Concours National Commun
Épreuve de Mathématiques I
Session 2021 - Filière MP

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP.
L'usage de tout matériel électronique, y compris La calculatrice, est interdit
Durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. n convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énonce, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Exercice

(Noté 4 points sur 20)

Soit n un entier naturel, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^n \mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, $f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est une intégrale convergente.

3. Par la suite. on pose pour tout entier naturel n.

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \text{ et an admet que } I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

a) Calculer I_1.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$$

c) Montrer que pour tout entier naturel k, $I_{2k+1} = \dfrac{k!}{2}$.

d) Montrer que pour tout entier naturel k, $I_{2k+1} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!}\sqrt{\pi}$.

Problème

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$,

Partie 1
Développement asymptotique de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$

1. a) Montrer que $(u_n - u_{n+1}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

b) En déduire que $\sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n+1})$ est une série convergente.

c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ ta limite.

d) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

e) En déduire que $0 \leq \gamma \leq 1$.

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - \gamma$.

a) Vérifier que $\displaystyle\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.

b) En déduire que $\displaystyle v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

c) Conclure que $\displaystyle H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n ; $\displaystyle w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.

a) Donner un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.

b) Vérifier que $\displaystyle\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$ puis que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

c) Conclure que $\displaystyle H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note $m_n = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid H_k \geq n\}$ et on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Justifier l'existence de m_n.

b) Etablir que $\exp(n - \gamma - \varepsilon_{m_n}) \leq m_n < 1 + \exp(n - \gamma - \varepsilon_{m_n - 1})$

c) En déduire un équivalent de m_n.

d) Conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{m_{n+1}}{m_n} = \mathrm{e}$.

Partie 2

Étude de deux exemples de séries de fonctions

1. On considère la fonction réelle ζ définie sur $]1, +\infty[$ par $\displaystyle\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $]1, +\infty[$ les fonctions réelles φ_n et ψ_n par ,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}dt \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x de $]0, +\infty[$.

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \psi_n(x)$$

b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\varphi_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

On note ainsi, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\displaystyle\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n(x)$.

c) Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$.

d) On considère la fonction K définie sur $]1,+\infty[$ par $K(x)=\zeta(x)+\dfrac{1}{1-x}$.

i) Montrer que pour tout rel x de $]1,+\infty[$, $K(x)=\varphi(x)$.

ii) En déduire que la fonction K admet une limite finie quand x tend vers 1 à droite.

iii) En déduire que $\zeta(x)\sim\dfrac{1}{x-1}$au voisinage de 1 à droite.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par.

$$f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n^x}$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On définit ainsi, la fonction f sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b) La convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est-elle uniforme sur $]0,+\infty[$? Justifier votre réponse.

c) Montrer que pour tout réel strictement positif a, la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$, où f_n' désigne la dérivée de la fonction f_n.

d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x de $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n^x}$$

4. **a)** Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x de $]1,+\infty[$,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^x}=\frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x}$$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout reel x de $]1,+\infty[$,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x}=\frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x}$$

c) En déduire que pour tout rel x de $]1,+\infty[$, $f(x)=\left(2^{1-x}-1\right)\zeta(x)$

5. **a)** Déterminer le développement limite a l'ordre 2 de $\left(2^{1-x}-1\right)$. lorsque x tend vers 1 à droite.

b) En déduire le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$, lorsque x tend vers 1 à droite.

c) Déterminer les valeurs de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$.

Partie 3

Calcul d'une intégrale

On se propose de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(-\ln u)\mathrm{e}^{-u}du$.
On pose pour tout entier naturel non nul n et pour

$$I_{n,k}=\int_0^n \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^k du \text{ et. } I_n=I_{n,n}$$

1. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et k,

$$I_{n,k}=I_{n,k-1}+\int_0^n\left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1}du$$

2. En déduire que pour tout entier naturel non nuls n et tout entier naturel k,

$$\frac{k+1}{k} I_{n,k} = I_{n,k-1} - \frac{n}{k(k+1)}$$

3. On pose pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k, $J_{n,k} = (k+1)I_{n,k}$.

a) Déterminer pour tous entiers naturels non nuls n et k, une relation entre $J_{n,k}$ et $J_{n,k-1}$.

b) En déduire pour tout entier naturel non nul n, I_n en fonction de n et u_n.

4. **a)** Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel u dans $[0, n]$,

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-u}$$

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n (-\ln u)\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = \int_0^{+\infty} (-\ln u)\mathrm{e}^{-u} du.$

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (-\ln u)\mathrm{e}^{-u} du.$

Partie 4

Application a la loi de Gumbel

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \exp\left(-t - \mathrm{e}^{-t}\right)$.

1. **a)** Montre que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et donner sa valeur, (on pourra utiliser ha fonction $t \mapsto \exp\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)$)

b) Justifier que g est une densité d'une variable aléatoire qu'on notera X. La loi suivie pat X est appelée loi de Gumbel.

c) Déterminer F_X la fonction de répartition de X.

2. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$et déterminer sa valeur.

3. Soit n un entier supérieur ou égal a 2. On considère les variables aléatoires $X_1, X_2 \ldots . X_n$ indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre

$\lambda, (\lambda > 0)$ si elle admet pour densité la fonction θ définie par $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On pose $M_n = \max\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$, $G_n = M_n - \ln(n)$. On note F_{M_n}la fonction de répartition de la variable aléatoire M_n et F_{G_n}celle de la variable aléatoire G_n

a) Déterminer F_{X_1}la fonction de répartition de X_1.

b) Déterminer la fonction F_{M_n}et en déduire la fonction F_{G_n}.

4. Montrer que la suite $(M_n - \ln n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers X.

FIN DE L'ÉPREUVE