TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Si $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, sa transformée de Laplace est la fonction $\mathscr{L}(f)$, définie sur $I(f)$ par :

$$\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

$I(f)$ désignant l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale généralisée converge absolument. On note E l'ensemble des fonctions complexes de la variable réelle continues par morceaux sur $[0,+\infty[$ telles que $I(f)$ ne soit pas vide.

1 Étude de $I(f)$ sur quelques exemples simples

1. Dans le cas de fonctions qui suivent, montrer que la fonction f est un élément de E, et déterminer $I(f)$ et $\sigma(f)$.
   - **a)** Les fonctions f_1 définies sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = e^{at}$ où $a \in \mathbb{R}$.
   - **b)** Les fonctions f_2 définies sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = e^{ct}$, $c = a + ib$ étant un nombre complexe quelconque, a et b des réels.
   - **c)** Les fonctions f_3 définies sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = t^a$ où $a \in]0,+\infty[$.
   - **d)** La fonction f_4 définie par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$
2. D'autres exemples.
   - **a)** Trouver une fonction f telle que $I(f)$ contient $\sigma(f)$.
   - **b)** Trouver une fonction f telle que $I(f)$ soit vide.
   - **c)** Trouver une fonction f telle que $I(f) = \mathbb{R}$.

2 Étude de $I(f)$ dans le cas général

On suppose que $I(f)$ est non vide.

1. Montrer que si $x_0 \in I(f)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq x_0 \Longrightarrow x \in I(f)$
2. Donner la conclusion sur la nature de $I(f)$.

Dans tout ce qui suit, la transformée de Laplace d'une fonction f de E est la fonction F définie sur l'intervalle $]\sigma(f),+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

3 Propriétés de la transformée de Laplace

1. TRANSFORMÉE D'UNE DÉRIVÉE : Dans cette question f est un élément de E, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et on suppose qu'il existe un élément de g de E qui coïncide sur $]0,+\infty[$ avec f'.

a) Montrer que, pour tout $A>0$ et tout x réel, on a :

$$\int_0^A f'(t)e^{-xt}dt = [f(A)e^{-xA} - f(0^+)] + x\int_0^A f(t)e^{-xt}dt$$

où $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

b) En déduire que si $x > \max(\sigma(f), \sigma(g))$, et si F et G désignent les transformées de Laplace de f et de g, alors $G(x) = xF(x) - f(0^+)$.

c) On suppose de plus que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$ existe. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} xF(x) = l$

d) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ continue, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente. Montrer alors que , $\forall x \geq 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge et la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ est continue sur $[0,+\infty[$

e) Utiliser la question précédente pour calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.

2. DÉRIVABILITÉ D'UNE TRANSFORMÉE DE LAPLACE : Pour $f\in E$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall x > \sigma(f),\ \ U_n(x) = \int_n^{n+1} f(t)e^{-xt}dt$$

de sorte que

$$\mathscr{L}(f)(x) = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x).$$

a) Montrer que U_n est dérivable et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale.

b) Soient a et b fixés vérifiant : $\sigma(f) < b < a$. Montrer qu'il existe une constante K indépendante de x tel que pour tout $x\geq a$, et tout $t\geq 0$,

$$|tf(f)e^{-xt}| \leq K|f(t)|e^{-bt}.$$

c) En déduire la convergence normale de la série des dérivées sur $[a,+\infty[$ puis la dérivabilité de F sur $]\sigma(f),+\infty[$ avec la formule

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-xt}$$

exprimant que F' est la transformée de $t\longmapsto -tf(t)$.

3. LIMITE À L'INFINI D'UNE TRANSFORMÉE DE LAPLACE : Soit f un élément de E de transformée F. On se donne A un réel strictement positif.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^A f(t)e^{-xt}dt = 0$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = 0$. Pour cela, on pourra faire une majoration de l'intégrale en utilisant un nombre a fixé dans $]\sigma(f), +\infty[$.

c) Donner la conclusion concernant la limite de $F(x)$ en $+\infty$.

4. INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE : Soit $f \in E$ une application continue telle que pour tout $x \in I(f)$, $\mathscr{L}(f)(x) = 0$.

a) Soient $x \in I(f)$, $a > 0$ et $g : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ \ g(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u)du.$$

i. Montrer que $\mathscr{L}(f)(x + a) = a \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} g(t)dt$.

ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) u^n du = 0$.

iii. Démontrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $g(t) = 0$. (Utiliser le théorème de Weirstrass : *pour toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, il existe une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$*.)

b) En déduire $f = 0$.

4 Résolution d'une équation différentielle du second ordre.

Si une application $y : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ est solution d'une équation différentielle, la transformée $\mathscr{L}(y)$ est solution d'une équation "algébrique". On peut souvent en déduire $\mathscr{L}(y)$, puis revenir à y en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace.

1. Résoudre les équations différentielles avec conditions initiales :

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}, \\ y(0) = -3, \ \ y'(0) = 5. \end{cases}$$

2. Résoudre le système différentiel avec conditions initiales :

$$\begin{cases} x' + 2y'' = e^{-t}, \\ x' + 2x - y = 1, \\ x(0) = y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

3. **a)** Soit $f \in E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ telle que f' et f'' soient dans E. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} (tf''(t))e^{-xt}dt = 1 - x^2F'(x) - 2xF(x).$$

b) En déduire la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} ty'' + 2y' + ty = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

5 Qu'est Laplace ?

Laplace, Pierre Simon, marquis de (1749-1827), astronome, mathématicien et physicien français qui émit l'hypothèse de la " nébuleuse primitive " sur l'origine du Système solaire. Pierre Simon, marquis de Laplace est né en Normandie, où il fit ses études. En 1767, il devint professeur de mathématiques à l'École royale militaire et, en 1783, il fut élu membre de l'Académie des sciences. Il eut une grande influence politique sous l'Empire et la Restauration et fut nommé ministre de l'Intérieur après le 18 Brumaire, puis comte de l'Empire.
Les réalisations scientifiques majeures de Laplace concernent la mécanique céleste et le calcul des probabilités. Il démontra que les mouvements planétaires sont stables et que les perturbations produites par l'influence mutuelle des planètes ou par des corps externes (comète, par exemple) ne sont que temporaires. Il tenta également de fournir une théorie rationnelle sur l'origine du Système solaire (voir Cosmologie). Dans sa Mécanique céleste (1798-1825), qui lui valut le surnom de " Newton français ", Laplace regroupa les travaux de Newton, de Halley, de Clairaut, de d'Alembert et d'Euler sur le principe de la gravitation universelle. Dans Exposition du système du monde (1796), il énonça sa célèbre hypothèse cosmogonique selon laquelle le Système solaire serait né d'une " nébuleuse primitive ". Cette théorie connut un grand succès et est encore utilisée aujourd'hui. Dans sa Théorie analytique des probabilités (1812), qui contient des calculs très élaborés d'approximation de grands nombres, Laplace indiqua les principes et les applications de la géométrie du hasard. Il fut à l'origine de la loi de Laplace-Gauss, ou loi normale, très utilisée en probabilités ; il donna la fameuse équation de Laplace, équation différentielle de forme $\Delta f = 0$, où f est une fonction deux fois dérivable et Δ l'opérateur appelé laplacien.
Laplace effectua également d'importants travaux en physique : avec Lavoisier, il fut le premier à déterminer, par mesures calorimétriques, les chaleurs spécifiques de certains composés et les chaleurs mises en jeu lors de réactions chimiques (1782-1784). Il introduisit également une théorie de la capillarité. En électromagnétisme, il introduisit la loi de Laplace : la force s'exerçant sur un conducteur de longueur dl, parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est donnée par : $\overrightarrow{df} = I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$, le vecteur $\overrightarrow{dl}$ définissant le sens positif pour I.
Microsoft Encarta 2009.

