Classe préparatoire MPSI

Programme de mathématiques

Année scolaire 2023-2024

Programme de mathématiques de la classe préparatoire MPSI

1 Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les élèves à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers d'ingénieur, d'enseignant, de chercheur.

1.1 Objectifs généraux de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Mathématiques et Physique (MP) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale des scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, enseignants ou chercheurs ; il développe les aptitudes et les capacités des élèves selon les axes majeurs suivants :

— l'acquisition d'un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes, et la maîtrise de techniques usuelles ;
— le développement simultané du goût du concret et des capacités de raisonnement, d'argumentation et de rigueur ;
— l'éveil de la curiosité intellectuelle et le développement de l'esprit critique et des attitudes de questionnement, de recherche, d'analyse et de synthèse ;
— le développement de l'initiative, de l'autonomie et des capacités d'expression et de communication.

Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations, des connaissances et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices.

Une formation mathématique de qualité doit développer non seulement la capacité à acquérir des connaissances et à les appliquer à des problèmes préalablement répertoriés, mais aussi l'aptitude à étudier des problèmes plus globaux ou des questions issues de situations réelles. Certaines situations nécessitent la conception d'outils nouveaux pour les traiter. Ainsi, la réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent des objectifs majeurs.

Il est attendu que la pratique de la démarche et du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concourt à la formation de l'esprit des élèves et le développement de leurs compétences : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique. Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les élèves à mobiliser, de façon complémentaire et coordonnée, connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Pour aider les élèves à effectuer la synthèse des connaissances acquises dans les différents domaines qu'ils ont étudié, il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux élèves ; il est aussi souhaitable de mettre en lumière les interactions des champs de connaissance. La concertation entre les enseignants par classe, discipline ou cycle peut y contribuer efficacement ; la cohérence et une organisation coordonnée entre les diverses disciplines est fondamentale. Il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

Si les mathématiques sont un outil puissant de modélisation, que l'élève doit maîtriser, elles sont parfois plus contraignantes lorsqu'il s'agit d'en extraire une solution. L'évolution des techniques permet désormais d'utiliser aussi l'approche numérique afin de faire porter prioritairement l'attention des élèves sur l'interprétation et la discussion des résultats plutôt que sur une technique d'obtention. Cette approche permet en outre une modélisation plus fine du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ou l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. C'est aussi l'occasion pour l'élève d'exploiter les compétences acquises en informatique. C'est enfin l'opportunité de mener avec les professeurs d'informatique d'éventuelles démarches collaboratives.

Dans ce cadre, et vue la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation, les élèves doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul scientifique et numérique pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les élèves des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche. Les concepts mathématiques sous-jacents sont mis en avant et l'interprétation des résultats obtenus est facilitée. L'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles devient possible.

Concernant les capacités d'expression et de communication, cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration rigoureuse et, à l'oral, celle de présenter et défondre, de manière claire et synthétique, une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, exposés de TIPE) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

Il est aussi souhaitable que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques rendent compte des interactions entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques ; ce qui met en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique. Ils montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière. Dans ce sens, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre problèmes et outils conceptuels ; les seconds sont développés pour résoudre les premiers mais deviennent à leur tour, et aux mains des mathématiciens, des objets d'étude qui posent de nouveaux problèmes et peuvent ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

On attachera une importance à l'aspect géométrique des notions et propriétés étudiées en ayant régulierement recours à des figures et croquis, ce qui permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de première année MPSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en sections (numérotées 1, 2, ...). Chaque section comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

– le bandeau définit les objectifs essentiels, délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
– les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
– les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

1.3 Contenu du programme

Le programme définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues, et explicite des aptitudes et des compétences qu'une activité mathématique bien conçue est amène de développer. Il permet à tous les élèves d'acquérir progressivement le niveau requis pour la poursuite des enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études dans différents établissements de l'enseignement supérieur ; il leur permet également de se réorienter et de se former tout au long de leur parcours.

Le programme porte d'une part sur le secteur de l'analyse et des probabilités, et d'autre part sur celui de l'algèbre et un peu de géométrie. L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des liens avec d'autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

En plus des nombres complexes, le programme d'algèbre comprend l'étude de l'arithmétique des entiers relatifs et des polynômes à une indéterminée, et celle des notions de base de l'algèbre linéaire pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique, algèbrique et numérique. Les notions de géométrie affine et euclidienne étudiées dans le secondaire sont aussi reprises dans un cadre plus général.

Il est important de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie. De plus, il est à noter que même si la géométrie n'apparaît pas comme un champ autonome, son importance dans la représentation des notions et objets au programme ne saurait être sous-estimée. Ainsi, le programme préconise le recours à des figures géométriques chaque fois que cela est possible et notamment pour l'étude des nombres complexes, de l'algèbre linéaire, des espaces euclidiens et des fonctions d'une variable réelle.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de suite et de fonction ; les interactions entre les aspects discret et continu y sont mises en valeur. Il combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Les méthodes de l'analyse asymptotique sont exploitées dans l'étude des courbes, des séries numériques et des intégrales impropres. Enfin, les fonctions de deux variables sont abordées. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre discret. La notion de variable aléatoire discrete y est étudiée et permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste. L'accent mis sur cette notion permet de travailler rapidement avec des événements construits en termes de variables aléatoires.

Le programme aborde les notions de convergence et de comparaison des ordres de grandeur (étude locale), l'étude des propriétés globales des fonctions liées à la continuité et à la dérivabilité, l'étude des probabilités et des variables aléatoires discrètes ainsi que les notions de dimension et de rang en algèbre linéaire, et quelques notions de base sur le produit scalaire, la géométrie euclidienne et les fonctions de deux variables. Il développe les techniques relatives

- à l'usage des inégalités (accroissements finis, convexité, TAYLOR-LAGRANGE, CAUCHY-SCHWARZ, etc.),
- aux calculs sur les nombres (entiers, réels, complexes) et les polynômes,
- à la pratique des développements limités et leurs applications,
- à l'étude de la convergence ou de la divergence d'une suite, d'une série ou d'une intégrale,
- à la résolution des équations différentielles linéaires scalaires,
- au calcul matriciel et à celui des déterminants,
- aux méthodes d'approximation et à la pratique d'algorithmes divers.

La pratique de calculs simples permet aux élèves de s'approprier de manière effective les notions du programme. Ils doivent savoir mettre en oeuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices programmables, logiciels de calcul scientifique). Il identifie un certain nombre d'algorithmes (algorithmes du pivot de GAUSS, d'EUCLIDE, de HÖRNER, de GRAM-SCHMIDT, méthodes de NEWTON et des approximations successives, méthodes de calcul approché d'intégrales, etc.) qui doivent être connus et pratiqués par les élèves. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de première année MPSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la première période est étudié complètement en premier lieu, lors des cinq premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé. Le programme doit être traité en veillant á alterner, de préférence, des chapitres d'analyse et de probabilité d'une part et d'algèbre et de géométrie euclidienne de l'autre.

Les objectifs majeurs du programme de la première période sont les suivants :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures en commençant les cours dans le prolongement des programmes du cycle du baccalauréat scientifique, mettant ainsi à profit les connaissances acquises au lycée ;
- familiariser les élèves avec la terminologie française ;
- amener les élèves vers des problèmes effectifs d'analyse, de probabilités, d'algèbre ou de géométrie en veillant à développer leur :
  - intuition et imagination,
  - capacité à formuler clairement des résultats et à effectuer des raisonnements rigoureux,
  - capacité à argumenter et à mettre au point des démonstrations ;
- susciter la curiosité et l'intérêt des élèves en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux ;
- donner les bases mathématiques indispensables à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (physique, chimie, sciences industrielles, informatique, ...) ;
- éviter de proposer des exposés formels plus ou moins dogmatiques et inconsistants.

1.5 Recommandations pédagogiques pour le choix d'une progression

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les sections qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale et en privilégiant la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité[1] effective des élèves et en évitant tout dogmatisme, et ce quel que soit le temps d'enseignement proposé (cours, travaux dirigés, TIPE). En effet, l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu et les supports pédagogiques utilisés doivent motiver les élèves et favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie de ces derniers. Les situations de résolution de problèmes, de la modélisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite, favorisent cette mise en activité.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

1. " Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." benjamin franklin (≪ Dis-moi et j'oublie, enseigne-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. ≫)

2 Première période

2.1 Vocabulaire ensembliste et éléments de logique

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnement nécessaires aux élèves pour la conception, l'argumentation et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.

Ces notions doivent être introduites de manière progressive, au fur et à mesure des besoins et des exemples rencontrés dans le programme, en vue d'être acquises en fin de la première période. Elles ne doivent faire l'objet d'aucune étude exhaustive bloquée en début d'année. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous.

On suppose les élèves familiers avec la théorie naïve élémentaire des ensembles. L'objectif est de fixer la terminologie.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves sachent :

- *utiliser correctement les connecteurs logiques ;*
- *utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;*
- *utiliser correctement les expressions ≪ condition nécessaire ≫, ≪ condition suffisante ≫ ;*
- *formuler la négation d'une proposition ;*
- *distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;*
- *utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;*
- *reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par contraposée, raisonnement par disjonction des cas, raisonnement par analyse-synthèse, raisonnement par l'absurde, raisonnements par récurrence.*

Implication, contraposition, équivalence, condition nécessaire, condition suffisante. Connecteurs ET et OU. Négation d'un énoncé.	Les élèves doivent être capables de formuler la négation d'un énoncé, d'une proposition.
Quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$.	Les élèves doivent être entraînés à l'emploi des quantificateurs pour formuler avec précision les énoncés mathématiques ainsi que leurs négations. On insistera sur la qualité de rédaction des textes mathématiques ou plus généralement scientifiques. En particulier, l'utilisation des quantificateurs et des symboles mathématiques en tant qu'abréviations est exclu.

Raisonnement par disjonction des cas ; raisonnement par contraposition ; raisonnement par analyse-synthèse ; raisonnement par l'absurde.	Ces notions doivent être introduites au moyen de plusieurs exemples utilisant les acquis du lycée. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de « condition nécessaire » et « condition suffisante ».
Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Raisonnements par récurrence (simple, double et forte).	On ne construit pas $\mathbb{N}$, on rappelle et on utilise ses propriétés.
Ensembles. Éléments d'un ensemble, relation d'appartenance. Parties (ou sous-ensembles) d'un ensemble, relation d'inclusion.	L'ensemble vide est noté $\emptyset$, l'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathscr{P}(E)$.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire. Recouvrement disjoint, partition d'un ensemble. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$ ou $\overline{A}$ ou C_E^A ou A^c pour le complémentaire d'une partie A de E.
Relation binaire sur E ; relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble-quotient est hors programme. L'ensemble des classes d'équivalence réalise une partition de E. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$; notation $a \equiv b\,[c]$.
Relation d'ordre, ordre partiel, ordre total. Pour A partie non vide de E ordonné : notions de majorant et de minorant, de plus grand élément (maximum), et plus petit élément (minimum).	
Application (ou fonction) d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F. Graphe d'une application. Restriction et prolongement.	Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. On insistera sur l'existence et l'unicité de l'image de tout élément de l'ensemble de départ E. Notations $\mathcal{F}(E,F)$ et F^E. La restriction de f à A est notée $f\|_A$.
Famille indexée par un ensemble non vide.	
Indicatrice d'une partie A d'un ensemble E.	Notation 1_A. On a $1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A \end{cases}$
Image directe, image réciproque.	Notations $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
Composition d'applications.	
Injection, surjection, bijection. Application réciproque d'une bijection. Composées de deux injections, de deux surjections, de deux bijections. Réciproque de la composée de deux bijections.	L'application réciproque d'une bijection f est notée f^{-1}. La notation $f^{-1}(B)$ est cohérente.

