$$X := \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

Maple™

On évalue la différence $AX - XA$ (voir paragraphe suivant pour les détails de la syntaxe)

```
> M :=evalm(A&*X-X&*A);
```

$$M := \begin{bmatrix} z & 2\,y + t - x \\ -2\,z & -z \end{bmatrix}$$

Maple™

On récupère l' ensemble des équations et celui des inconnues en utilisant **convert**

```
> eqs :=convert(M,set);incs :=convert(X,set);
```

$$eqs := \{z, -2\,z, -z, 2\,y + t - x\}$$

$$incs := \{t, x, y, z\}$$

Maple™

On résout

```
> sol :=solve(eqs,incs);
```

$$sol := \{t = -2\,y + x, x = x, y = y, z = 0\}$$

Maple™

Maintenant pour voir effectivement la forme des matrices qui commutent avec A

```
> subs(sol,evalm(X));
```

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & -2\,y + x \end{bmatrix}$$

Maple™

III. Initiation aux boucles et aux instructions conditionnelles.

III.1 Instructions conditionnelles avec if

Une instruction conditionnelle sert à exécuter une instruction si une certaine condition est réalisée.

```
if cond1 then
        task1
elif cond2 then
        task2
    … …
elif condN then
        taskN
else
        task(N+1)
fi;
```

va vérifier si cond1 est réalisée, auquel cas task1 sera exécuté et l'instruction se termine, sinon cond2 sera testée, et ainsi de suite, si aucune des condition condK n'est réalise alors l'instruction task(N+1) du bloc **else** sera exécutée et l'instruction se termine. Une instruction conditionnelle n'a d'intérêt que dans le corps d'une procédure.

```
> f :=x->if x<0 then 0 elif x<1 then 1 else 2 fi;
```

$$f := x \to \text{if } x < 0 \text{ then } 0 \text{ elif } x < 1 \text{ then } 1 \text{ else } 2 \text{ endif}$$

```
> map(f,[-1,1/2,2]);
```

$$[0, 1, 2]$$

```
> g :=n->if isprime(n) then n^2 else 0 fi ; # isprime(n) est vraie si n est premier.
```

$$g := n \to \text{if } isprime(n) \text{ then } n^2 \text{ else } 0 \text{ endif}$$

```
> isprime(5) ;isprime(10) ;
```

true
false

```
> map(g,[2,4,5,6,9,11]) ;
```

$$[4, 0, 25, 0, 0, 121]$$

Maple™

Pour faire des tests dans une instruction conditionnelle on utilise les opérateurs de comparaisons **<**,**>**,**<=**,**>=** ,**=** et **<>** (pour différent) ; ou des procédures (tel **isprime**) prédéfinies en maple et qui en général donnent une réponse booléenne : true (vrai) ou false (faux). On peut aussi construire ses propres procédures de test. Dans l'exemple suivant on construit la procédure isodd qui vérifie si son argument est impaire ou non.

```
> isodd :=x-> if x mod 2 = 1 then true else false fi ;
```

$$isodd := x \to \text{if } x \bmod 2 = 1 \text{ then } true \text{ else } false \text{ endif}$$

```
> isodd(16) ;isodd(5) ;
```

false
true

Maple™

III.2 Boucles for et boucles while :

Une boucle est une instruction adaptée à l'exécution de taches répétitives. On distingue deux types de boucles (et ce dans tous les langages de programmation) :

Les boucles for :

for *k* **from** *a* **to** *b* **by** *p* **do** *task* **od** ;

va exécuter la tâche *task* pour *k* allant de *a* à *b* en avançant d'un pas *p*, si le bloc **by** *p* n'est pas présent le pas par défaut est 1, le bloc **from** *a* peut être aussi absent, auquel cas la boucle commence à partir de 1. Mieux, si le corps *task* ne dépend pas de la valeur de *k*, notre instruction pourrait se limiter à **to** *b* **do** *task* **od ;**, ce qui fera que la tache *task* sera exécutée *b* fois.