FIN DE L'ÉPREUVE

Correction

1 Étude de $I(f)$ sur quelques exemples simples

1. **a)** La fonction $t \longmapsto e^{(a-x)t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $a - x < 0$, donc $f_1 \in E$, $I(f) =]a, +\infty[$ et $\sigma_1(f) = a$.

b) On a $|f_2(x)e^{-xt}| = e^{(a-x)t}$, donc $t \longmapsto f_2(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $a - x < 0$, d'où $f_2 \in E$, $I(f_2) =]a, +\infty[$ et $\sigma(f_2) = a$.

c) Si $x > 0$, $t \longmapsto t^a e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $t^a e^{-xt} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc $t \longmapsto f_3(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Si $x \leq 0$, $t^a e^{-xt} \geq t^a$ pour tout $t > 0$, donc $t \longmapsto t^a e^{-xt}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.
Donc $f_3 \in E$, $I(f_3) =]0, +\infty[$ et $\sigma(f_3) = 0$.

d) Si $x > 0$, on a :

$$\left| e^{-xt}\frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-xt}.$$

Donc $t \longmapsto e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Si $x = 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est non intégrable, en effet, on a :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Comme la série harmonique est divergente, ceci montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ est divergente.
Pour $x < 0$, posons

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt}\frac{\sin t}{t} dt$$

Alors

$$\begin{aligned} |u_n| &= |(-1)^n \int_0^{n\pi} e^{-x(t+n\pi)}\frac{\sin t}{t+n\pi} dt| = \int_0^{n\pi} e^{-x(t+n\pi)}\frac{\sin t}{t+n\pi} dt \\ &\geq \frac{e^{-xn\pi}}{(n+1)\pi} \int_0^{n\pi} \sin t dt = 2\frac{e^{-xn\pi}}{(n+1)\pi} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\infty} |u_n| = +\infty$.
On a donc trouvé une suite $x_n = n\pi$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ et

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-xt}\frac{\sin t}{t} dt \right| = +\infty$$

Posons

$$H(x) = \int_0^X e^{-xt}\frac{\sin t}{t} dt$$

La suite $(H(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas une suite de Cauchy, et donc H n'admet pas de limite en $+\infty$.
En conclusion, $f_5 \in E$, $I(f) =]0, +\infty[$ et $\sigma(f) = 0$.

2. **a)** Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{1}{t^2}, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ alors $f \in E$, $I(f) = [0, +\infty[$ et $\sigma(f) = 0$.

b) $f(t) = e^{t^2}$, $I(f) = \emptyset$, car pour $x \in \mathbb{R}$ et pour t assez grand $|f(t)e^{-xt}| > \dfrac{1}{t}$.

c) $f(t) = e^{-t^2}$, $f \in E$ et $I(f) = \mathbb{R}$, car la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $|f(t)e^{-xt}| = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

2 Étude de $I(f)$ dans le cas général

1. Si $x_0 \in I(f)$, alors $t \longmapsto f(t)e^{-x_0 t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc si $x > x_0$, alors

$$|f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)e^{-x_0 t}|$$

et donc $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où $x \in I(f)$.

2. On en déduit $I(f) = [\sigma(f), +\infty[$ si $\sigma(f) \in I(f)$ et $I(f) =]\sigma(f), +\infty[$ si $\sigma(f) \notin I(f)$.