2.2 Nombres complexes : calculs algébriques et applications géométriques

L'objectif de cette section est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises en classe de terminale du cycle du baccalauréat. Le programme combine les aspects suivants :

- *l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et des équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et leur utilisation en géométrie plane ;*
- *l'introduction de l'exponentielle complexe et l'étude de ses applications à la trigonométrie.*

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves sachent manipuler les nombres complexes et les utiliser pour résoudre des problèmes de géométrie plane.

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures.

Nombres complexes, conjugaison et module	
Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe ; notations $\mathrm{Re}\,(z)$ et $\mathrm{Im}\,(z)$.	L'ensemble $\mathbb{C}$ peut être construit à partir de $\mathbb{R}^2$ mais le programme ne comporte aucun résultat théorique sur cette construction.
Conjugaison. Opérations sur les nombres complexes, propriétés.	Compatibilité de la conjugaison avec les opérations.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur.	Le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct est identifié à $\mathbb{C}$.
Module d'un nombre complexe, relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$. Module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Interprétation géométrique de $\|z - z'\|$, distance, cercle et disque.
Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Cercle trigonométrique $\mathbb{U}$. Paramétrisation par les fonctions circulaires cosinus et sinus	On présentera une justification géométrique de l'une de ces formules.
Définition de e^{it}, $t \in \mathbb{R}$. Relation $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$. Trigonométrie circulaire : formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$; cas particulier des formules de duplication $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.	Les élèves doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ ainsi que les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
Cosinus, sinus et tangente de $\pi \pm \theta$, de $\frac{\pi}{2} \pm \theta$; cosinus, sinus et tangentes des angles usuels.	Les élèves doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.
Exemples de résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques simples.	Les élèves doivent savoir résoudre de telles équations et inéquations en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'EULER. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$ et de $e^{is} \pm e^{it}$, $s, t \in \mathbb{R}$.	Les élèves doivent savoir linéariser des puissances de fonctions circulaires et exprimer simplement des sommes comme $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.

Formule de MOIVRE	Les élèves doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
Forme trigonométrique d'un nombre complexe	
Forme trigonométrique re^{it} avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Coordonnées polaires.	Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$; notation $a \equiv b\,[2\pi]$. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$ (amplitude et phase).
Équations algébriques, racines de l'unité	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$; somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
Exponentielle complexe	
Exponentielle complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}\,(z)}e^{i\,\mathrm{Im}\,(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si, et seulement si, $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	Notation $\exp(z)$; module et arguments de e^z.
Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $c \neq a$ et $b \neq a$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité. Cocyclicité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az+b$. Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations. Cas général.	
Interprétation géométrique de la conjugaison. Réflexions du plan.	L'étude générale des similitudes indirectes est hors programme.

2.3 Compléments de calcul algébrique

Cette section porte sur un certain nombre de points importants pour la suite de la formation :

- *calculs de sommes et de produits de nombres réels ou complexes, dont la formule du binôme ;*
- *résolution de systèmes linéaires en petite dimension par l'algorithme du pivot de* GAUSS.

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreux exemples de calculs et d'applications.

2.3.1 Sommes et produits de nombres complexes

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels ou complexes.	Notations $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sum_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, avec I fini. Cas où I est vide. On pourra aussi présenter les calculs avec des points de suspension.
Sommes et produits télescopiques ; exemples de changements d'indices et de regroupements de termes. Sommes doubles, sommes triangulaires. Produit de deux sommes finies.	Cas de $\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ et $\prod_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^2$ ou de $\mathbb{Z}^2$.
Rappel de la notion de suite de nombres réels ou complexes.	Exemples simples.
Suites arithmétiques, suites géométriques.	Calcul du n-ième terme.
Calculs de sommes portant sur les termes consécutifs de suites arithmétiques ou géométriques ; en particulier, somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.	Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}$, expressions simplifiées des sommes usuelles : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.	Si $n \geqslant 2$, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$.
Factorielle. Coefficients binomiaux.	Notations $n!$, $\binom{n}{p}$; convention $\binom{n}{p} = 0$ pour $p < 0$ et $p > n$.
Expression des coefficients binomiaux avec la fonction factorielle. Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Relation (ou formule du triangle) de Pascal : $$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}.$$	Ces relations pourront faire l'objet de manipulations sur la notation factorielle. La relation de Pascal fournit un algorithme pour le calcul numérique des coefficients binomiaux, à programmer en Python.
Formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$: Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$.	Cette formule sera démontrée par récurrence.

2.3.2 Systèmes linéaires en petite dimension

Système linéaire à coefficients réels ou complexes de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues. Solution d'un tel système.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$.
Résolution par l'algorithme du pivot de Gauss et mise en évidence des opérations élémentaires sur les lignes.	Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$.

2.4 Nombres réels

Les nombres réels sont supposés connus ; on rappelle leurs propriétés fondamentales sans pour autant adopter un point de vue axiomatique, en mettant l'accent sur le principe de la borne supérieure / inférieure.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves aient une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités et soient entraînés à l'usage de la caractérisation de la borne supérieure / inférieure.

On peut utiliser les quantificateurs pour formuler certaines propriétés des réels (notamment celles relatives à l'ordre) et obtenir leurs négations.

Nombre rationnels, réels, irrationnels. $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonnée.	La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme. Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue d'un réel. Inégalités triangulaires.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leq \varepsilon$ ou $\lvert x-a\rvert < \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$.
Propriété d'Archimède. Partie entière. Approximations décimales d'un réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Majorant, minorant d'une partie non vide. Plus grand, plus petit élément d'une partie non vide (sous réserve d'existence).	
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	$[a, b]$ peut être introduit comme étant l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$.
Segment.	Intervalle admettant un plus petit et un plus grand élément
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie X non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$. Axiome de la borne supérieure.	Caractérisation. Notations $\sup X$ (resp. $\inf X$).
Partie dense de $\mathbb{R}$; densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.
Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	

2.5 Suites numériques

Cette section conjointement avec la précédente posent les fondements du programme d'analyse en MPSI. Elle est consacrée aux suites numériques et combine l'étude des aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) et celle des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

On soulignera l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).

Mode de définition d'une suite : explicite, implicite, par récurrence.	L'étude des suites récurrentes générales sera abordée après celle de la dérivation ; cette étude sera l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence.
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Limite finie ou infinie d'une suite	Notation $u_n \longrightarrow l$
Unicité de la limite.	Écriture $\lim u_n = l$.
Suite convergente, divergente	
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Exemples de formes indéterminées.
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	Mieux : $u_n \in]\ell/2, 3\ell/2[$ pour n assez grand.
Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leq v_n$, où $(v_n)_n$ converge vers 0.
Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.	Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Résultats analogues pour une suite décroissante.
Théorème des suites adjacentes.	
Suite extraite.	
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l, alors (u_n) tend vers l.
Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.	Les élèves doivent connaître le principe de la démonstration par dichotomie.
Caractérisation séquensielle de la densité d'une partie de $\mathbb{R}$.	Applications : densité de $\mathbb{Q}$ et de l'ensemble des nombres décimaux.
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).
Cas des suites complexes : brève extension des définitions et résultats précédents, théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Suites arithmétiques, suites géométriques.	Calcul du n-ième terme. Exemples de calculs de sommes portant sur les termes de suites arithmétiques ou géométriques.
Suites arithmético-géométriques.	Pour les suites $(u_n)_n$ vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$, où $a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante puis détermination des solutions en se ramenant au cas d'une suite géométrique.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants ; équation caractéristique ; cas complexe, cas réel.	Pour les suites $(u_n)_n$ vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 du type $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, recherche d'une solution de la forme $(\lambda^n)_n$ puis détermination des solutions en considérant la suite $(\mathrm{u}_{n+1} - \lambda\, u_n)_n$ pour se ramener au cas d'une suite géométrique. Si α et β sont réels, description des solutions réelles.

2.6 Fonctions de la variable réelle, limites et continuité

Cette section est consacrée à l'étude des notions de limite et de continuité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes. Les propriétés à caractère local sont énoncées et étudiées finement à l'aide des ε et des η.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves aient une bonne maîtrise des propriétés locales et globales des fonctions continues.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. On tâchera ici de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

2.6.1 Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \longmapsto f(x) + a$, $x \longmapsto f(x + a)$, $x \longmapsto f(a - x)$, $x \longmapsto f(ax)$, $x \longmapsto af(x)$.
Parité, imparité, périodicité ; réduction du domaine d'étude.	Interprétation géométrique de ces propriétés.
Somme $f+g$, produit fg, composée $g\circ f$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. Une fonction f est bornée si, et seulement si, $\lvert f\rvert$ est majorée.

2.6.2 Limites et continuité

Les notions de limites ont déjà été abordées pour les suites, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats sans démonstrations.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et sont à valeurs réelles sauf mention explicite du contraire. Le point a considéré par la suite est toujours élément de I ou extrémité de I.

On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a lorsque a est réel, avec un intervalle $[A,+\infty[$, si $a=+\infty$, avec un intervalle $]-\infty,A]$ si $a=-\infty$.

Limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$
Unicité de la limite.	Écritures $\lim\limits_{a} f = l$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
Si f est définie en a et possède une limite l en a, alors $l=f(a)$. Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I\setminus\{a\}$	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).	
Opérations algébrique sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Exemples de formes indéterminées.
Composition de limites. Conservation des inégalités larges par passage à la limite.	
Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$).
Continuité, prolongement par continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient. Composition de fonctions continues. Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.	Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue et si y est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a,b]$ tel que $f(x)=y$. Il en résulte que l'image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue réelle définie sur I est un intervalle. Principe de démonstration par dichotomie.
Calcul approché d'un zéro d'une fonction continue par l'algorithme de dichotomie.	
Théorème des bornes atteintes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment	Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Continuité et monotonie stricte.	La fonction f étant supposée à valeurs réelles et continue sur I, elle est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone.
La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur I est continue.	Toute fonction f réelle, continue et strictement monotone sur un intervalle I, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur l'intervalle $f(I)$.
Extension des définitions et résultats précédents au cas de fonctions à valeurs complexes.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

2.7 Fonctions de la variable réelle, dérivation

Cette section est consacrée à l'étude de la dérivation ; on y aborde aussi les suites récurrentes. Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- *aient une bonne maîtrise des propriétés locales et globales des fonctions dérivables et soient capables de démontrer celles qui seront étudiées à ce stade ;*
- *puissent mener l'étude d'une fonction (continuité et dérivabilité, prolongement, symétries, périodicité, domaine d'étude, sens de variations, recherche d'extremums et obtention d'inégalités, tracé du graphe et dérmination des asymptotes, tracé du graphe de la réciproque, . . .) ;*
- *aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalité des accroissements finis , inégalités de convexité, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, etc.).*

On attachera une importance à l'aspect géométrique des propriétés étudiées en ayant recours à de nombreuses figures pour les illustrer et les visualiser.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et sont à valeurs réelles sauf mention explicite du contraire. Le point a considéré par la suite est toujours élément de I.

2.7.1 Fonctions dérivabes

Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraine la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas, $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$. Interprétation géométrique : tangente au graphe en un point. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient.	
Dérivée d'une fonction composée, dérivée de la fonction réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

Extremum local, extremum global.	
Si f est dérivable et présente un extrémum local en un point a intérieur à I alors a est un point critique de f	Un point critique est un zéro de la dérivée.
Théorème de ROLLE, égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique. Application à l'existence de zéros d'une fonction.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\|f'\|$ est majorée par k , alors f est k-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans la sous section suivante.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et s'il existe l dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.	Si $l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.
Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de LEIBNIZ), quotient.	
Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.	
Théorème de classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement : si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers a pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.	
Extension des définitions et résultats précédents aux fonctions complexes.	Caractérisation de la dérivabilité et de la classe $\mathcal{C}^k$ en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale à faire le moment venu.

2.7.2 Suites récurrentes

L'étude des suites récurrentes est l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence. Sur des exemples, on mettra en évidence divers comportements (convergence lente, géométrique, quadratique) en explicitant le nombre d"itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. On présentera la méthode de Newton ; de même, l'étude de la dérivabilité donne un prétexte pour présenter la notion de discrétisation, à travers la méthode d' EULER.

Lors de l'étude d'une suite de nombres réels définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, il est utile de mettre en valeur le rôle des variations de f pour en déduire celles de la suite (u_n). En *outre, pour étudier la vitesse de convergence vers a de u_n, on peut exploiter le comportement local de f au voisinage de a et, notamment, une inégalité du type(lipschitzien) $|f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|$ où $0 \leqslant k < 1$, ou du type (quadratique) $|f(x) - f(a)| \leqslant \lambda|x - a|^2$, $\lambda > 0$.*

Intervalle stable par une fonction, point fixe d'une fonction. Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et si f est continue en a alors a est un point fixe de f. Exemples d'étude dans le cas où f est monotone ou lipschitzienne.	Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on soulignera l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $x \longmapsto f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.
Méthode de NEWTON.	Applications dans des cas simples.

2.8 Fonctions usuelles, fonctions convexes

Cette section est consacrée à l'étude des fonctions usuelles et des fonctions convexes.

2.8.1 Généralités sur l'étude d'une fonction

Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude.	
Tableau de variations.	Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.
Asymptotes. Tracé du graphe. Graphe d'une réciproque.	

2.8.2 Fonctions usuelles

Les fonctions puissances, l'éxponentielle réelle et les fonctions sinus et cosinus sont décrites en détail mais leur existence est admise ; leurs propriétés peuvent être démontrées en partie. On en déduit l'étude des autres fonctions usuelles.

Il est attendu qu'à l'issue de cette sous section, les élèves aient une bonne connaissance des fonctions usuelles et soient en particulier capables de se représenter leur graphe, de définir les fonctions trigonométriques réciproques (circulaires et hyperboliques), de manipuler les formules d'addition, etc.

Notations internationales standard : exp, ln, cos, sin, tan, cot, cosh, sinh, tanh, coth, arccos, arcsin, arctan, arccosh, arcsinh, arctanh.

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivées, variations et graphes. Les fonctions puissances sont définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur l'intervalle $]-\infty,0[$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations fonctionnelles.	$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques	sin, cos, tan, sinh, cosh, tanh.
Fonctions réciproques	arcsin, arccos, arctan, arcsinh, arccosh, arctanh.
Fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$.	

2.8.3 Fonctions convexes

L'objectif de cette sous section est d'introduire brièvement la notion de partie convexe du plan $\mathbb{R}^2$ en vue d'étudier les fonctions convexes d'une variable réelle ; la notion de barycentre est introduite exclusivement pour aborder la convexité.

Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures. On soulignera l'intérêt des fonctions convexes pour obtenir des inégalités.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, notions de barycentre et de partie convexe ; caractérisation d'une de partie convexe à l'aide de barycentres à coefficients positifs.	L'exposé sera réduit au strict minimum possible.
Fonctions à valeurs réelles convexes ; inégalité de convexité. Fonctions concaves. Interprétation géométrique.	Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x,y) de I^2 et tout λ de $[0,1]$: $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.
Inégalité de JENSEN	Si f est convexe sur I, $x_1, x_2, \dots, x_n$ des points de I et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{R}^+$ de somme 1 alors $f\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
Caractérisations : convexité de l'épigraphe, position relative du graphe et d'une de ses cordes, inégalité des pentes.	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I, des fonctions convexes deux fois dérivables sur I.	Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.
Applications : Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ, de YOUNG, inégalité arithmético-géométrique.	Les demonstrations de ces applications pourront être faites à titre d'exercices.

2.9 Primitives et équations différentielles linéaires

Cette section est consacrée au calcul des primitives et à l'étude des équations différentielles linéaires ; le point de vue adopté est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral utilisées sont différées à une section ultérieure qui sera traitée lors de la deuxième période.

Pour illustrer le cours sur les équations différentielles, on traitera des exemples notamment issus des autres disciplines scientifiques et on étudiera sur quelques exemples le problème de raccordements de solutions.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- *soient capables de mener des calculs de primitives dans des cas usuels et sachent reconnaître les dérivées de fonctions composées ;*
- *puissent mettre en pratique, sur des exemples simples, les techniques d'intégration par parties et de changement de variable ;*
- *sachent appliquer les deux points précédents lors de l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre et celles du second ordre à coefficients constants.*

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

2.9.1 Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle. Exemples.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.
Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme.	Les élèves doivent savoir utiliser les primitives de $x \longmapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$. Ils doivent aussi savoir calculer les primitives d'une fonction du type $x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$.
Application du calcul des primitives à celui d'intégrales.	Pour une fonction f continue sur I, l'intégrale de a à b, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est donnée par $F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Dérivée de $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, où f est continue.	Résultat admis.
Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.	Exemples de calculs d'intégrales au moyen d'une intégration par parties

Changement de variable : si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples de calculs d'intégrales au moyen d'un changement de variables.
Intérêt d'un changement de variable affine pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener au cas où l'intervalle d'intégration est $[0,1]$ ou $[-1,1]$.

2.9.2 Équations différentielles linéaires

Équation différentielle linéaire générale du premier ordre.

De la forme $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$, où α, β et γ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Équation homogène associée.

Il s'agit de l'équation $\alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$.

Notion de solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Forme générale des solutions de l'équation complète.

Somme d'une solution particulière (s'il en existe) et de la solution générale de l'équation homogène.

Principe de superposition des solutions.

Cas des équations différentielle linéaire du premier ordre résolues en y'.

Elles sont du type

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad (1)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Résolution de l'équation homogène associée à (1) dans le cas particulier où la fonction a est constante.

Résolution de l'équation homogène associée à (1) dans le cas général.

Les solutions sont du type $x \longmapsto \lambda e^{-A(x)}$, où A est une primitive de a sur l'intervalle I et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Méthode de variation de la constante pour la résolution de l'équation (1).

Expression intégrale des solutions de l'équation complète.

Problème de CAUCHY associé à (1) et au couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$: $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

Il s'agit d'étudier l'existence et l'unicité de la solution sur I de (1), vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY associé à (1).

Justification à l'aide de l'expression intégrale des solutions de l'équation complète.

Exemples d'étude dans des cas simples d'équations de type

$$a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

la fonction a pouvant s'annuler en des points de I.

Raccordements de solutions : on présentera en détail des exemples de recollement de solutions et de recherche de solutions maximales.

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Notion de solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Du type
$$y'' + ay' + by = f(x), \qquad (2)$$
où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résolution de l'équation homogène associée à (2). Cas réel et complexe : équation caractéristique, système fondamental de solutions de l'équation homogène.

Si a et b sont complexes, recherche d'une solution du type $x \longmapsto e^{\lambda x}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, puis détermination des solutions en se ramenant, à l'aide d'un changement de fonction, à une équation différentielle linéaire du premier ordre.
Si a et b sont réels, description des solutions réelles.

Forme générale des solutions de l'équation complète : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Les élèves doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \longmapsto \alpha\, e^{\lambda x}$, avec $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, ou de la forme $x \longmapsto \beta \cos(\omega x)$ ou $x \longmapsto \beta \sin(\omega x)$, avec β, ω des réels, et plus généralement dans le cas où le second membre est une fonction polynôme-exponentielle $x \longmapsto P(x)e^{\lambda x}$, $(P, \lambda) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$.

Principe de superposition des solutions.
Méthode de la variation des constantes (méthode de LAGRANGE).
Expression intégrale des solutions de l'équation complète.

Connaissant un système fondamental de solutions de l'équation homogène, la méthode de la variation des constantes ramène la résolution de l'équation complète à celle d'un système linéaire d'ordre 2 suivie d'une quadrature.

Problème de CAUCHY associé à (2) et au triplet $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$: $\left\{\begin{array}{l} y'' + ay' + by = f(x), \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0. \end{array}\right.$
Existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY.

Il s'agit d'étudier l'existence et l'unicité de la solution sur I de (2), vérifiant les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$.
Justification à l'aide de l'expression intégrale des solutions de l'équation complète.

2.10 Arithmétique des entiers

*L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et celles des congruences ; il développe l'arithmétique des entiers. L'algorithme d'*EUCLIDE *(division euclidienne) y joue un rôle central : il fournis des démonstrations alternatives constructives. Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves sachent l'appliquer à la détermination d'un* PGCD *ou d'une relation de* BÉZOUT.

L'approche préconisée reste tout de même élémentaire dans le sens où elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques.

Multiples et diviseurs d'un entier relatif, divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Entiers inversibles, relation d'association.
Théorème de la division euclidienne.

On note $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a.
Caractérisation des couples d'entiers associés.

