

CNC - Corrigé de Mathématiques I - Filière MP

Session 2022

Par M.TARQI

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées¹.

•••••

Exercice

Calcul d'intégrales

0.1 Étude des racines du polynôme P_λ

0.1.1 D'après la relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme $z_1 + z_2 = -2\lambda$ et $z_1 z_2 = 1$.

0.1.2 Comme $z_1 z_2 = 1$, alors $z_2 = \frac{1}{z_1} = e^{-i\theta}$. Dans ce cas $2\lambda = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, donc $\lambda = \cos \theta$ ce qui est absurde puisque $\lambda \notin [-1, 1]$.

0.1.3 0 n'est pas une racine de P_λ , donc $|z_1| > 0$. Si $|z_1| > 1$, alors $|z_2| \geq |z_1| > 1$ ce qui donne $|z_1 z_2| > 1$. Mais ceci est impossible puisque $z_1 z_2 = 1$. Donc, compte tenu de la question 0.1.2, nécessairement $|z_1| < 1$.

On ne peut pas avoir $|z_2| \leq 1$, sinon $z_1 z_2$ serait différent de 1. En conclusion, $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$.

0.2 On a $P_\lambda = (X - z_1)(X - z_2)$, donc $\frac{1}{P_\lambda} = \frac{\alpha}{X - z_1} + \frac{\beta}{X - z_2}$ avec $\alpha = \frac{1}{z_1 - z_2}$ et $\beta = \frac{1}{z_2 - z_1}$. D'où :

$$\frac{1}{P_\lambda} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{X - z_1} - \frac{1}{X - z_2} \right).$$

0.3 Développement de la fonction F_λ en série trigonométrique

0.3.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda + \cos x} = \frac{2}{2\lambda + e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{2e^{ix}}{2\lambda e^{ix} + e^{2ix} + 1} = \frac{2e^{ix}}{P_\lambda(e^{ix})}.$$

0.3.2 D'après la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P_\lambda}$, on obtient :

$$F_\lambda(x) = \frac{2e^{ix}}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{e^{ix} - z_1} - \frac{1}{e^{ix} - z_2} \right) = \frac{2}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{1 - z_1 e^{-ix}} - \frac{1}{1 - z_2 e^{-ix}} \right)$$

et comme $z_1 z_2 = 1$, alors :

$$F_\lambda(x) = \frac{2}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{1 - z_1 e^{-ix}} + \frac{z_1 e^{ix}}{1 - z_1 e^{ix}} \right).$$

1. medtarqi@yahoo.fr

0.3.1 On a $|z_1 \cos(nx)| \leq |z_1|^n$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |z_1|^n$ converge (série géométrique de raison $|z_1| < 1$),

donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} z_1^n \cos(nx)$ converge absolument, donc elle converge. D'autre part, on sait que

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et puisque $|z_1| < 1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-ix} z_1)^n = \frac{1}{1 - e^{-ix} z_1}$, de même, $\sum_{n=0}^{\infty} (e^{ix} z_1)^n = \frac{1}{1 - e^{ix} z_1}$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= \frac{2}{z_1 - z_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-ix} z_1)^n + z_1 e^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{ix} z_1)^n \right) \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-ix} z_1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (e^{ix} z_1)^n \right) \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} z_1^n (e^{inx} + e^{-inx}) \right) \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z_1^n \cos(nx) \right) \end{aligned}$$

0.4 Application au calcul d'intégrales

0.4.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|w_n(x)| \leq |z_1|^n$. Cette inégalité montre que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

0.4.2 D'après ce qui précède, pour tout $t \in [0, \pi]$, on a :

$$\frac{\cos(pt)}{\lambda + \cos t} = \cos(pt) F_\lambda(t) = \frac{2}{z_1 - z_2} \left(\cos(pt) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nt) \cos(pt) \right)$$

Cette dernière série converge normalement (car $t \mapsto \cos(pt)$ est bornée) et donc uniformément sur $[0, \pi]$, on peut donc l'intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^\pi \frac{\cos(pt)}{\lambda + \cos t} dt = \frac{2}{z_1 - z_2} \left(\int_0^\pi \cos(pt) dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \cos(nt) \cos(pt) dt \right).$$