3 Propriétés de la transformée de Laplace

1. Transformée d'une dérivée

a) Soient $x \in \mathbb{R}$, $(\varepsilon, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $t \longmapsto f(t)$ et $t \longmapsto e^{-xt}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$, donc une intégartion par parties donne

$$\int_\varepsilon^A f'(t)e^{-xt}dt = [f(A)e^{-xA} - f(\varepsilon)e^{-x\varepsilon}] + x\int_\varepsilon^A f(t)e^{-xt}dt.$$

Or d'après les hypothèses, les fonctions f et f' admettent chacune une limite à droite en 0, d'où en faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$(*) \qquad \int_0^A f'(t)e^{-xt}dt = [f(A)e^{-xA} - f(0^+)] + x\int_0^A f(t)e^{-xt}dt.$$

b) Si $x \geq \max(\sigma(f), \sigma(f'))$, $t \longmapsto f'(t)e^{-xt}$ et $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$, alors la relation $(*)$ précédente permet d'affirmer que $A \longmapsto f(A)e^{-xA}$ admet une limite l en $+\infty$.
Si $l \neq 0$, alors $f(t)e^{-xt} \sim l$ quand t tend vers $+\infty$ et par suite $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ serait non intégrable sur $]0, +\infty[$, ceci est absurde donc $l = 0$. En faisant tendre A vers $+\infty$, il vient $G(x) = xF(x) - f(0^+)$ ou encore

$$\mathscr{L}(f')(x) = x\mathscr{L}(f)(x) - f(0^+).$$

c) Théorème de la valeur finale : la fonction f est bornée sur $[0, +\infty[$, donc pour $x > 0$ la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Écrivons

$$xF(x) - l = \int_0^{+\infty} x(f(t) - l)e^{-xt}dt.$$

Soit M un majorant de $t \longmapsto |f(t)-l|$ sur $[0,+\infty[$. Pour tout $A>0$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} |xF(x)-l| &\leq \left|\int_0^A xe^{-xt}(f(t)-l)dt\right| + \left|\int_A^{+\infty} xe^{-xt}(f(t)-l)dt\right| \\ &\leq M\int_0^A xe^{-xt}dt + \left|\int_A^{+\infty} xe^{-xt}(f(t)-l)dt\right| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$, fixons $A>0$ tel que $|f(t)-l|\leq\varepsilon$ dés que $t\geq A$, donc

$$|xF(x)-l|\leq M(1-e^{-xA})+\varepsilon e^{-xA},$$

et par conséquent

$$\lim_{x\to 0} xF(x) = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

d) Soit $H(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ avec $x>0$. H est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc bornée sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x>0$, la fonction $t\longmapsto H(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} H(t)e^{-xt}=0$, donc par une intégration par parties

$$\forall x>0,\quad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = x\int_0^{+\infty} H(t)e^{-xt}dt$$

d'où

$$\mathscr{L}(f)(x) = x\mathscr{L}(H)(x)$$

La transformée $\mathscr{L}(H)$ est définie au moins sur $]0,+\infty[$ et continue sur $]0,+\infty[$: en effet, si on fixe $x_0>0$, la fonction $t\longmapsto H(t)e^{-x_0t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et une domination évidente montre la continuité de $\mathscr{L}(H)$ sur $[x_0,+\infty[$. Grace à $(*)$, on déduit la continuité de $\mathscr{L}(H)$ et donc de $\mathscr{L}(f)$ sur $]0,+\infty[$.
En fin

$$\mathscr{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{t\to+\infty} H(t) = \lim_{x\to 0} x\mathscr{L}(H) = \lim_{x\to 0}\mathscr{L}(f)(x).$$

e) D'après ce qui précède la fonction $\Phi : x\longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$ est continue sur $[0,+\infty[$.
Montrons que Φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, en effet, posons $g(x,t)=e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin t$ et si $x>a$ on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at},$$

ceci prouve que Φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $]0,+\infty[$ et

$$\Phi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Donc $\Phi(x) = c - \arctan x$. Or $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0$, car $\left| e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-xt}$ et donc $|\Phi(x)| \leq \dfrac{1}{x}$, ainsi $c = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\forall x > 0,\ \ \Phi(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ et comme $\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \Phi(0)$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