Les boucles while :

while *cond* **do** *task* **od ;**

va exécuter la tâche *task* tant que le test de la condition *cond* sera réussi.

Exemples :

```
> a :=2 ;
```

$$a := 2$$

```
> to 5 do a :=2*a od ;
```

$$a := 4$$
$$a := 8$$
$$a := 16$$
$$a := 32$$
$$a := 64$$

Maple™

Ici on initie la variable *a* avec la valeur 2, et on exécute une boucle **for** qui va à chaque fois multiplier la valeur de *a* par 2. Ainsi *a* va recevoir successivement comme valeur les puissances de 2.

```
> L :=[] ;
```

$$L := []$$

```
> for k from 1 to 100 do
> if isprime(k) then L :=[op(L),k] fi
> od ;
> L ;
```

$$[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]$$

Maple™

Ici la boucle parcourt les entiers de 1 à 100, dés qu'elle tombe sur un nombre premier elle l'ajoute à la liste L qui était au départ vide.
A noter que l'instruction suivante fait la même chose.

```
> select(isprime,[n $n=1..100]);
```

$$[2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97]$$

Maple™

La procédure **select** fonctionne selon le même principe que **map**, son premier argument doit être une fonction de test, ce test sera effectué sur les opérandes du deuxième argument. L'instruction ne conservera alors que les opérandes qui vérifient le test.
Un autre exemple (qui parle de lui même) :

```
> select(x->if x>0 then true else false fi , [1,-1,0,2,-5]);
```

$$[1,2]$$

Maple™

Un exemple d'utilisation d'une boucle while

```
> a :=160 ;k :=0 ;
```

$$a := 160$$
$$k := 0$$

```
> while a<>0 mod 2 do k :=k+1 ; a :=iquo(a,2) od ;
```

$$k := 1$$
$$a := 80$$
$$k := 2$$
$$a := 40$$
$$k := 3$$
$$a := 20$$
$$k := 4$$
$$a := 10$$
$$k := 5$$
$$a := 5$$
$$k := 6$$
$$a := 2$$
$$k := 7$$
$$a := 1$$
$$k := 8$$
$$a := 0$$

Maple™

La boucle vérifie à chaque fois si a ne vaut pas 0 modulo 2, sinon elle remplace a par son quotient par 2 et incrémente k d'une unité. Ce qui permet au final de récupérer dans k l'exposant de 2 dans la décomposition en produit de nombres premiers de la valeur initiale de a :160.

IV. Matrices et vecteurs

IV.1 Différentes méthodes de construction.

Un vecteur est le couple formé de sa taille et de la liste de ses coordonnées, ce qui permet éventuellement de ne pas préciser toutes les coordonnées depuis le départ.

La procédure **vector** permet de construire des vecteurs avec plusieurs variantes dans la syntaxe.
La forme la plus basique, la taille plus la liste des coordonnées :

```
> vector(4,[1,0,0,0]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maple™

Au lieu de préciser la liste des coefficients, on peut donner une procédure qui servira à construire les coefficients, Maple appliquera alors cette procédure aux indice 1,2,..,taille_vecteur.

```
> vector(10,k->x^(k-1));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & x^8 & x^9 \end{bmatrix}$$

Maple™

ou encore

```
> vector(10,1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple™

ce deuxième exemple est un cas particulier de la forme précédente : le deuxième argument, ici 1, est traité comme étant la fonction constante de valeur 1. Ceci est pratique pour la construction du vecteur nul.

```
> vector(10,0);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maple™

Une matrice est la donnée de trois arguments, le nombre de ligne, celui des colonnes et la liste des coefficients lus ligne par ligne.

La procédure **matrix** permet de construire des matrices, et comme pour **vector** avec plusieurs variantes syntaxiques.

```
> matrix(3,3,[1,0,0,0,1,0,0,0,1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple™

Construit la matrice de taille 3,3 la liste des coefficients est, comme vous pouvez le constater, lue ligne par ligne.

