Concours National Commun
Épreuve de Mathématiques II
Session 2021 - Filière MP

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP.
L'usage de tout matériel électronique, y compris La calculatrice, est interdit
Durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. n convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énonce, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par.

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & 2-a \\ 1-a & 2a-1 & 1-a \\ 1-a & a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Posons $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ la famille de vecteurs de E définie par $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2' = e_2 + e_3 \\ e_3' = e_1 - e_3 \end{cases}$

- **a)** Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
- **b)** Vérifier que e_1', e_2' et e_3' sont des vecteurs propres de f_a.
- **c)** Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
- **d)** Prouver que la matrice M_a est diagonalisable.
- **e)** Donner une matrice diagonale notée D_a telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.

2. On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

- **a)** Établir que $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = M_{a_0} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, dont on précisera la valeur de a_0.
- **b)** On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, ainsi $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$, et on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
  Vérifier que $Y'(t) = D_{a_0}Y(t)$.

c) En posant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, déterminer les fonctions y_1, y_2 et y_3.

d) En déduire la solution générale du système différentiel (S).

e) Déterminer la solution du système différentiel (S) vérifiant $x(0) = 0, y(0) = 1$ et $z(0) = 2$.

Problème

Pour n un entier supérieur ou égal a 1 , on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées réelles de taille n, et par $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des réels, on note $\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $t_1, \ldots, t_n$, dans cet ordre.
Pour A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite une racine carrée de A si $R^2 = A$.
On note $\mathcal{R}_n(A)$ l'ensemble des racines carrée s de A, c'est-a-dire,

$$\mathcal{R}_n(A) = \left\{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / R^2 = A\right\}$$

On désigne par $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.
On dit qu'une matrice M de $S_n(\mathbb{R})$ est positive si pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t XMX \geq 0$.
On notera l'ensemble des matrices symétriques réelles positives par $S_n^+(\mathbb{R})$.
L'objectif du problème est de déterminer les racines carrées de matrices réelles particulières, et présenter un cas d'une matrice complexe.

Partie 1

Cas où A est une matrice possédant n valeurs propres distinctes

Soit n un entier supérieur ou égal a 2. On considère A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. On pose $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **a)** Justifier l'existence d'une matrice P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

b) Montrer que R est une racine carrée de A si, et seulement si, la matrice $P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

2. Soit Δ une racine carrée de la matrice D.

a) Montrer que $\Delta D = D\Delta$.

b) En déduire que Δ est une matrice diagonale.

c) Si on pose $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, déterminer pour tout entier $i, 1 \leq i \leq n,\ \delta_i^2$ en fonction de λ_i.

3. Déterminer $\mathcal{R}_n(A)$ dans le cas où A admet au moins une valeur propre strictement négative.

4. On suppose que les valeurs propres de A sont toutes positives ou nulles.

a) Déterminer les racines carrées de la matrice D.

b) En déduire les racines carrées de A en fonction de la matrice P et $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$.

c) Déterminer le nombre des racines carrées de la matrice A.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathcal{R}_3(A)$.

Partie 2

Cas où A =diag$(\lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \lambda_r I_{n_r})$

1. Soit R une racine carrée de I_n.

a) Montrer que R est diagonalisable.

b) Montrer que $\mathcal{R}_n(I_n) = \left\{P\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) P^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\right\}$.

c) En déduire pour λ un réel strictement positif, $\mathcal{R}_n(\lambda I_n)$.

2. Soit r un entier supérieur ou égal à 2, $n_1, \ldots, n_r$ des entiers naturels non nuls tels que, $n_1 + \cdots + n_r = n$ et soient $\lambda_1 \ldots . . \lambda_r$ des réels strictement positifs, distincts deux à deux.

On considère la matrice diagonale par blocs $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_n \end{pmatrix}$, où pour tout i de $[\![1, r]\!]$, I_{n_i} désigne la matrice diagonale de taille n_i d'éléments diagonaux tous égaux à 1 .

La matrice A peut être notée A =diag$(\lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \lambda_r I_{n_r})$

a) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec A est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$, où pour tout i de $[\![1, r]\!]$, A_i est une matrice de taille n_i.

b) Déterminer $\mathcal{R}_n(A)$.

3. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par $N(M) = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |m_{ij}|$, pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

a) Pour tout entier naturel q, on considère la matrice $S_q = \begin{pmatrix} -1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer la matrice S_q^2 et en déduire que $\mathcal{R}_2(I_2)$ n'est pas une partie bornée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) $\mathcal{R}_n(I_n)$ est-elle une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$? Justifiez votre réponse.

Partie 3

Cas où A est une matrice nilpotente

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice de nilpotence $p, (0 < p \leq n)$. On suppose qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

1. **a)** Déterminer B^{2p} et $B^{2(p-1)}$.

b) Déterminer les expressions possibles du polynôme minimal de B.

c) En déduire que $p \leq \frac{n+1}{2}$.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que $P^2(A) = I_n + A$ si, et seulement si, $P^2 - X - 1$ est divisible par X^p.

b) Soit Q_p le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\sqrt{1+x} = Q_p(x) + o\left(x^{p-1}\right)$ au voisinage de 0.
Montrer que $Q_p(A)$ est une racine carrée de $I_n + A$

3. **a)** Montrer que pour tout réel $\alpha, \mathcal{R}_n(\alpha A + I_n)$ est non vide.

b) Montrer que pour tout réel strictement positif $\beta, \mathcal{R}_n\left(A+\beta I_n\right)$ est non vide.

4. On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer une solution de l'équation matricielle $X^2 = H$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie 4

Cas où A est une matrice carrée symétrique réelle positive

1. Montrer qu'une matrice symétrique réelle est positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives.

2. Soit A une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$.

a) Justifier l'existence de deux matrices, P orthogonale et D diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $A = PDP^{-1}$

b) En déduire qu'il existe une matrice S de $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A$.

3. Soit A une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$. Dans cette question, on va montrer l'unicité de la racine carrée de A dans $S_n^+(\mathbb{R})$.

Considérons donc S_1 et S_2 deux matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S_1^2 = S_2^2 = A$.

Soient $P_1.P_2$ de $GL_n(\mathbb{R})$ et D_1, D_2 deux matrices diagonales telles que,

$$S_1 = P_1 D_1 P_1^{-1} \text{ et } S_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$$

a) On pose $P = P_2^{-1} P_1$. Montrer que $PD_1^2 = D_2^2 P$.

b) En déduire que $PD_1 = D_2 P$, puis que $S_1 = S_2$.

Partie 5

Étude d'un cas où A est une matrice complexe

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes et pour M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Sp(M)$ le spectre de M et pour z un nombre complexe, $\mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de z.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $Sp(A) \cap \mathbb{R}^- = \varnothing$. On se propose de montrer qu'il existe une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que,

$$Sp(X) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\} \text{ et } X^2 = A$$

1. oit z un élément de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$.

Montrer qu'il existe un unique complexe y tel que $\mathrm{Re}(y) > 0$ et $y^2 = z$.

2. Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que pour tout i de $[\![1, n]\!], t_{i,i} \notin \mathbb{R}^-$

Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que pour tout i de $[\![1, n]\!]$,$\mathrm{Re}(x_{i,i}) > 0$ et $X^2 = T$. (On pourra utiliser une récurrence sur n).

3. Conclure que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $Sp(A) \cap \mathbb{R}^- = \varnothing$, il existe une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Sp(X) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $X^2 = A$.

FIN DE L'ÉPREUVE