PGCD de deux entiers non tous deux nuls a et b. Pour $k \in \mathbb{Z}^*$, $ka \wedge kb = \lvert k \rvert (a \wedge b)$.	Noté $a \wedge b$, c'est le plus grand élément de $D(a) \cap D(b)$ pour l'ordre naturel de $\mathbb{Z}$. $D(a) \cap D(b) = D(a \wedge b)$.
Algorithme d'EUCLIDE.	
Relation de BÉZOUT.	L'algorithme d'EUCLIDE fournit une relation de BÉZOUT.
PPCM.	Notation $a \vee b$. Lien avec le PGCD .
Couple d'entiers premiers entre eux.	Forme irréductible d'un rationnel.
Théorème de BÉZOUT. Lemmes d'EUCLIDE et de GAUSS.	EUCLIDE : si a et b divisent c et sont premiers entre eux, alors ab divise c.
Si a et b sont premiers à c, alors ab aussi.	GAUSS : si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.
PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de BÉZOUT. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
Nombre premier. Théorème d'EUCLIDE.	Théorème d'EUCLIDE : L'ensemble des nombres premiers est infini.
Théorème fondamental de l'arithmétique.	Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.
Valuation p-adique, p premier ; valuation p-adique d'un produit.	Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$.	Notation $a \equiv b \quad [n]$.
Opérations sur les congruences : somme, produit.	L'étude des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est hors programme.
Inverses modulo n ; utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n.	
Petit théorème de FERMAT.	

2.11 Vocabulaire relatif aux structures algébriques usuelles

On présente ici les structures algébriques utiles à l'étude du programme. Ce chapitre, strictement limité au vocabulaire décrit ci-dessous, a pour objectif de permettre une présentation unifiée des exemples usuels. En particulier, l'étude de lois artificielles est exclue.

2.11.1 Loi de composition interne

Loi de composition interne.	L'étude de lois artificielles est exclue.
Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
Partie stable.	

2.11.2 Structure de groupe

Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif.
Exemples usuels.	Groupes additifs $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}_+^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{U}, \mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble E.	Notation S_E.
Groupe produit.	
Sous-groupe : définition, caractérisation.	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.	Notations $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.
Isomorphisme de groupes.	

2.11.3 Structures d'anneau et de corps

Anneau, anneau intègre, corps.	Par convention un anneau est unitaire, un corps est commutatif.
Exemples usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.	
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

2.12 Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

Le but de cette section est présenter une initiation au calcul matriciel ; on obtient ainsi des exemples fondamentaux d'anneaux. On étudie aussi, dans un cadre plus général, les systèmes d'équations linéaires à coefficients réels ou complexes ; les solutions de tels systèmes sont obtenues en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes (méthode de GAUSS*) ; dans ce cadre, l'aspect matriciel des opérations élémentaires sera abordé et mis en œuvre.*

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- *maîtrisent le calcul matriciel ;*
- *soient capables, au moyen de l'algorithme du pivot de* GAUSS*, de résoudre un système linéaire et d'inverser une matrice carrée.*

Dans toute la section, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou $\mathbb{C}$, celui des complexes.

2.12.1 Calcul matriciel

Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, la matrice produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	Notations ${}^tA$, A^T.
Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes d'une matrice. Interprétation en termes de produit matriciel.	Interprétation des matrices élémentaires en termes d'opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes.
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; matrice identité, matrice scalaire ; produit de deux matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Notation I_n. Non commutativité de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes.
Matrice diagonale, matrice triangulaire supérieure/inférieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures/inférieures.
Matrice symétrique, antisymétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Notations $\mathscr{S}_n(K)$, $\mathscr{A}_n(K)$.
Formule du binôme de NEWTON dans $\mathscr{M}_n(K)$ pour deux matrices qui commutent.	Application au calcul de puissances.
Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: matrice inversible, inverse, groupe linéaire ; transposition et inversion de matrices.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'un produit de matrices inversibles.	
Condition d'inversibilité et inverse d'une matrice diagonale, triangulaire.	L'inverse d'une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure/inférieure) est une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure/inférieure).
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires.	

2.12.2 Systèmes d'équations linéaires

Système linéaire de n équations à p inconnues, à coefficients $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$ et second membre $b_1, \ldots, b_n$. Les $a_{i,j}$ et b_i sont éléments de $\mathbb{K}$. On peut présenter le système sous forme de couple : matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des $a_{i,j}$, colonne $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des b_i.	On introduit aussi T, appelé matrice augmentée, de terme général $t_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \in [\![1,p]\!] \\ b_i & \text{si } j = p+1 \end{cases}$. Ces présentations simplifiées sont intéressantes pour le traitement informatique d'un système linéaire.
Système linéaire homogène : les b_i sont tous nuls.	

Solution d'un système linéaire ; système compatible.	Un système est dit combatible s'il admet au moins une solution.
Tout système homogène est compatible et l'ensemble de ces solutions est stable par combinaisons linéaires.	
Traduction matricielle d'un système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_p$, à coefficients $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$ et de second membre $b_1, \dots, b_n$.	$AX = B$, $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ étant la matrice colonne des x_i.
Condition de compatibilité d'un système linéaire.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Description des solutions d'un système compatible au moyen d'une solution particulière et des solutions du systéme homogène associé.	Les solutions d'un système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé $AX = 0$.
Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire. Une opération élémentaire transforme un système linéaire en un autre système linéaire qui possède le même ensemble de solutions.	On utilise les notations : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (transvection), $L_i \leftrightarrow L_j$ (échange), $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (dilatation).
Algorithme du pivot de GAUSS : en utilisant échanges de lignes et transvections on peut transformer un système linéaire en système échelonné, donc plus facile à résoudre.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot vu au début de l'année, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général mais toute technicité est exclue.
Exemples de résolution de systèmes linéaires : système diagonale, triangulaire, échelonné etc.	Pour des systèmes de taille $n > 3$ ou $p > 3$, on utilise l'outil informatique. On met en évidence sur un exemple l'instabilité numérique de la méthode due aux erreurs d'arrondis.
Calcul de l'inverse d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, par résolution de système linéaire $AX = Y$.	
Application aux problèmes d'intersection en géométrie du plan et de l'espace.	

2.13 Polynômes et fractions rationnelles

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base de ces objets formels et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ *est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de* $\mathbb{Z}$*, ce qui autorise un exposé allégé.*

*Comme pour les entiers, l'algorithme d'*EUCLIDE *(division euclidienne) fournis des démonstrations alternatives constructives ; il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves sachent l'appliquer à la détermination d'un* PGCD *ou d'une relation de* BÉZOUT*.*

Concernant les fonctions rationnelles, l'objectif essentiel est de présenter aux élèves un outil qui leur permette de mener à bien des calculs d'intégration, de dérivation, de somme, etc.

Le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ *est* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

Anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et une indéterminée.	Notation $\mathbb{K}[X]$.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Le degré du polynôme nul est $-\infty$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.
Opérations sur les degrés : somme, produit. Composition des polynômes.	L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
Multiples et diviseurs d'un polynôme, divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Polynômes inversibles, relation d'association. Théorème de la division euclidienne.	On note $D(P)$ l'ensemble des diviseurs de P.
PGCD de deux polynômes non tous deux nuls.	Noté $P \wedge Q$ c'est le polynôme unitaire de plus grand degré appartenant à $D(P) \cap D(Q)$. On peut, par abus de langage, appeler aussi PGCD de P, Q tout polynôme associé à $P \wedge Q$. $D(P) \cap D(Q) = D(P \wedge Q)$.
Algorithme d'EUCLIDE.	
Relation de BÉZOUT.	L'algorithme d'EUCLIDE fournit une relation de BÉZOUT.
PPCM .	Notation $P \vee Q$. Lien avec le PGCD .
PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de BÉZOUT. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux. Théorème de BÉZOUT. Lemmes d'EUCLIDE et de GAUSS.	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Algorithme de HORNER pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	
Multiplicité d'une racine.	Si $P(a) \neq 0$ a est racine de P de multiplicité 0.
Polynôme scindé. Relations de VIÈTE entre coefficients et racines.	Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des éléves ; les autres doivent être retrouvées rapidement. Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines n'est exigible.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.	
Théorème de d'ALEMBERT-GAUSS.	La démonstration est hors programme.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de LEIBNIZ. Formule de TAYLOR polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
Théorème d'interpolation de LAGRANGE	Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que : $P(x_i) = y_i$, $1 \leq i \leq n$. Expression de P et description des polynômes Q tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $Q(x_i) = y_i$.
Fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Corps $\mathbb{K}(X)$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible.
Éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Théorème d'existence et d'unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.	La démonstration est hors programme, de même que la division selon les puissances croissantes. On limitera la technicité des exercices. Application au calcul de primitives, de dérivées successives.
Coefficient associé à un un pôle simple dans la décomposition. Décomposition en éléments simples de P'/P.	

3 Deuxième période

Il s'agit de compléter les résultats de la première période en développant :

- l'étude des développements limités et le calcul asymptotique, et leurs applications en analyse ;
- l'étude des notions fondamentales relatives aux espaces vectoriels et des applications linéaires, dans leur aspect gométrique ;
- l'utilisation du calcul matriciel en algèbre linéaire ;
- les notions fondamentales relatives aux déterminants et aux espaces préhilbertiens ;
- l'étude de l'intégration sur un segment puis sur un intervalle quelconque et celle des séries numériques ;
- l'étude des fonctions d'une variable rélle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, ce qui permet d'aborder les arcs paramétrés et une brève introduction aux fonctions de deux variables ;
- l'étude des variables aléatoires discrètes, ce qui permet de consolider et d'enrichir les notions relatives aux probabilités sur un univers fini introduites lors de la premère période.

3.1 Développements limités, calcul asymptotique

Cette section est consacrée aux développements limités et le calcul asymptotique. Son objectif est de familiariser les élèves avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant.

On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison. De même, on expose le calcul des développements limités (somme et produit de fonctions, fonctions composées) à partir d'exemples explicites, en évitant toute présentation systématique.

On insiste sur l'estimation des restes ; pratiquement, on écrira par exemple $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \beta(x)x^4$ *où* β *est une fonction continue en* 0, *plutôt que* $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \circ(x^2)$.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- *connaîssent les développements limités usuels ;*
- *maîtrisent la pratique du calcul asymptotique et ses applications au calcul des limites, à l'étude locale des fonctions et des courbes, etc.*

En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels auxquels il convient d'initier les élèves.

Relations de comparaison pour les suites : domination, négligeabilité et équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = \circ(v_n)$, $u_n \sim v_n$. Les relations $u_n = \circ(v_n)$ et $u_n \sim v_n$ sont définies à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que $v_n \neq 0$ pour n assez grand.
Traduction à l'aide du symbole $\circ$ des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^{\beta}(n)$, n^{α}, $e^{\gamma n}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.	