```
> matrix(3,3,(i,j)->1/(i+j-1));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Maple™

Matrice de Cauchy d'ordre 3, la syntaxe ici ressemble à celle vue pour **vector**.

Pour définir la matrice 3,3 dont les coefficients diagonaux valent a les autres valant b :

```
> A :=matrix(3,3,(i,j)->if i=j then a else b fi);
```

$$A := \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

Maple™

L' addition de deux matrices (ou de deux vecteurs) se fait en utilisant l'opérateur **+**, leurs multiplication, l'opérateur **&***, si A est une matrice carrée inversible son inverse est simplement **A^(-1)**. On doit toutefois demander explicitement l'évaluation de ces opérations en utilisant **evalm** :

```
> evalm(A&*A);evalm(A^(-1));
```

$$\begin{bmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a+b}{a^2+ab-2b^2} & -\frac{b}{a^2+ab-2b^2} & -\frac{b}{a^2+ab-2b^2} \\ -\frac{b}{a^2+ab-2b^2} & \frac{a+b}{a^2+ab-2b^2} & -\frac{b}{a^2+ab-2b^2} \\ -\frac{b}{a^2+ab-2b^2} & -\frac{b}{a^2+ab-2b^2} & \frac{a+b}{a^2+ab-2b^2} \end{bmatrix}$$

Maple™

Remarquer ici que pour l'évaluation de l'inverse Maple, ne se soucie pas de l'inversibilité de la matrice si elle contient des paramètres formels et laisse ceci aux soins de l'utilisateur, sauf bien sur, si la matrice ne contient que des coefficients numériques et qu'elle n'est pas inversible, dans ce cas Maple renverra une erreur.

Un comportement intéressant :

```
> evalm(A+1);
```

$$\begin{bmatrix} a+1 & b & b \\ b & a+1 & b \\ b & b & a+1 \end{bmatrix}$$

Maple™

Le 1 dans cette instruction est compris comme étant la matrice scalaire avec 1 sur la diagonale. Il en sera ainsi si on utilise un nom qui n'a pas été défini comme une matrice.

```
> evalm(A-x);
```

$$\begin{bmatrix} a-x & b & b \\ b & a-x & b \\ b & b & a-x \end{bmatrix}$$

Maple™

Evaluation matricielle

L'évaluation d'une expression contenant des noms de matrices ou de vecteurs, s'arrêtera aux simplifications éventuelles sur les noms de ses derniers, il ne seront pas remplacés par leurs valeurs. Par exemple si A est une matrice contenant un coefficient formel a l'instruction **subs(a=0,A)** n'aura aucun effet, car Maple se contentera de remplacer a par 0 dans le nom "A" de la matrice et non dans son contenu. Pour arriver au résultat escompté ici, il faut demander une substitution explicite dans la valeur de A par **subs(a=0,evalm(A))**.

```
> B :=subs(a=0,A);
```

$$B := A$$

```
> evalm(B);
```

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

```
> B :=subs(a=0,evalm(A));
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$$

Maple™

Signalons la présence d'autres procédures de construction de matrices de formes particulières (diagonale,symétrique,...), mais qui ne sont pas directement accessible. Il faut auparavant charger le package **linalg** :

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> diag(1,2,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> diag(A,diag(1,1));
```

$$\begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple™

On peut aussi concaténer plusieurs matrices (ou vecteurs) en utilisant **concat**.

```
> M :=k->diag(k,k,k);V :=x->vector(4,[1,x,x^2,x^3]);
```

$$M := k \mapsto \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$V := x \mapsto [1, x, x^2, x^3]$$

```
> concat(M(1),M(2),M(3));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> concat(V(a),V(b),V(c),V(d));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$$

Maple™

concat s'avère particulièrement intéressante pour la construction de matrices de passage.

IV.2 Enfin de l'algèbre linéaire :

```
> restart;
```

Maple™

Commençons par charger le package **linalg**.

