ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES et ALGORITHMIQUE CI

Durée : 3 heures

Avertissement : Le principe de cette épreuve consiste en l'étude d'une méthode numérique pour le calcul de la Transformée de Fourier Discrète. Le but est d'étudier son principe de résolution et d'écrire l'algorithme correspondant. On distingue une **méthode de calcul**, décrite en langage mathématique usuel, d'un **algorithme** que l'on exprime en notation algorithmique.

Tout algorithme devra être écrit dans le sous-ensemble du langage **Pascal** qui figure au programme, **en supposant défini un type COMPLEXE permettant de manipuler facilement les nombres complexes. En particulier, on utilisera les signes $+, -, *, /$ pour désigner les opérations arithmétiques élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division) entre des éléments de ce type.**

Lorsque l'on demande d'évaluer le coût d'un algorithme, il s'agit de compter le nombre d'additions, soustractions, multiplications et divisions entre des nombres **complexes** nécessitées par cet algorithme.

Notations

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
N est un entier strictement positif.
ω désigne la racine N-ième de l'unité $e^{-\frac{2i\pi}{N}}$.
Si M est une matrice à coefficients complexes, on utilise la notation ${}^tM$ pour désigner sa transposée.
On note $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$) l'ensemble des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ (resp. de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$).
On définit $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$) comme étant le sous-ensemble de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (resp. de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$) des applications périodiques de période N.

I - Transformée de Fourier Discrète

On définit la Transformée de Fourier Discrète comme étant l'application :

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \quad s \longmapsto \hat{s}$$

où $$\hat{s}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\omega^{kn}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Question 1 : Quelques propriétés de l'application $\mathcal{F}$.

•a) Montrer que : $\mathcal{F}(\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}) \subset \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$.

•b) A quelles propriétés de parité satisfont les parties réelle et imaginaire de $\mathcal{F}(s)$, si s appartient à $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$?

•c) Montrer que l'image par $\mathcal{F}$ d'une application paire appartenant à $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$ est une application paire appartenant à $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$.

Question 2 : Calcul de la Transformée de Fourier Discrète.

On introduit l'application φ suivante :

$$\varphi : \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{C}^N, \quad s \longmapsto \big(s(0), s(1), \ldots, s(N-1)\big).$$

•a) Justifier rapidement le fait que l'application φ définisse un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Que peut-on en déduire sur la dimension de $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$?

Tournez la page S.V.P.

Ceci permet d'identifier une application s de $\mathbf{C}_N^{\mathbb{Z}}$ au vecteur de $\mathbf{C}^N$ de composantes $s_k = s(k)$, $k \in \{0, \ldots, N-1\}$. On définit alors $\mathcal{F}_N : \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}^N$ par : $\mathcal{F}_N = \varphi \circ \mathcal{F} \circ \varphi^{-1}$.

•b) Expliciter $\hat{s} = \mathcal{F}_N(s)$ pour un vecteur quelconque de $\mathbf{C}^N$, de composantes $(s_k)_{k\in\{0,\ldots,N-1\}}$.

•c) Montrer que l'application $\mathcal{F}_N$ est linéaire et calculer la matrice F_N qui lui est associée dans la base canonique de $\mathbf{C}^N$ (on exprimera l'élément de la j-ième ligne et l-ième colonne en fonction de ω, pour $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq l \leq N$).

•d) Ecrire l'algorithme de calcul de $\hat{s}$ (y compris le calcul initial de la matrice F_N) en minimisant le nombre d'opérations entre nombres complexes. Evaluer le coût global en termes d'opérations arithmétiques complexes.

Question 3 : Propriétés de la matrice F_N.

On rappelle la définition du produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbf{C}^N$, noté $<.,.>$: si x et y sont deux vecteurs de $\mathbf{C}^N$, de composantes respectives $(x_k)_{k\in\{0,\ldots,N-1\}}$, $(y_k)_{k\in\{0,\ldots,N-1\}}$,

$$< x, y >= \sum_{k=0}^{N-1} \overline{x_k}\, y_k.$$

•a) Quelle est la norme hermitienne (associée à ce produit scalaire hermitien) des vecteurs-colonnes de F_N ?