Liens entre les relations de comparaison.	Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
Règles usuelles de manipulation des relations de comparaison.	Opérations algébriques sur les équivalents.
Obtention d'un équivalent par encadrement.	Si les suites réelles $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ vérifient $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, pour n assez grand, et si $u_n \sim w_n$ alors $u_n \sim v_n$.
Propriétés conservées par équivalence.	Signe, limite.
Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents. Traduction à l'aide du symbole $\circ$ des croissances comparées des fonctions $x \mapsto \ln^\beta(x)$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $x \mapsto \ln^\beta(x)$ et $x \mapsto x^\alpha$ en 0. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ au voisinage de 0.	Notations $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$, $f(x) = \underset{x \to a}{\circ}(g(x))$ et $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Les relations $f(x) = \underset{x \to a}{\circ}(g(x))$ et $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ sont définies à partir du quotient $\dfrac{f}{g}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a.
Développement limité, unicité des coefficients, règle de troncature. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.
Forme normalisée d'un développement limité : $$f(a+h) = h^p\big(a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+o(h^n)\big),\ a_0 \neq 0.$$	Équivalence $f(a+h) \underset{h \to 0}{\sim} a_0h^p$; signe de f au voisinage de a.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement. Les élèves doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Primitivation d'un développement limité. Formule de TAYLOR-YOUNG : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sinh, cosh, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$; de arctan et de tan à l'ordre 3.	
Utilisation des développements limités à l'étude locale d'une fonction et pour préciser l'allure d'une courbe au voisinage d'un point.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples. La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.	La démonstration n'est pas exigible.

3.2 Espaces vectoriels

Cette section et la suivante sont organisées autour des axes suivants :

- *étudier les notions de base relatives aux espaces vectoriels, aux applications linéaires et à l'indépendance linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire. On insiste sur les méthodes pratiques de calcul de dimension en faisant apparaître qu'elles reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace vectoriel, description d'un sous-espace vectoriel par des équations linéaires ;*
- *présenter quelques notions de géométrie affine de manière à faciliter l'interprétation géométrique de certaines situations, et à consolider et enrichir les acquis relatifs à la la géométrie affine classique du plan et de l'espace.*

Lors de cette étude, on fera usage de nombreuses figures et on soulignera comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

Il est attendu qu'à l'issue de ces sections, les élèves :

- *aient assimilé les notions d'espace vectoriel et d'application linéaire, et les procédés usuels de leur construction ;*
- *sachent reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
- *connaissent les conséquences du théorème de la base incomplète (définition de la dimension, théorème du rang) ;*
- *maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un probléme (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;*
- *soient capable, au moyen de l'algorithme de* GAUSS, *de déterminer un rang, d'extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs (base extraite), de compléter une famille libre en une base (base incompléte), d'inverser une matrice carrée ;*
- *maîtrisent le « théorème du rang » dans différentes formulations.*

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.2.1 Généralités sur les espaces vectoriels

Notion d'espace vectoriel	
Structure de $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.	Espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Espace vectoriel E^A des fonctions d'un ensemble non vide A dans un espace vectoriel E.	Cas particulier des espaces vectoriels $\mathbb{K}^A$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Famille à support fini (ou presque nulle) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence d'abord par introduire la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
Notion de sous-espace vectoriel	
Sous-espace vectoriel.	Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Cas de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie X.	Notations $\text{Vect}(X)$, $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant X contient $\text{Vect}(X)$.
Familles de vecteurs d'un espace vectoriel	
Familles (ou parties) génératrices, libres, liées ; indépendance et dependance linéaire d'une famille de vecteurs.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Indépendance d'une famille de polynômes de degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases formée de polynômes de degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
Somme de deux sous-espaces vectoriels	
Somme de deux sous-espaces vectoriels.	Notations $F+G$, $F\oplus G$.
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.	Caractérisation de la somme directe par l'unicité de l'écriture, par l'intersection.
Sous-espaces vectoriels supplémentaires.	Les élèves doivent prendre l'habitude de se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

3.2.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit fini-dimensionnel (ou de dimension finie) s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre, où $I\subset\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie $J\subset\{1,\dots,n\}$, contenant I telle que $(x_i)_{i\in J}$ soit une base de E.	Existence de bases d'un espace vectoriel fini-dimensionnel.

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.	Utilisation de l'algorithme de GAUSS pour extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs et pour compléter une famille libre en une base.

Notion de dimension

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Dimension d'un espace de dimension finie. Exemples de calcul de la dimension.	Dimensions de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 résolue en y', de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace vectoriel de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	Une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre ; si, et seulement si, elle est génératrice.
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimensions finies.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Dimension et sous-espace vectoriel

Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, cas d'égalité.	Sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires.	Formule de Grassmann.
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire.	Dimension commune des supplémentaires.
Base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces vectoriels.	

3.3 Applications linéaires

On rappelle que le corps $\mathbb{K}$ est ici égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.3.1 Généralités sur les applications linéaires

Application linéaire.	L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphismes, réciproque.	Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.	
Image et noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité.	Notations $\mathrm{Im}\,(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$ ou plus simplement $\mathrm{Im}\,u$, $\mathrm{Ker}\,u$.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\,u = \mathrm{Vect}(\{u(x_i), i \in I\})$.	
Image d'une base par un isomorphisme.	
Endomorphismes.	Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$; non commutativité si E n'est pas de dimension $\leqslant 1$. Pour $u,v \in \mathscr{L}(E)$, notation vu pour la composée $v \circ u$; notation u^k pour $k \in \mathbb{N}$.
Exemples d'endomorphismes : Identité, homothéties.	Notations id_E, $\lambda.id_E$.
Définition géométrique d'une projection ou projecteur, d'une symétrie. Caractérisation par $p^2 = p$ ou $s^2 = id_E$.	Les élèves doivent prendre l'habitude de se représenter ces notions de projection et de symétrie par une figure en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

3.3.2 Applications linéaires et dimension finie

Application linéaire de rang fini. Inégalité $\mathrm{rg}(v\circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Détermination d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.	Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	Classification, à isomorphisme près, des espaces vectoriels de dimension finie par leur dimension.
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, avec E et F de même dimension finie, alors u est bijective si, et seulement si, u est injective, si, et seulement si, u est surjective.
Pour un endomorphisme en dimension finie, équivalence entre inversibilité, inversibilité à gauche et inversibilité à droite.	Si $u \in \mathscr{L}(E)$, avec E de dimension finie, alors u est inversible si, et seulement si, u est inversible à gauche si, et seulement si, u est inversible à droite.
Si E et F sont de dimension finie, il en est de même pour $\mathscr{L}(E,F)$.	Formule $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces supplémentaires de E, et si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ coıncidant avec u_1 sur E_1 et avec $u_2$sur E_2.

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

Théorème du rang.

Si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ alors u est de rang finie et $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.

3.3.3 Notions sur les formes linéaires et les hyperplans

Forme linéaire.

Formes coordonnées relativement à une base.

Hyperplan.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

L'étude de la dualité est hors programme.

3.4 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Cette section a un double objectif :

- *montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées dans le secondaire et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi ;*
- *modéliser un problème affine par une équation du type $u(x) = a$, où u est une application linéaire, et unifier ainsi plusieurs situations de ce genre déjà rencontrées (systèmes linéaires, équations différentielles linéaires, suites récurrentes linéaires, ...).*

Cette partie du cours doit être illustrée par de nombreuses figures.

Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.

On se limite à la dimension finie. L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.	Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$
Intersection de sous-espaces affines.	
Barycentres. Famille affinement indépendante de points, repère affine, coordonnées.	Insister sur le cas de dimension 1, 2 et 3.
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x)=a$, d'inconnue x, est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithméticogéométriques, et la recherche de polynômes interpolateurs. La notion d'application affine est hors programme.

3.5 Matrices

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;*
- *étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et la relation d'équivalence qui s'en déduit sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;*
- *introduire brièvement la relation de similitude sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- *sachent représenter matriciellement une famille finie de vecteurs ou de formes linéaires et une application linéaire dans une base donnée et utiliser les formules de changement de bases ;*
- *maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un probléme (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;*
- *soient capables, au moyen de l'algorithme de* GAUSS*, de déterminer le rang d'une matrice ou d'une application linéaire ;*
- *maîtrisent le « théorème du rang » dans différentes formulations.*

3.5.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base e, d'une application linéaire u dans un couple (e,f) de bases, d'un endomorphisme v dans une base e.	Notation $Mat_{e,f}(u)$, $Mat_e(v)$. Exemple : matrice, dans la base $(1,i)$ du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{C}$, de la similitude $z \longmapsto$(a+ib)z, a,b$\in\mathbb{R}$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases. Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Notations $u \mapsto Mat_{e,f}(u)$ et $v \mapsto Mat_e(v)$.

Matrice d'une composée d'applications linéaires.	Cas particulier des endomorphismes.
Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.

3.5.2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si, et seulement si, ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si, et seulement si, son rang vaut n.	Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure/inférieure est une matrice triangulaire supérieure/inférieure.
Lien entre les diverses notions de rang.	
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Retour sur les systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogéne comme noyau d'une matrice.	Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.
Le système $AX = B$ est compatible si, et seulement si, B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si la matrice A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

3.5.3 Changements de bases, équivalence et similitude

Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	La matrice de passage $P_e^{e'}$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e. L'inverse de $P_e^{e'}$ est $P_{e'}^{e}$.
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur.	Base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	Exemples de recherche d'un couple de bases dans lequel la matrice d'une application linéaire donnée est simple.
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

Matrices équivalentes et rang

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions p et n respectivement, et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r alors il existe une base e de E et une base f de F telles que : $Mat_{e,f}(u) = J_r$.

La matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, I_r étant la matrice unité d'ordre r.

Matrices équivalentes.

Interprétation géométrique.

Une matrice élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.

Classification des matrices équivalentes par le rang.

Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

Application : calcul du rang.

Une autre formulation du théorème du rang.

Le rang d'un système d'équations linéaires homogènes est égal au rang de sa matrice, une matrice et sa transposée ont même rang, l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à p inconnues de rang r est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$.

Matrices semblables

Matrices semblables.

Interprétation géométrique.
Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

Trace d'une matrice carrée.

Notations $\mathrm{tr}(A), \mathrm{Tr}(A)$.

Linéarité de la trace, relation $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, invariance par similitude.

Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Linéarité de la trace, relation $\mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu)$. Trace d'un projecteur.

Notations tr(u), $\mathrm{Tr}(u)$.

3.6 Groupe symétrique et déterminants

Dans cette section, le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités. ; les objectifs visés dans cette section sont les suivants :

- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- *puissent manipuler les permutations et calculer leur signature ;*
- *connaissent la théorie des déterminants et acquièrent des méthodes pour les calculer.*

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

3.6.1 Groupe symétrique

Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$.	Notation S_n.
Cycle, transposition.	Notation $(a_1a_2\dots a_p)$.
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité.	La démonstration n'est pas exigible. Commutativité de la décomposition.
Méthode pratique de décomposition.	les élèves doivent maîtriser la pratique de décomposition d'une permutation.
Toute permutation se décompose en produit de transpositions.	La décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de transpositions l'est.
Signature. Signature d'une permutation ; signature d'un cycle ; pratique de calcul de la signature.	Il existe un unique morphisme de groupes de S_n sur $\{-1,1\}$ envoyant toute transposition sur -1. La démonstration n'est pas exigible.