```
> with(linalg);
```

[BlockDiagonal , GramSchmidt , JordanBlock , LUdecomp , QRdecomp , Wronskian , addcol , addrow , adj , adjoint , angle , augment , backsub , band , basis , bezout , blockmatrix , charmat , charpoly , cholesky , col , coldim , colspace , colspan , companion , concat , cond , copyinto , crossprod , curl , definite , delcols , delrows , det , diag , diverge , dotprod , eigenvals , eigenvalues , eigenvectors , eigenvects , entermatrix , equal , exponential , extend , ffgausselim , fibonacci , forwardsub , frobenius , gausselim , gaussjord , geneqns , genmatrix , grad , hadamard , hermite , hessian , hilbert , htranspose , ihermite , indexfunc , innerprod , intbasis , inverse , ismith , issimilar , iszero , jacobian , jordan , kernel , laplacian , leastsqrs , linsolve , matadd , matrix , minor , minpoly , mulcol , mulrow , multiply , norm , normalize , nullspace , orthog , permanent , pivot , potential , randmatrix , randvector , rank , ratform , row , rowdim , rowspace , rowspan , rref , scalarmul , singularvals , smith , stackmatrix , submatrix , subvector , sumbasis , swapcol , swaprow , sylvester , toeplitz , trace , transpose , vandermonde , vecpotent , vectdim , vector , wronskian]

Remarquer la liste des procédures maintenant disponibles, et dont certaines portent des noms évocateurs. Voici dans leur ordre d'apparition, une courte description de celle qui sont les plus utiles pour nous. A étant une matrice donnée (une matrice carrée si nécessaire) et U et V deux *listes* de vecteurs qui ont la même taille.

basis(V) retourne une famille libre maximale extraite de la famille de vecteurs V : une base de Vect(V).

charpoly(A,x) retourne le polynôme caractéristique de A, x étant le nom de l'indéterminée que l'on veut utiliser.

cholesky(A) si A est une matrice symétrique positive, retourne une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = {}^tTT$

col(A,k) retourne la k$^{\text{ème}}$ colonne de A.

coldim(A) retourne le nombre de colonne de A. Utile si on veut écrire une procédure avancée faisant intervenir des matrices. **rowdim(A)** donne le nombre de lignes de A.

colspace(A) retourne une base du sev engendré par les vecteurs colonnes de A.

concat à déjà été décrite.

delcols(A,k..h) permet d'éliminer les colonnes d'indices de k à h de A.

delrows(A,k..h) la même chose pour les lignes.

det(A) n'a pas besoin de description !

eigenvals(A) retourne la séquence des valeurs propres de A, chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité.

eigenvects(A) retourne un résultat composite comprenant les valeurs propres de A, leurs multiplicités et une base de chaque sous espace propre. Suffisant pour voir si une matrice est diagonalisable ou pas.

equal(A,B) retourne true (vrai) si les matrices A et B sont égales , false (faux) sinon. Utile dans une instruction conditionnelle ou dans une boucle while.

gausselim(A) retourne la réduite de la matrice A par la méthode de Gauss.

intbasis(U,V) retourne une base de l'intersection des sevs engendrés par les familles de vecteurs U et V.

inverse(A) retourne l'inverse de A si c'est possible, un message d'erreur sinon. on peut obtenir la même chose avec **evalm(A^(-1))**.

jordan(A) retourne la réduite de Jordan de la matrice A, en fait une matrice diagonale ou triangulaire supérieure (quand c'est possible) semblable à A.

jordan(A,'P') retourne la réduite de Jordan de A et stocke la matrice de passage dans le nom P, ainsi on peut réduire une matrice et récupérer la matrice de passage par une seule instruction.

kernel(A) retourne une base du noyau de A. **nullspace(A)** fait la même chose.

linsolve(A,B) donne les solutions de l'équation AX=B, A et B étant des matrices qui ont le même nombre de lignes. les solutions sont exprimées à l'aide de paramètres internes de la forme _t[1], _t[2],.. on peut leur donner des valeurs particulières en utilisant **subs**.

minpoly(A,x) retourne le polynôme minimal de A.

QRdecomp(A,Q='P') retourne une matrice triangulaire supérieure R et stocke dans le nom P une matrice orthogonale telles que $A = PR$.

randmatrix(n,m) construit une matrice de taille n,m avec des coefficients aléatoires.

rank(A) le rang de A.

rowspace(A) une base du sev engendré par les vecteurs lignes de A.

sumbasis(U,V) retourne une base de la somme des sevs engendrés par les familles de vecteurs U et V.

trace(A) la trace de A.

transpose(A) la transposée de A.

Exemple 1 : Réduction de matrices