En utilisant maintenant les formules

$$\int_0^\pi \cos nt \cos pt dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(n+p)t + \cos(n-p)t) dt = 0, \quad n \neq p$$

et

$$\int_0^\pi \cos^2 pt dt = \int_0^1 \frac{1 + \cos(2pt)}{2} dt = \frac{\pi}{2},$$

on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{1}{\lambda + \cos t} dt = \frac{2\pi}{z_1 - z_2}$$

et pour $p \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{\cos pt}{\lambda + \cos t} dt = \frac{4z_1^p}{z_1 - z_2} \int_0^\pi \cos^2 pt dt = \frac{4z_1^p}{z_1 - z_2} \frac{\pi}{2} = \frac{2z_1^p \pi}{z_1 - z_2}.$$

0.5 • Si $\lambda = 2$, alors $z_1 = \sqrt{3} - 2$ et $z_2 = \sqrt{3} + 2$. On obtient par la formule précédente

$$\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t} dt = \frac{(\sqrt{3} - 2)^n}{\sqrt{3}} \pi.$$

• Si $\lambda = \cosh a$, alors $z_1 = e^{-a}$ et $z_2 = e^a$. On obtient donc

$$\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{\cos t + \cosh a} dt = \frac{2e^{na}\pi}{e^{-a} - e^a} = -\frac{e^{na}\pi}{\sinh a}.$$

Problème

Étude d'une série entière

Première partie :

Quelques résultats préliminaires

1.1 Une inégalité utile

1.1.1 La fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, donc on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale sur l'intervalle $[0, t]$ où $t \in [0, 1]$. On a :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)ds = t\varphi'(0) + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)ds$$

1.1.2 Il suffit de remplacer t par 1 dans la formule précédente.

1.1.3 Appliquons la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\min(s, t) - st)\varphi''(t)ds &= \int_0^t (\min(s, t) - st)\varphi''(t)ds + \int_t^1 (\min(s, t) - st)\varphi''(t)ds \\ &= \int_0^t (s - st)\varphi''(t)ds + \int_t^1 (t - st)\varphi''(t)ds. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^t (s - st)\varphi''(t)ds &= (1-t) \int_0^t s\varphi''(s)ds \\ &= (1-t) \left([s\varphi'(s)]_0^t - \int_0^t \varphi'(s)ds \right) \\ &= (1-t) [t\varphi'(t) - \varphi(t)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_t^1 (t-st)\varphi''(t)ds &= t \int_t^1 (1-s)\varphi''(s)ds \\
 &= t \left([(1-s)\varphi'(s)]_t^1 + \int_t^1 \varphi'(s)ds \right) \\
 &= -t \left[-(1-t)t\varphi'(t) + \varphi(t) \right].
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(t)ds &= (1-t) [t\varphi'(t) - \varphi(t)] - t \left[-(1-t)t\varphi'(t) + \varphi(t) \right] \\
 &= -\varphi(t).
 \end{aligned}$$

1.1.4 Pour $s \in [0, 1]$ fixé, on pose $h(t) = \min(s, t) - st$. On a :

$$h(t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{si } 0 \leq t \leq s \\ s(1-t) & \text{si } s < t \leq 1 \end{cases}$$

Cette fonction h est positive sur $[0, 1]$, croît sur $[0, s]$ et décroît sur $[s, 1]$, donc $0 \leq h(t) \leq h(s) = s - s^2$. La fonction $s \mapsto s - s^2$ admet un maximum en $\frac{1}{2}$ qui égal à $\frac{1}{4}$. D'où :

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2, \quad 0 \leq \min(s, t) - st \leq \frac{1}{4}.$$

L'inégalité de la question 1.1.3 montre que $\varphi(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi, par inégalité triangulaire des intégrales :

$$0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{4} \int_0^1 -\varphi''(s)ds = \frac{1}{4} (\varphi'(0) - \varphi'(1)).$$

1.2 Étude de la convergence d'une intégrale et d'une série numérique

1.2.1 La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$ est continue sur $[2, +\infty[$, de plus, pour $x \geq 2$, on a :

$$\int_2^x \frac{dt}{t \ln^2 t} = - \left[\frac{1}{\ln t} \right]_2^x = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}$$

Cette quantité admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}$ converge et sa valeur vaut $\frac{1}{\ln 2}$.

1.2.2 La fonction f étant croissante sur $[2, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}$ et la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$ sont de même nature, comme elle s'agit d'une intégrale convergente alors la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$ converge.