3.6.2 Déterminants

Formes n-linéaires alternées	
Formes n-linéaires alternées sur E.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.
Antisymétrie, effet d'une permutation.	Si f est une forme n-linéaire alternée sur E et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée de E, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base : si e est une base, il existe une et une seule forme n linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$. Toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées (formule de Leibniz).	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Relation entre $\det_e$ et $\det_{e'}$ si e et e' sont deux bases.	
La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	
Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Caractérisation des matrices inversibles.	
L'application det induit un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(K)$) sur $\mathbb{K}^*$.	
Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.
Calcul des déterminants, Comatrice	
Effet des opérations élémentaires.	
Cofacteur. formules de LAPLACE de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.	
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Déterminant de VANDERMONDE.	Lien avec les polynômes de Lagrange.
Comatrice.	Notations $\mathrm{Com}(A)$, $\widetilde{A} = {}^t\,\mathrm{Com}(A)$.
Relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)A = \det(A)I_n$.	Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

3.7 Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire qualifiant. L'objectif de cette section est de généraliser cette notion et exploiter, principalement à travers l'étude des projections orthogonales, l'intuition acquise dans des situations géométriques en dimension 2 ou 3 pour traiter des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

Lors de cette étude, on fera usage de nombreuses figures et on soulignera comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions étudiées, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- *acquièent les notions de base sur le produit scalaire, sur les espaces vectoriels euclidiens (bases orthonormales, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux) et sur la géométrie euclidienne du plan et de l'espace ;*
- *sachent orthogonaliser une famille libre d'un espace euclidien au moyen de l'algorithme de* GRAM-SCHMIDT *et calculer la distance entre deux sous-espaces affines ;*
- *maîtrisent les relations entre le point de vue géométrique et le point de vue matriciel.*

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

3.7.1 Produit scalaire, norme associée

Produit scalaire sur E.	Notations $<x, y>$, $(x\|y)$, $x.y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	

Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, produit scalaire $(f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}_{2\pi}\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$ des fonctions continues $2\pi-$périodiques sur $\mathbb{R}$.	Expressions $x\,{}^t y$, $\mathrm{Tr}({}^t AB)$. Exemples de produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ définis à l'aide d'intégrales.
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Relations entre produit scalaire et norme ; identités de polarisation ; identité du parallélogramme.	Notation $\\| \\;\\|$. Application dans les cas des produits scalaires cités ci-dessus. $2 < x, y >= \\|x+y\\|^2 - \\|x\\|^2 - \\|y\\|^2$. $\\|x+y\\|^2 + \\|x-y\\|^2 = 2(\\|x\\|^2 + \\|y\\|^2)$.

3.7.2 Orthogonalité ; base orthogonale, orthonormale

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie, sous-espaces vectoriels orthogonaux.	Notation $X^{\perp}$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.
Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de PYTHAGORE, cas d'une famille finie de vecteurs. Algorithme d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.	
Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète. Coordonnées dans une base orthonormale ; expressions du produit scalaire et de la norme dans une telle base.	
Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n, déterminant de n vecteurs dans une base orthonormale directe, noté $\mathrm{Det}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$; produit mixte de n vecteurs, produit vectoriel de $n-1$ vecteurs. Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, notations $u \wedge v$ ou $u \times v$; expression des coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale directe.	Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.

3.7.3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	En dimension finie : dimension de $F^{\perp}$, vecteur normal à un hyperplan.

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale de F.	À défaut dune base orthonormale de F, les élèves doivent savoir déterminer $p_F(x)$ en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité du vecteur $x-p_F(x)$ aux vecteurs d'une base (ou d'une famille génératrice) de F.
Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	Notation $d(x,F)$.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise la distance de x à F : $\|x-p_F(x)\| = \min\limits_{y\in F}\|x-y\|$.	En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur x sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.
Inégalité de Bessel : pour tout x, $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.	

3.7.4 Un peu de géométrie affine euclidienne

Vecteur normal à un hyperplan affine d'un espace euclidien. Si l'espace est orienté, orientation d'un hyperplan par un vecteur normal.	Lignes de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\vec{n}$.
Équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Distance d'un point M à un hyperplan affine défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\vec{n}$: $\lvert\overrightarrow{AM}.\vec{n}\rvert$.	Cas particuliers du plan et de l'espace euclidiens.

3.8 Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment

Dans cette section, il s'agit de donner une construction rigoureuse de l'intégrale d'une fonction, rélles ou complexes, continue par morceaux sur un segment en partant de sa définition comme une aire. Ses propriétés élémentaires sont en suite établies, et notamment le lien entre intégration et primitivation. Ceci permet de revenir sur les techniques de calcul intégral en vue de les consolifer, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La notion de continuité uniforme étant hors programme de MPSI, le théorème sur l'approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier est établi en ayant recourt à l'axiome de la borne supérieure.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- *soient capables de mener des calculs d'intégrales et de primitives dans des cas usuels ;*
- *puissent mettre en pratique, sur des exemples simples, les techniques d'intégration par parties et de changement de variable ;*
- *aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalités des accroissements finis et de* TAYLOR-LAGRANGE*, inégalité triangulaire, etc.).*

On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour la construction de l'intégrale, on peut soit se placer d'emblée dans le cadre des fonctions à valeurs complexes, soit traiter d'abord le cas réel avant de procéder à une brève extension.

3.8.1 Fonction en escalier, fonction continue parmorceaux sur un segment

Subdivision d'un segment, pas de la subdivision. Fonction en escalier, continue par morceaux, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Notations $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ et $\mathcal{CM}^1\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. Structure vectorielle; stabilité par le produit et le passage au module des ensembles $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ et $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [a,b]$.

On peut montrer cette propriété en appliquant le principe de la borne supérieure et le fait que f possède une limite à droite en tout point de l'intervalle $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de l'intervalle $]a,b]$: Considérer l'ensemble $\Gamma = \big\{c \in [a,b]\ ; \exists\varphi \in \mathcal{E}\big([a,c],\mathbb{K}\big),\ \forall t \in [a,c],\ |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon\big\}$; cet ensemble est non vide (il contient a) et est majoré par b ; il admet donc une borne supérieure γ dans $[a,b]$. Il est en fait évident que Γ est l'un des intervalles $[a,\gamma[$ ou $[a,\gamma]$; établir le résultat d'approximation revient à montrer que $\gamma \in \Gamma$ et que $\gamma = b$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on parvient ainsi à construire un couple de fonctions en escalier qui encadrent f à ε près sur le segment.

Une représentation graphique des fonctions est éclairante, en vue notamment de l'interprétation de l'intégrale en termes d'aire.

3.8.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction φ en escalier sur un segment $[a,b]$. Propriétés usuelles : linéarité, additivité et positivité de l'intégrale. Inégalité triangulaire.

Notations $\int_{[a,b]} \varphi$, $\int_a^b \varphi$, $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
$\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| \leq \int_{[a,b]} |\varphi|$.

Définition de l'intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a,b]$: Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; on pose $I_n = \int_a^b \varphi_n$; alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et convergente dans $\mathbb{K}$ (Bolzano-Weierstrass), et sa limite ne dépend pas du choix de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$; cette limite s'appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
On pourrait se placer d'abord dans le cas où la fonction f est réelle et l'encadrer à ε près par deux fonctions en escalier φ et ψ de sorte que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$, puis illustrer l'approximation à l'aide d'un graphique ; envisager ensuite de définir l'intégrale d'une fonction complexe à l'aide de sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Propriétés usuelles : Linéarité, additivité et positivité de l'intégrale.

Inégalité triangulaire.

Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si, et seulement si, la fonction est nulle.

Relation de CHASLES.

Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leq a$. Propriétés correspondantes.

Sommes de RIEMANN : si $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intérprétation géométrique dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ ou lipschitzienne.

3.8.3 Intégrale fonction de sa borne supérieure et applications

Dérivation de $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.

Si $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue (même lipschitzienne) sur $[a,b]$ et dérivable en tout point de continuité de f.

Théorème fondamental du calcul intégral. : Toute fonction continue sur un intérvalle possède une primitive.

f étant une fonction continue sur I et $a \in I$, la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I ; c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a. De plus, pour toute primitive G de f,

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I.$$

Définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

Une fonction f est continue par morceaux sur I si sa restriction à tout segment J inclus dans I est continue par morceaux sur J.

Définition des primitives d'une fonction continue par morceaux.

Deux primitives d'une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.

Extension du théorème fondamental du calcul intégral aux fonctions continues par morceaux.

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux ; on appelle primitive de f sur I toute fonction continue $F : I \to \mathbb{K}$ telle qu'en tout point de continuité x de f, F soit dérivable de dérivée égale à $f(x)$; si x_0 est un point de I, toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto \lambda + \int_{x_0}^x f$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$. De plus, pour toute primitive G de f sur I,

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I.$$

Inégalité des accroissements finis.

Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f'|$$

Formule d'intégration par parties.	La formule d'intégration par partie pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ étant déjà traitée, sa généralisation au cas des fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux pourra être abordée en exercices.
Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de TAYLOR (à l'ordre n) avec reste sous forme d'intégrale ; inégalité de TAYLOR-LAGRANGE.	On soulignera la différence de nature entre la formule de TAYLOR-YOUNG (locale) et les formules de TAYLOR globales (reste intégral et inégalité de TAYLOR-LAGRANGE).
Formule de changement de variable. Application : intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0 ; l'intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période est constante.	Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I, $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Exemples de calcul d'intégrales et de primitives.	Pour ce qui est du calcul des primitives, le seul exposé systématique concerne les fonctions rationnelles ; il utilise la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Parmi les exemples à traiter figurent la primitivation des polynômes trigonométriques par linéarisation, l'utilisation du paramétrage rationnel de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ pour ramener l'intégrale d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus à celle d'une fonction rationnelle et le calcul des intégrales de WALLIS.

3.8.4 Calcul approché d'intégrales

Intégration numérique : étude et comparaison des méthodes des rectangles et des trapèzes.	On présentera un algorithme associé à la méthode des trapèzes (à programmer en Python) en soulignant l'intérêt des subdivisions dichotomiques ; on admettra que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, l'erreur est un $O(1/n^2)$, n désignant le nombre de points de la subdivision.

3.9 Intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle

L'objectif de cette section est de définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle non compact. On soulignera l'importance du principe de comparaison pour ramener l'étude de l'intégrabilité d'une fonction à l'estimation de son comportement aux bornes de l'intervalle d'intégration.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- *sachent établir la convergence ou la divergence d'une intégrale dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une fonction positive aux fonctions de référence ;*
- *aient mis en œuvre les techniques d'intégration usuelles pour étudier ou calculer l'ntégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothrèses de régularité des énoncés.