```
> A :=randmatrix(4,4);
```

$$A := \begin{bmatrix} -7 & 22 & -55 & -94 \\ 87 & -56 & 0 & -62 \\ 97 & -73 & -4 & -83 \\ -10 & 62 & -82 & 80 \end{bmatrix}$$

```
> B :=matrix(4,4,1);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple™

```
> charpoly(A,x);
```

$$11543578 - 662225\,x - 5197\,x^2 - 13\,x^3 + x^4$$

```
> factor(charpoly(A,x)); #problèmes en vue.
```

$$11543578 - 662225\,x - 5197\,x^2 - 13\,x^3 + x^4$$

```
> eigenvals(A);
```

$$\mathit{RootOf}\left(11543578 - 662225\_Z - 5197\_Z^2 - 13\_Z^3 + \_Z^4, \mathit{index} = 1\right),$$
$$\mathit{RootOf}\left(11543578 - 662225\_Z - 5197\_Z^2 - 13\_Z^3 + \_Z^4, \mathit{index} = 2\right),$$
$$\mathit{RootOf}\left(11543578 - 662225\_Z - 5197\_Z^2 - 13\_Z^3 + \_Z^4, \mathit{index} = 3\right),$$
$$\mathit{RootOf}\left(11543578 - 662225\_Z - 5197\_Z^2 - 13\_Z^3 + \_Z^4, \mathit{index} = 4\right)$$

Maple™

$\mathit{RootOf}(P(\_Z), \mathit{index} = k)$ signifie racine de P, indexée par k pour différencier entre les racines. Malin Maple ! On peut quand même forcer l'évaluation en utilisant **allvalues**.

```
> map(allvalues,[eigenvals(A)]) : #très couteux en photocopies donc passé sous silence.
```

Maple™

Changeons pour une matrice plus gentille.

```
> eigenvals(B);
```

$$0,\ 0,\ 0,\ 4$$

```
> epropre :=eigenvects(B);
```

$$\mathit{epropre} := [0, 3, \{[\,-1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\,], [\,-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\,], [\,-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,]\}], [4, 1, \{[\,1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\,]\}]$$

Maple™

4 est une va.p de multiplicité 1 et un vecteur dans la base du sous espace propre, 0 est une valeur propre de multiplicité 3 et 3 vecteurs dans la base du sep. La matrice B est diagonalisable. On peut récupérer la base de vecteurs propres par :

```
> vpropre :=map(L->op(L[3]),[epropre]);
```

$$\mathit{vpropre} := [[\,-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,], [\,-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\,], [\,-1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\,], [\,1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\,]]$$