•b) Montrer l'orthogonalité de deux vecteurs-colonnes distincts de F_N vis-à-vis de ce produit scalaire hermitien.

•c) Calculer le produit ${}^t\overline{F_N}F_N$. En déduire que $\mathcal{F}_N$ est bijective et expliciter son application réciproque.

Question 4 : Transformée de Fourier Discrète et Convolution.

Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbf{C}^N$ de composantes respectives $(x_k)_{k\in\{0,\ldots,N-1\}}$, $(y_k)_{k\in\{0,\ldots,N-1\}}$, on définit :

1) leur produit ***"composante par composante"*** par :

$$x \circ y = z \in \mathbf{C}^N \quad | \quad z_k = x_k y_k, \quad \forall k \in \{0, \ldots, N-1\};$$

2) leur produit de ***"convolution"*** par :

$$x * y = z \in \mathbf{C}^N \quad | \quad z_k = \sum_{j+l \equiv k \pmod N} x_j y_l, \quad \forall k \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbf{C}^N, \quad \mathcal{F}_N(x) \circ \mathcal{F}_N(y) = \mathcal{F}_N(x * y).$$

(On pourra utiliser :

$$\{0, \ldots, N-1\} \times \{0, \ldots, N-1\} = \bigcup_{\lambda=0}^{N-1} \Big\{(l,j) \in \{0, \ldots, N-1\}^2 \mid l+j \equiv \lambda \pmod N\Big\}.)$$

A SUIVRE

II - Transformée de Fourier Rapide

On suppose dans cette partie que l'entier N est une puissance de 2 ($N = 2^q$, avec $q \in \mathbb{N}^*$). On veut utiliser la structure particulière de la matrice F_N pour accélérer le calcul des N composantes du vecteur $\hat{s} = \mathcal{F}_N(s)$.

Question 5 : Etude d'un exemple préliminaire.

Dans cette question, on choisit $N = 4$.

•a) Rappeler l'expression des quatre composantes $\hat{s}_0, \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$ en fonction de celles de $s = (s_0, s_1, s_2, s_3)$.

•b) Montrer que l'on peut trouver $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{aligned}
\hat{s}_0 &= a_0 + b_0 \\
\hat{s}_1 &= a_1 + \omega b_1 \\
\hat{s}_2 &= a_0 - b_0 \\
\hat{s}_3 &= a_1 - \omega b_1.
\end{aligned}$$

•c) Exprimer le vecteur $\sigma_1 = (a_0, a_1)$ comme l'image par $\mathcal{F}_2$ d'un vecteur dont les composantes se déduisent de celles de s. Même question pour le vecteur $\sigma_2 = (b_0, b_1)$.

Question 6 : Généralisation et calcul de *"complexité"*.

•a) On pose $m = \frac{N}{2}$.
Pour $0 \leq n < m$ montrer que :

$$\begin{aligned}
\hat{s}_n &= A_n + \omega^n B_n \\
\hat{s}_{n+m} &= A_n - \omega^n B_n,
\end{aligned}$$

les vecteurs A de composantes $(A_n)_{n\in\{0,\ldots,m-1\}}$ et B de composantes $(B_n)_{n\in\{0,\ldots,m-1\}}$ étant les images par $\mathcal{F}_m$ de deux vecteurs que l'on explicitera en fonction de $s = (s_0, s_1, \ldots, s_{N-1})$.

•b) On note u_q le nombre d'opérations arithmétiques entre des nombres complexes nécessaires pour calculer $\mathcal{F}_{2^q}(s)$. On supposera que les différentes puissances de ω ont été calculées au préalable et on ne comptera donc pas les multiplications nécessitées par ces calculs dans l'évaluation de u_q. Montrer que u_q vérifie l'inéquation de récurrence :

$$u_q \leq 2u_{q-1} + 3 \times 2^{q-1}, \quad \forall q > 1.$$

•c) En déduire une majoration de u_q en fonction de u_1 et q. Calculer u_1 et donner l'expression finale de cette majoration uniquement en fonction de $N = 2^q$.

•d) Conclure en comparant le coût en opérations arithmétiques de cette méthode avec celui de la méthode directe (question 2d).

FIN