2. DÉRIVABILITÉ D'UNE TRANSFORMÉE DE LAPLACE

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$\begin{array}{llll} \varphi_n : & [n, n+1] \times]\sigma(f), +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, t) & \longmapsto & f(t)e^{-xt} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x} : & [n, n+1] \times]\sigma(f), +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, t) & \longmapsto & -tf(t)e^{-xt} \end{array}$$

sont continues, donc U_n est $\mathscr{C}^1$ et $\forall x > \sigma(f)$,

$$U_n(x) = -\int_n^{n+1} tf(t)e^{-xt}dt$$

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sigma(f) < b < a$. Alors pour $x \geq a$ et $t \geq 0$, on a

$$|tf(t)e^{-xt}| \leq t|f(t)|e^{-at} \leq |f(t)|e^{-bt}te^{-(a-b)t}.$$

La fonction $t \longmapsto te^{-(a-b)t}$ étant continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 à l'infini, donc elle est bornée par une constante positive K, d'où

$$|tf(t)e^{-xt}| \leq K|f(t)|e^{-bt}.$$

c) $\forall x \geq a$, on a

$$|U_n'(x)| \leq \int_n^{n+1} |tf(t)e^{-xt}|dt \leq K \int_n^{n+1} |f(t)|e^{-bt}dt = Kv_n,$$

avec $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} |f(t)|e^{-bt}dt$. La série $\sum v_n$ est convergente, car

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \int_0^n |f(t)|e^{-bt}dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-bt}dt$$

donc la série $\sum U_n'$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. On a donc

- $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]\sigma(f), +\infty[$.
- La série $\sum U_n$ converge simplement sur $]\sigma(f), +\infty[$ vers F.
- La série $\sum U_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Donc F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et pour tout $x > \sigma(f)$, $F'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} U'(x) = \int_0^{+\infty} (-tf(t))e^{-xt}dt$.

3. Limite à l'infini d'une transformée de Laplace

a) Soit $A > 0$, f est continue sur $[0, A]$, donc bornée sur $[0, A]$ et il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0, A]$, $|f(t)| \leq M$ et par suite

$$\int_0^A f(t)e^{-xt}dt \leq M \int_0^A e^{-xt}dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{M}{x}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)e^{-xt}dt = 0$.

b) Soit $a > \sigma(f)$ fixé et $x > a$, alors on a :

$$\left|\int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right| \leq \int_A^{+\infty} |f(t)e^{-at}|e^{(a-x)t}dt \leq e^{(a-x)A} \int_A^{+\infty} |f(t)e^{-at}|dt$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{(a-x)A} = 0$, il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = 0$.

c) On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = 0$.

4. Injectivité de la transformation de Laplace

a) i. Soit $x \in I(f)$ et $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
L(f)(x+a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(x+a)t} f(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)e^{-at}dt \\
&= \int_0^{+\infty} g'(t)e^{-at}dt \\
&= [e^{-at}g(t)]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} g(t)e^{-at}dt \\
&= a\int_0^{+\infty} g(t)e^{-at}dt
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-at}g(t) = 0$ (g est bornée sur $]0, +\infty[$.)

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout $x \in I(f)$, $\mathscr{L}(f)(x) = 0$, on a en particulier, pour tout $x \in I(f)$ et $a > 0$ fixés $\mathscr{L}(f)(x + (n+1)a) = 0$. En remplaçant a par $(n+1)a$ dans i), on obtient

$$\mathscr{L}(f)(x + (n+1)a) = (n+1)a\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)at}g(t)dt = (n+1)\int_0^1 u^n g\left(-\frac{\ln u}{a}\right)du,$$

en posant $u = e^{-at}$. D'où

$$\int_0^1 u^n g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) du = 0.$$

iii. Soit h l'application définie sur $[0,1]$ par :

$$h(u) = \begin{cases} g\left(-\dfrac{\ln u}{a}\right) & \text{si } u \in]0,1] \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xv} f(v) dv & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

est continue sur $[0,1]$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 u^n h(u) = 0$ et d'après le théorème de Weirstrass h est nulle sur $[0,1]$. En effet, puisque tout polynôme est combinaison linéaire de monômes, on a pour tout polynôme P : $\displaystyle\int_a^b P(t)h(t)dt = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers h sur $[1,0]$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_a^b (h(x))^2 dx = \int_a^b (h(x) - P_n(x))\, h(x) dx \leq (b-a)\|h - P_n\|_\infty \|h\|_\infty$$