Les fonctions considérées ici sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.

3.9.1 Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$

Intégrale généralisée (ou « impropre ») convergente : Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux ; l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ admet une limite dans $\mathbb{K}$ en $+\infty$.

Notation : en cas de convergence, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ se note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, et on dit que l'intégrale est convergente en $+\infty$.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente et f est continue, dérivation sur $[a,+\infty[$ de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f$.

Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée.

Écriture $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.

Si f et g sont deux fonctions continues parmorceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Le résultat s'applique en particulier si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ ou si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\circ}\big(g(x)\big)$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Intégrale de Riemann.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

3.9.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$

Une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».

Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Un calcul montrant que $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$:

- si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;

Le résultat s'applique en particulier si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$.

- si $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} |g(x)|$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f.

Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.

3.9.3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert (ou ouvert) I de $\mathbb{R}$, dont les extrémiés inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées a et b respectivement.

Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrale convergente en b, en a.
Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente.
Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, dont les extrémiés inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées a et b respectivement, linéarité de l'application

$$f \longmapsto \int_a^b f,$$

définie sur l'espace vectoriel des fonctions continue par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge.

Positivité dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Relation de chasles.

f est intégrable sur I si, et seulement si, pour tout $c \in I$, f est simultanément intégrable sur $I \cap [c, +\infty[$ et $I \cap]-\infty, c]$ et dans ce cas

$$\int_I f = \int_{I\cap]-\infty,c]} f + \int_{I\cap[c,+\infty[} f.$$

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'existence de deux des trois termes apparaissant dans la formule justifie le calcul.
Dans la pratique, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité de f et g.
On considère sur quelques exemples l'utilisation de la formule d'intégration par parties pour ramener l'étude de la convergence d'une l'intégrale à celle d'une intégrale absolument convergente.

Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque : étant données une fonction f continue sur un intervalle I et une fonction φ bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle J sur l'intervalle I, les intégrales $\int_I f$ et $\int_J (f\circ\varphi)\,|\varphi'|$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

Les élèves peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changement de variable usuels (fonctions affine, puissance, exponentielle, logarithme, ...).

3.9.4 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.
La convergence absolue implique la convergence.
Fonction intégrale sur un intervalle I : une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue parmorceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».
Fonction intégrable en b, en a.

Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.

Inégalité triangulaire.

$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.
Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.
Étude de l'intégrabilité sur $]0, 1]$ des fonctions de référence usuelles : $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto |\ln x|$.

La fonction f est intégrable en a (resp. b) si, et seulement si, la fonction $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a, b]$ et de $x \mapsto \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ sur $[a, b[$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Intégrales de Riemann

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

3.9.5 Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.

3.10 Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer la section « Développements limités, calcul asymptotique » et, à travers la notion de développement décimal de mieux appréhender les nombres réels. Elle est étudiée notamment pour son intérêt dans l'étude des variables aléatoires discrètes ; son objectif majeur est la maîtrise des série à termes positifs et de la convergence absolue.

3.10.1 Convergence et divergence

Sommes partielles. Convergence, divergence.	$\sum\limits_k u_k$ désigne la série de terme général u_k, on dit aussi série associée à la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les u_k sont dans toute cette section éléments de $\mathbb{C}$.
Somme et restes d'une série convergente.	On note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ la somme de la série de terme général u_k, lorsqu'elle converge.
Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.	Exemples simples de séries convergentes, divergentes.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence ; somme en cas de convergence.	Si $z \in \mathbb{C}$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ converge si, et seulement si, $\lvert z\rvert < 1$, auquel cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
Espace vectoriel des séries convergentes ; linéarité de la somme.	
Lien suite-série, séries télescopiques.	La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et la série télescopique $\sum\limits_{k\geqslant 0}(u_k - u_{k+1})$ sont de même nature.

3.10.2 Cas des séries à termes positifs

Une série à termes réels positifs converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.	Dans le cas où une série à termes positifs est divergente, il est pratique de convenir que sa somme est égale à $+\infty$.
Si la série à termes réels positifs u_k converge alors la série associée à une permutation quelconque de la suite (u_k) converge aussi, et les sommes sont égales.	La suite v est une permutation de la suite u s'il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\sigma(n)}$, pour tout entier naturel n.

Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : comparaison terme à terme, comparaison logarithmique, règle de d'Alembert, cas de domination, cas d'équivalence.	
Dans le cas d'une fonction f monotone sur $\mathbb{R}^+$, encadrement des sommes partielles de la série $\sum_k f(k)$ à l'aide d'intégrales.	Application à l'étude de sommes partielles et de restes.
Séries de Riemann.	
Comparaison de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et de la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ pour une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante.	L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ sont de même nature. Les élèves doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.

3.10.3 Séries à termes quelconques

Séries alternées, critère de Leibniz	
Séries alternées, critère spécial de Leibniz ; signe et majoration des restes en cas de convergence.	Les sommes partielles d'indices pairs et celles d'indices impairs forment un couple de suites adjacentes.
Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Convergence absolue d'une série. La convergence absolue d'une série $\sum_k u_k$ implique sa convergence, la réciproque est fausse.	La convergence de $\sum_k u_k$ est établie à partir de la convergence des 4 séries à termes positifs suivantes : $\sum_k \mathrm{Re}(u_k)^+$, $\sum_k \mathrm{Re}(u_k)^-$, $\sum_k \mathrm{Im}(u_k)^+$, $\sum_k \mathrm{Im}(u_k)^-$ où l'on a posé $x^+ = \max(x,0)$ et $x^- = \max(-x,0)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Inégalité triangulaire.	Si la séries $\sum_k u_k$ est absolument convergente, alors $\left\lvert \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right\rvert \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \lvert u_k\rvert$.
Pour tout complexe z, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente ; elle est donc convergente.	Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Une permutation des u_k ne modifie pas la propriété de convergence absolue, ni la somme d'une série absolument convergente.	Résultat admis.
Si $(u_n)_n$ est une suite complexe et $(v_n)_n$ est une suite de réels positifs telles que $u_n = O(v_n)$, alors la convergence de $\sum_n v_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum_n u_n$, donc aussi sa convergence.	

Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est positive.
Exemples d'utilisation de la formule de sommation par parties pour ramener l'étude de la convergence d'une série non absolument convergente à celle d'une série absolument convergente.	Formule de sommation par parties : $(a_0-a_1)b_1+(a_1-a_2)b_2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)b_n = a_0b_1-a_1(b_1-b_2)-\cdots-a_{n-1}(b_{n-1}-b_n)-a_nb_n$.
Développement décimal d'un nombre réel. Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel.	Pour tout réel x strictement positif, il existe une suite (a_n) à valeurs dans $\{0,1,\ldots,9\}$ telle que $x=\lfloor x\rfloor+\sum_{n=1}^{\infty}a_n10^{-n}$, où $\lfloor x\rfloor$ est la partie entière de x ; la suite des décimales (a_n) est uniquement déterminée si x n'est pas décimal. Développement décimal propre d'un nombre décimal.
Exemple de recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.	Pour trouver une valeur approchée de la somme d'une série convergente, il peut être utile d'encadrer son reste ; pour cela, on pourra exploiter la comparaison d'une série à une intégrale, le résultat concernant le reste d'une série alternée, …

3.11 Fonctions de deux variables

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en deuxème année, est de familiariser les élèves avec les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, les arcs paramétrés plans et les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique de ces objets. Le point de vue est donc essentiellement pratique. La notion de continuité d'une fonction est introduite mais son étude n'est pas un objectif du programme ; toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

3.11.1 Fonctions d'une variable rélle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. L'étude de ces fonctions consolide et prolonge celle des fonctions réelles de la variable réelle ; elle permet de préciser les notions de tangente, de vitesse instantanée et d'accélération, et d'illustrer les développements limités et le calcul asymptotique.

Ces notions ayant déjà été abordées pour les fonctions rélles, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats sans démonstrations pour gagner du temps ; le point de vue est essentiellement pratique.

Dérivabilité en un point, dérivabilité à droite, à gauche. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.	On utilisera les fonctions coordonnées pour l'étude de la dérivabilité d'une telle fonction. La dérivée de f se note f' ou Df ou $\dfrac{df}{dx}$. Interprétation cinématique et graphique de la dérivée, vitesse instantanée.
Combinaison linéeaire de fonctions dérivables, linéarité de la dérivation.	Pour f et g dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, $(\lambda.f+g)'=\lambda.f'+g'$.
Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $L\circ f$, où L est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.	Pour f dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, $(\mathrm{L}\circ f)'=L\circ f'$.
Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $B(f,g): t\longmapsto B(f(t),g(t))$, où B est une application bilinéaire sur de $\mathbb{R}^2$; cas du produit scalaire canonique et du carré de la norme associée.	Expressions des dérivées des fonctions $t\longmapsto (f(t)\vert g(t))$ et $t\longmapsto \Vert f(t)\Vert^2$, où $(\ \vert\ )$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\Vert\ \Vert$ la norme associée, f et g étant des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$, où φ est une fonction réelle de variable réelle et f fonction d'une variable rélle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.	$(f\circ\varphi)'=\varphi'.(f'\circ\varphi)$.
Définition d'une application n fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, d'une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.	La dérivée n-ième d'une fonction f se note $f^{(n)}$ ou $D^n f$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$. Interprétation cinématique de la dérivée seconde, accélération.
Opérations algébriques sur les applications n fois dérivable, de classe C^n.	Espace vectoriel $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R}^2)$ (resp. $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}^2)$) des applications n fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) de I dans $\mathbb{R}^2$.
Dérivée n-ième d'une application de la forme $B(f,g): t\longmapsto B(f(t),g(t))$, où B est une application bilinéaire sur de $\mathbb{R}^2$; expression de la dérivée n-ième de $B(f,g)$: formule de Leibniz.	Si f et g sont n fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) alors $B(f,g)$ l'est aussi et on a : $$\big(B(f,g)\big)^{(n)}(t)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}B\big(f^{(p)}(t),g^{(n-p)}(t)\big),\ t\in I.$$
La composée $f\circ\varphi$ d'une application $f: I\to\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et d'une application φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J. Développement limité à l'ordre $n\in\mathbb{N}$ au voisinage d'un point ; unicité, opérations sur les développements limités. Existence d'un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$: formule de Taylor-Young.	