Maple™

epropre est une séquence dont les opérandes sont des *listes* de la forme $[\mathit{valpropre}, \mathit{mult}, \{\mathit{base\ du\ sep}\}]$, on 'mappe' alors à la liste $[\mathit{epropre}]$, la fonction qui à une liste L associe la séquence des opérandes de son troisième élément, ici la séquence des vecteurs de la base du sous espace propre. Rappelez-vous que 'mapper' à la séquence epropre ne marchera pas. Le résultat est une liste constituée des vecteurs d'une base de vecteur propre.
Former ensuite la matrice de passage par :

```
> P :=concat(op(vpropre));
```

$$P := \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple™

et vérifier la formule de passage :

```
> equal(B,P&*diag(0,0,0,4)&*P^(-1));
```

true

Maple™

On peut aussi déterminer les vecteurs propres à la main :

```
> vec1 :=linsolve(B-4,vector(4,0));
```

$$\mathit{vec1} := [\,\_t_1\ \ \_t_1\ \ \_t_1\ \ \_t_1\,]$$

Maple™

On récupère une base pour chaque sous espace propre par :

```
> e1 :=subs(_t[1]=1,evalm(vec1));
```

$$e1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> vec2 :=linsolve(B,vector(4,0));
```

$$vec2 := \begin{bmatrix} -\_t_1 - \_t_2 - \_t_3 & \_t_1 & \_t_2 & \_t_3 \end{bmatrix}$$

```
> e2 :=subs(_t[1]=1,_t[2]=0,_t[3]=0,evalm(vec2));
```

$$e2 := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> e3 :=subs(_t[1]=0,_t[2]=1,_t[3]=0,evalm(vec2));
```

$$e3 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> e4 :=subs(_t[1]=0,_t[2]=0,_t[3]=1,evalm(vec2));
```

$$e4 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple™

La matrice de passage maintenant :

```
> concat(e1,e2,e3,e4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple™

Exemple 2 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$

On considère l'endomorphisme T de $R_4[X]$ défini par

$$T(P) = 2XP' + (1 - X^2)P''$$

Écriture de la matrice de T dans la base canonique :

On construit d'abords une procédure qui à un élément de $R_4[X]$ retourne le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $R_4[X]$.

```
> coord :=P->vector(5,[seq(coeff(P,X,k),k=0..4)]);
```

$$coord := P \mapsto vector(5, [seq(coeff(P, X, k), k = 0..4)])$$

Maple™

On définit la procédure T et on récupère les vecteurs des coordonnées des polynômes $T(X^k)$.

```
> T :=P->expand(2*X*diff(P,X)+(1-X^2)*diff(P,X,X));
```

$$T := P \mapsto expand(2 * X * (diff(P, X)) + (1 - X^2) * (diff(P, X, X)))$$

```
> T(X^4);
```

$$-4X^4 + 12X^2$$

```
> coord(T(X^4));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> vects :=map(coord,[T(X^k) $k=0..4]);
```

$$vects := [\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 & -4 \end{bmatrix}]$$

Maple™

La matrice de T dans la base canonique maintenant :

```
> M :=concat(op(vects));
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(M);
```

$$[0, 2, \{[\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ], [\ 0\ \ -3\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ]\}],$$
$$[-4, 1, \{[\ 1\ \ 0\ \ -2\ \ 0\ \ 1\ ]\}],$$
$$[2, 2, \{[\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ], [\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ ]\}]$$

Maple™

Où on voit que T est diagonalisable de valeurs propres $(0, 2)$, $(2, 2)$ et $(-4, 1)$. Pour récupérer les vecteurs propres on pourrait écrire la procédure inverse de **coord** :

```
> icoord :=V->sum(V[k]*X^(k-1),k=1..5) ;
```

$$icoord := V \mapsto V_1 + V_2 X + V_3 X^2 + V_4 X^3 + V_5 X^4$$

```
> v :=vector(5,[0,1,1,0,1]) ;
```

$$v := [\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ ]$$

```
> icoord(v) ;
```

$$X + X^2 + X^4$$

```
> VECTpropre :=map(L->op(L[3]),[eigenvects(M)]) ;
```

$$VECTpropre := [[\ 0\ \ -3\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ], [\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ],$$
$$[\ 1\ \ 0\ \ -2\ \ 0\ \ 1\ ], [\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ ], [\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ]]$$

```
> POLpropre :=map(icoord,VECTpropre) ;
```

$$POLpropre := [-3X + X^3, 1, 1 - 2X^2 + X^4, 1 + X^2, X]$$

Maple™

Exemple 3 : Recherche d'une matrice à coefficients entiers et de déterminant 1.