Comme la suite $(\|h - P_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on déduit que $\displaystyle\int_a^b (h(x))^2 dx = 0$, d'où, puisque h est continue sur $[1,0]$, $h = 0$ puis $g = 0$.

b) Puisque $g = 0$ et que $\forall t \geq 0$, $g'(t) = e^{-xt} f(t)$, on conclut que $f = 0$.

4 Résolution d'une équation différentielle du second ordre.

1. Soit une solution et $F = \mathscr{L}(y)$. On a

$$\mathscr{L}(y')(x) = x\mathscr{L}(y)(x) - y(0) = xF(x) + 3$$

et

$$\mathscr{L}(y'')(x) = x^2 F(x) - (xy(0) + y'(0)) = x^2 F(x) + 3x - 5$$

on a donc par linéarité de la transformée de Laplace

$$\mathscr{L}(y'')(x) - 3\mathscr{L}(y')(x) + 2\mathscr{L}(y) = 4\mathscr{L}(e^{2t})(x)$$

donc

$$(x^2 - 3x + 2)F(x) + 3x - 14 = \frac{4}{x-2}$$

donc

$$F(x) = \frac{-3x^2 + 20x - 24}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{-7}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-2} = \mathscr{L}(-7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t})(x)$$

par l'injectivité de la transformée de Laplace, on obtient

$$y(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}.$$

2. En appliquant la transformée de laplace à (s) on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} s\mathscr{L}(x)(s)+2s^2\mathscr{L}(y)(s)=\dfrac{1}{s+1}\\ s\mathscr{L}(x)(s)+2\mathscr{L}(x)(s)-\mathscr{L}(y)(s)=\dfrac{1}{s}\end{array}\right.$$

D'où

$$\mathscr{L}(x)(s)=\frac{2s^2+2s+1}{s(s+1)(2s^2+4s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-\alpha}-\frac{1}{s-\beta}.$$

Donc

$$x(t)=1+e^{-t}-e^{\alpha t}-e^{\beta t},$$

et puis

$$y(t)=x'(t)+2x(t)-1=1+e^{-t}+\beta e^{\alpha t}+\alpha e^{\beta t}.$$

où $\alpha=\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $\beta=\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$

3. **a)** Soient $x>0$ et $A>0$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^A te^{-xt}f''(t)dt=Ae^{-xA}f'(A)-\int_0^A(1-xt)e^{-xt}f'(t)dt$$

Une nouvelle intégration par parties donne :

$$\int_0^A te^{-xt}f''(t)dt=Ae^{-xA}f'(A)-(xA-1)e^{-xA}f(A)+1+\int_0^A(x^2t-2x)e^{-xt}f(t)dt$$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty}Ae^{-xA}f'(A)=0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty}(xA-1)e^{-xA}f(A)=0$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty}te^{-xt}f''(t)dt=1+\int_0^{+\infty}(x^2t-2x)e^{-xt}f(t)dt=1-x^2F'(x)-2xF(x).$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} ty''+2y'+ty=0,\\ y(0)=1.\end{array}\right.$$

En appliquant la transformée de Laplace au système on obtient

$$1-x^2F'(x)-2xF(x)+2xF(x)-2-F'(x)=0,$$

c'est à dire $(1+x^2)F'(x)+1=0$, donc $F(x)=c-\arctan(x)$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ ce qui assure que $c=\dfrac{\pi}{2}$ d'où, $F(x)=\mathscr{L}(y)(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan(x)$, donc $y(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

•••••••••••••