3.11.2 Notions sur les arcs paramétrés plans

L'étude des arcs paramétrés dans $\mathbb{R}^2$ met en application les notions vues dans la section précédente ; elle est menée notamment pour les besoins des autres disciples scientifiques enseignées en CPGE. Il est attendu qu'à l'issue de ce paragraphe, les élèves puissent mener, sur des exemples simples, l'étude d'un arc *paramétré plan.*

Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, dans $\mathbb{R}^2$; arc simple, support de l'arc (ou courbe associée).	On appelle chemin ou arc paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ une application γ de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$; un tel chemin est dit simple si γ est injective ; le support de l'arc est l'image $\gamma(I)$ de l'arc γ (ou trajectoire du mouvement γ.
Paramètre ou point régulié, arc régulier ; paramètre ou point singulier. Point birégulier. Tangente en un point associé à un paramètre régulier ; normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.	Interprétation cinématique : mouvement d'un point mobile dans le plan, vitesse, accélération.
Étude locale : allure d'un arc paramétré en un point birégulier ; étude analogue en un point régulier ou singulier.	Dans cette étude on met en évidence l'utilisation des développements limités et du calcul asymptotique ; on décrit les allures possibles d'une courbe en un point régulier ou singulier à partir d'exemples.
Exemples simples d'arcs paramétrés plans.	La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme. Les tracés pourront être réalisés à l'aide de l'outil informatique Python.

3.11.3 Fonctions de deux variables

Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique, notée $\\| \\|$. Ouverts de $\mathbb{R}^2$; exemples et propriétés.	Boule ouverte, fermé ; reprsésentation graphique.
Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Représentation graphique d'une fonction réelle de deux variables par une surface. La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel.

Dérivées partielles

Dérivées partielles en un point (x_0, y_0) d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.	Notations $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.	Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Dérivée de f au point (x_0, y_0) selon un vecteur non nul v.	Notations $D_v f(x_0, y_0)$, $D_v f$.

Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$: $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \circ(\|(h,k)\|)$.

On mettra en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation du terme

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x,y)$.

Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Notation $\nabla f(x_0, y_0)$.

Expression de la dérivée de f au point (x_0, y_0) selon un vecteur non nul v à l'aide de son gradient en (x_0, y_0).

$D_v f(x_0, y_0) = (\nabla f(x_0, y_0)|v)$.

Expression du développement limité à l'aide du gradient : $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \big(\nabla f(x_0, y_0)|(h,k)\big) + \circ(\|(h,k)\|)$.

Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale (il pointe la direction selon laquelle la variation de f est maximale, dite direction de la plus grande pente de f).

Dérivées partielles et composées

Règle de la chaîne (chain rule) : les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $g : t \longmapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Interprétation comme dérivée de f le long de l'arc $\gamma : t \longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \big(\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t)\big).$$

En particulier, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de la fonction $(u,v) \longmapsto f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\big)$.

Extrémums

Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.

Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.

Exemples d'étude de points critiques.

3.12 Dénombrement

Dans cette section, il s'agit d'une brève initiation aux techniques élémentaires de la combinatoire ; l'objectif est de consolider les acquis du secondaire. On introduit sans formalisation excessive la notion de cardinal et on peut admettre sans démonstration les propriétés les plus intuitives.

L'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si, et seulement si, elle est injective, si, et seulement si, elle est surjective.	
Cardinal de la réunion disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, cardinal de leur différence. Cardinal du complémentaire d'un ensemble fini. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstrations combinatoires des formules de PASCAL et du binôme.

3.13 Probabilité sur un univers fini

L'objectif de cette première approche est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficultés techniques majeures. Les situations et les concepts utilisés sont nécessairement simples, ne faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires.

Dans ce cadre, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis de la classe terminale du secondaire qualifiant, et de mettre en place les concepts probabilistes de base en restreingnant l'étude à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

Cette section a pour objectifs de :

- *revoir et consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers ;*
- *donner des outils permettant de modéliser et d'aborder, sur des exemples simples, l'étude des situations concrètes où le hasard intervient ;*
- *présenter les premières notions relatives aux variables aléatoires finies.*

Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des élèves.

Cette partie s'appuie sur la section consacrée au dénombrement et elle a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Elle se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines. On pourra faire travailler les élèves sur des marches aléatoires ou des chaînes de Markov *en temps fini, sur des permutations aléatoires (loi uniforme sur S_n), des graphes aléatoires, des inégalités de concentration etc.*

L'utilisation de l'outil informatique est fortement recommandée pour illustrer les situations probabilistes, pour simuler des variables aléatoires et expérimenter sur des problèmes réels correctement modélisés.

3.13.1 Espace probabilisable fini

Expérience aléatoire ; issues (ou résultats observables) d'une expérience aléatoire.	Proposer des situations simples et concrètes où le hasard intervient, proposer une modélisation mathématique.
L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers et noté Ω. Dans toute la section, Ω est un ensemble fini non vide et on appelle événement tout sous-ensemble de Ω. L'ensemble des issues est Ω, l'ensemble des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$; le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle espace probabilisable.	Un événement est à priori une assertion dont la véracité dépend du résultat de l'expérience. Les issues (ou aléas) qui la rendent vraie forment un sous ensemble de Ω, qu'on peut identifier à l'événement.
Opérations sur les événements : événement contraire $\overline{A}$, événement A et B, événement A ou B, événement certain, événement impossible.	Lien avec les connecteurs logiques : le contraire d'un événement est au niveau logique sa négation et au niveau ensembliste son complémentaire. La conjonction d'événements correspond au connecteur logique « et » ainsi qu'à l'opération ensembliste $\cap$. Pour la disjonction c'est « ou » et $\cup$.
Des événements sont dits incompatibles quand ils ne peuvent se réaliser simultanément.	Pour deux événements A et B, cela signifie que $A \cap B = \emptyset$. Pour une famille de plus de 2 événements, distinguer « incompatibles » de « incompatibles deux à deux ».
Système complet d'événements : famille de sous ensembles deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω.	Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est une partie finie de $\mathbb{N}$, est un système complet d'événements si elle vérifie les deux conditions suivantes : $\begin{cases} \forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \\ \bigcup_{i\in I} A_i = \Omega. \end{cases}$

3.13.2 Espace probabilisé fini

Une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ (avec Ω fini) est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0,1]$ qui est additive et vérifie $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

La probabilité d'un événement A est le taux de chance de voir A se réaliser.
L'additivité signifie : pour tous A et B incompatibles de $P(\Omega)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
On en déduit que $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ pour toute famille $A_1, \ldots, A_n$ d'événements incompatibles deux à deux.

Une probabilité est déterminée par la famille $(\mathbb{P}(\{w\}))_{w\in\Omega}$, famille finie de réels positifs ayant pour somme 1. On a $\mathbb{P}(A) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(\{a\})$.

Cas de l'équiprobabilité.

Formule du crible de Poincaré.

Pour la formule de Poincaré, on peut se limiter au cas de deux ou trois événements.

3.13.3 Probabilité conditionnelle, indépendance

On tâchera de donner de nombreux exemples d'utilisation des formules de ce paragraphe.

Si B est un événement de probabilité $\mathbb{P}(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.

Illustrer cette notion par des situations de la vie courante.
La notation $\mathbb{P}(A|B)$ est utilisée parfois à la place de $\mathbb{P}_B(A)$.

L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Formule des probabilités composées.

Si $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$, alors
$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathbb{P}_{\cap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)$.

Formule des probabilités totales : si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B on a $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i)$.

Éliminant les A_i de probabilité 0, c'est aussi $\sum_i \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$.

Formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_i \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$$

$A_1, \ldots, A_n$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et on suppose $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Indépendance de deux événements.

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et$B$ s'écrit $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Cette notion est relative à la probabilité.

Indépendance mutuelle d'événements.
Si n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits (mutuellement) indépendants si, pour toute partie J de $[\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\cap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$.
Noter que l'indépendance des A_j implique l'indépendance deux à deux et que la récproque est fausse.

3.13.4 Variables aléatoires réelles

On introduit ici la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Ces variables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie les démonstrations des formules.

Contenus	Capacités & commentaires
Notion de variable aléatoire.	
On appelle variable aléatoire réelle toute application X de Ω vers $\mathbb{R}$.	Par abus, on écrit $\{X \in H\}$ ou $(X \in H)$ ou $[X \in H]$ à la place de $X^{-1}(H) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in H\}$. On adoptera aussi les notations habituelles telles que $[X = x]$, $[X \leqslant x]$ ou $(X = x)$, $(X \leqslant x)$ ou $\{X = x\}$, $\{X \leqslant x\}$.
Système complet associé à une variable aléatoire.	
Loi $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X. La donnée de $X(\Omega)$ et des probabilités correspondantes constitue la loi de X dans le cas fini.	$\mathbb{P}_X$ est la probabilité sur $\big(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega))\big)$ définie par $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{X \in A\})$; elle est déterminée par la donnée des $\mathbb{P}(\{X = x\})$, pour tout x élément de $X(\Omega)$.
Fonction de répartition F_X associée à la variable aléatoire X, définie par $F_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(\{X \leq x\})$. Propriétés d'une fonction de répartition pour Ω fini.	C'est une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$. Les sauts de cette fonction caractérisent l'image $X(\Omega)$ ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(\{X = x\})$ pour $x \in X(\Omega)$. La fonction de répartition caractérise la loi.
Somme de deux variables aléatoires. Variable aléatoire $Y = f(X)$, composée d'une variable aléatoire réelle X par une fonction f, définie sur un domaine contenant $X(\Omega)$.	On écrit $f(X)$ au lieu de $f \circ X$ et on se limitera à des cas simples, tels que $f(x) = ax+b$, $f(x) = x^2$, ...

Espérance et variance d'une variable aléatoire

Contenus	Capacités & commentaires
L'espérance de X est $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(\{X = x\}). \qquad (*)$$	C'est une moyenne pondérés des valeurs de X. On a aussi : $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\})$. $\quad (**)$
Propriétés de $\mathbb{E}$: positivité, linéarité, croissance.	$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$. Utiliser $(**)$ pour les démonstrations.
Théorème de transfert : espérance de $f(X)$. Cas d'une transformation affine : $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.	$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(\{X = x\}) = \sum_{\omega \in \Omega} f\big(X(\omega)\big)\,\mathbb{P}(\{\omega\})$.
Espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée.	On note $\widetilde{X}$ la variable centrée $X - \mathbb{E}(X)$.

La variance de X est $V(X) = \mathbb{E}((X-m)^2)$ où $m = \mathbb{E}(X)$. L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.	Formule de Kœnig-Huygens : $$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$
Une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance 1 est dite centrée réduite.	On note X^* la variable aléatoire centrée réduite $\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ lorsque $\sigma(X) \neq 0$.
Transformation affine	$V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Variables aléatoires de lois usuelles

Loi certaine.	
Loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0,1]$. Espérance, variance. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Interprétation : épreuve aléatoire à deux issues, succès avec probabilité p vs échec avec probabilité $q = 1-p$.
Loi binomiale de paramètres n, p, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Espérance, variance.	Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Interprétation : nombre de succès lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli. On fera le lien avec la formule du binôme de Newton et les propriétés des coefficients binomiaux.
Loi uniforme sur un segment d'entiers $[\![m,n]\!]$. Espérance, variance.	Application, à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Table des matières