On définit d'abords une procédure qui aura pour rôle de donner au hasard un entier compris entre -2 et 2 :

```
> haz :=rand(-2..2) ;
```

$haz :=$ proc () proc () option *builtin*; 391 endproc (6, 5, 3) $-$ 2 endproc

Maple™

haz est maintenant une procédure qui ne prend aucun argument et qui génère à chaque appel un entier entre -2 et 2.

```
> haz() ;
```

$$1$$

```
> haz() ;
```

$$-2$$

Maple™

Une matrice au hasard à coefficients entiers entre -2 et 2 :

```
> M :=matrix(4,4,haz) ;
```

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple™

Maintenant une boucle **while** qui ne s'arrêtera que lorsque elle trouve une matrice de det 1 :

```
> while det(M) <> 1 do M :=matrix(4,4,haz) od :
> evalm(M) ;det(M) ;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1$$

Maple™

Une telle matrice peut servir pour construire une matrice diagonalisable (ou trigonalisable) qui conserve des coefficients entiers et qui aura des valeurs propres décidées à l'avance (truc de profs de prépas) :

```
> A :=evalm(M&*diag(0,1,1,-1)&*M^(-1));
```

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maple™

Exemple 4 : Décomposition de Dunford en utilisant (en trichant) Jordan

On considère la matrice suivante (fabriquée par le procédé de l'exemple 3)

```
> A :=matrix([[-1,2,2,4,0],[-4,20,15,16,2],[7,-35,-26,-27,-4],[-3,14,10,10,2],[5,-25,-17,-16,-3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & 20 & 15 & 16 & 2 \\ 7 & -35 & -26 & -27 & -4 \\ -3 & 14 & 10 & 10 & 2 \\ 5 & -25 & -17 & -16 & -3 \end{bmatrix}$$

Maple™

“Jordanisation”

```
> T :=jordan(A,'P');
```

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(P);
```

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & \frac{68}{9} & 0 & 3/2 \\ -3 & 1 & \frac{16}{9} & 3/2 & 1/4 \\ 6 & -1 & -\frac{7}{9} & -3/2 & -7/4 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ -3 & 1 & \frac{25}{9} & -3 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Maple™

Une petite vérification :

```
> equal(P&*T&*P^(-1),A);
```

true

Maple™

Le petit malin remarquera que le travail de diagonalisation fait dans l'exemple 1 est de ce fait obsolète !
On récupère la matrice diagonale$L$ formée des éléments diagonaux de T et la matrice nilpotente $N = T - L$.

```
> L :=diag(T[k,k] $k=1..5); N :=evalm(T-L);
```

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maple™

Retour à la base canonique :

```
> K :=evalm(P&*L&*P^(-1)) ;M :=evalm(P&*N&*P^(-1)) ;
```

$$K := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & -20 & -15 & -16 & -2 \\ -3 & 14 & 10 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 15 & 11 & 11 & 2 \\ 3 & -15 & -11 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -27 & -19 & -19 & -4 \end{bmatrix}$$

Maple™

Les vérifications maintenant

```
> equal(A,K+M) ;equal(K&*M,M&*K) ;equal(M^5,matrix(5,5,0)) ;
```

true
true
true

Maple™

Exemple 5

Il s'agit ici de voir à quelle condition la matrice suivante, A, est-elle diagonalisable ?

```
> A :=matrix(5,5,[a,0,0,0,b,0,a,0,b,0,0,1,2,1,0,0,b,0,a,0,b,0,0,0,a]) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Maple™

Les éléments propres de A.

```
> EP :=eigenvects(A) ;
```

$$EP := [2,1,\{[\ 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\ ]\}],$$
$$[b+a,2,\{[\ 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\ ],[\ 0\quad 1/2\,b+1/2\,a-1\quad 1\quad 1/2\,b+1/2\,a-1\quad 0\ ]\}],$$
$$[-b+a,2,\{[\ 0\quad -1\quad 0\quad 1\quad 0\ ],[\ -1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\ ]\}]$$

Maple™

En apparence donc A est diagonalisable. Mais voilà, les valeurs propres 2, $a-b$, $a+b$ ne sont pas forcément deux à deux distinctes pour certaines valeurs de a et b (Maple s'en soucie peu) , et dans ce cas la famille de vecteurs propres calculée va-t-elle toujours constituer une base ? Pour en être sûr nous allons constituer la matrice de passage dans cette famille (de vecteurs propres) et vérifier à la main dans quel cas elle va être non inversible. On crée ensuite une matrice B qui correspond à A dans ce cas là.

La séquence des vecteurs propres de A :

```
> VP :=seq(op(EP[k][3]),k=1..3) ;
```

$$VP := [\ 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\ ],[\ 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\ ],$$
$$[\ 0\quad 1/2\,b+1/2\,a-1\quad 1\quad 1/2\,b+1/2\,a-1\quad 0\ ],$$
$$[\ 0\quad -1\quad 0\quad 1\quad 0\ ],[\ -1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\ ]$$

Maple™

La matrice de passage :

```
> P :=concat(VP);
```

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2\,b+1/2\,a-1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\,b+1/2\,a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple™

Déterminant de P pour voir dans quels cas elle est non inversible : a+b=2

```
> det(P);
```

$$2\,b+2\,a-4$$

```
> CAS :=solve(det(P));
```

$$CAS := \{a=-b+2, b=b\}$$

Maple™

On construit la matrice B qui correspond à A dans le cas où a+b=2.

```
> B :=subs(CAS,evalm(A));
```

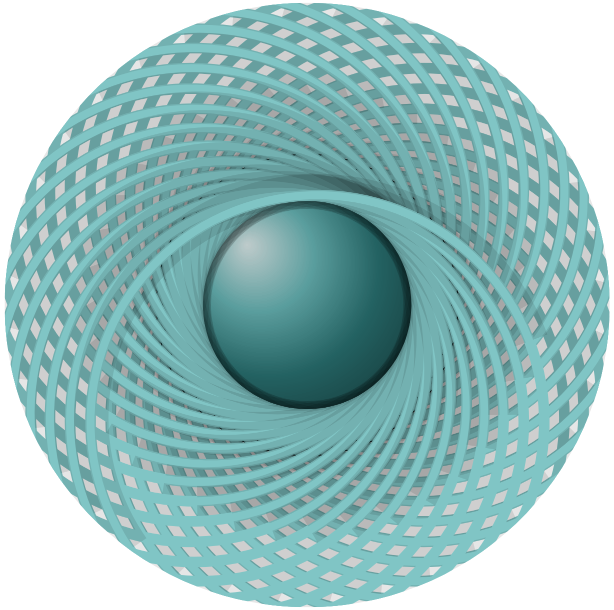
$$B := \begin{bmatrix} -b+2 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & -b+2 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & -b+2 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & -b+2 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(B);
```

$$[2, 3, \{[\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\,], [\,0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,]\}],$$
$$[-2\,b+2, 2, \{[\,0\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\,], [\,-1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\,]\}]$$

Maple™

On voit alors que dans le cas où a+b=2, la matrice A est non diagonalisable.



Bientôt le numéro 2
(pour le début du mois de Juin)

Sous le thème
PRÉPARATION AUX ÉPREUVES ORALES

et un hors série spécial $\LaTeX$
(pour les professeurs)