1.3 Formule de binôme généralisée

1.3.1 Il est clair que f_α est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et que $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, donc f_α solution de l'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0$.

1.3.2 (i) Pour tout $x \in] -r, r[$, on a $\psi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. D'où :

$$\begin{aligned}
 (1+x)\psi'(x) - \alpha\psi(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n - \alpha) a_n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n - \alpha) a_n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} + (n - \alpha) a_n) x^n
 \end{aligned}$$

Ensuite, par unicité des coefficients d'une série entière, $\forall x \in] -r, r[$, $(1+x)\psi'(x) - \alpha\psi(x) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} + (n - \alpha)a_n = 0$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
 (n+1)a_{n+1} + (n - \alpha)a_n &= 0 \Leftrightarrow a_n = \frac{\alpha - (n-1)}{n} a_{n-1} \\
 \Leftrightarrow a_n &= \frac{\alpha - (n-1)}{n} \times \frac{\alpha - (n-2)}{n-1} \times \dots \times \frac{\alpha}{1} a_0 \\
 \Leftrightarrow a_n &= \binom{\alpha}{n} a_0.
 \end{aligned}$$

(iii) Puisque $\alpha \notin \mathbb{N}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et pour $n > \alpha$, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n - \alpha}{n+1}$. Cette expression tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et d'après la règle de d'Alembert, $\rho = 1$.

1.3.3 Si la fonction $(1+x)^\alpha$ est développable en série entière, les coefficients de cette série sont nécessairement donnés par la relation $a_n = \binom{\alpha}{n}$, et inversement, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ admet un rayon de convergence non nul $\rho = 1$. Sur l'intervalle de convergence, la somme de cette série est solution de l'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0$ et prend, pour $x = 0$, la valeur 1, cette somme, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, est $(1+x)^\alpha$. On peut donc écrire :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Deuxième partie

Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série entière en question

2.1 Pour tout $t \in [0, 1]$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $-k \leq t - k \leq 1 - k$ et donc $\left| \prod_{k=0}^{n-1} (t - k) \right| \leq n!$, d'où

$$\left| \binom{t}{n} \right| \leq 1.$$

2.2 L'inégalité de la question précédente, montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq \int_0^1 \left| \binom{t}{n} \right| dt \leq 1$, donc par comparaison la rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ est au moins égal à 1, donc $R_1 \geq 1$.

2.3

2.3.1 Pour $x \in]-1, 1[$, on a $\forall t \in [0, 1]$, $|u_n(t)| = \left| \binom{t}{n} \right| |x|^n \leq |x|^n$. Donc on peut conclure que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0, 1]$.

2.3.2 D'après la question précédente, on peut intégrer terme à terme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ sur $[0, 1]$, dont la somme est $t \mapsto (1+x)^t$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \int_0^1 (1+x)^t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^1 \binom{t}{n} dt \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\int_0^1 (1+x)^t dt = \int_0^1 e^{t \ln(1+x)} dt = \left[\frac{e^{t \ln(1+x)}}{\ln(1+x)} \right]_0^1 = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

2.4

2.4.1 Si $x \in]0, 2[$, $x-1 \in]-1, 1[$ et donc $f(x-1) = \frac{x-1}{\ln x}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x f(x-1) = -1$ et donc

$$f(x-1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{-1}{\ln x}.$$

2.4.2 Si on suppose $R_1 > 1$, alors f serait bien définie $[-1, 1]$ et en particulier en -1 . Mais l'équivalence de la question précédente montre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\ln x} = f(-1)$ (limite finie) ce qui est absurde puisque

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\ln x} = +\infty$. Donc nécessairement $R_1 \leq 1$, mais le résultat de la question 2.3.2 montre que $R_1 \geq 1$. En conclusion $R_1 = 1$.

Troisième partie

Étude du comportement de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence

3.1 Étude de la suite de fonctions $(h_n)_{n \geq 2}$

3.1.1 Pour $n \geq 2$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n v_k(t) &= \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{t}{k} \right) - t \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \\
&= h_n(t) - t \ln n - t \left(\sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln k) \right) \\
&= h_n(t) - t \ln n - t (\ln 1 - \ln n) \\
&= h_n(t)
\end{aligned}$$

3.1.2 La fonction v_n vérifie les mêmes hypothèses que la fonction φ de la section 1.1, donc on peut utiliser l'inégalité de la question 1.1.4 :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq v_n(t) \leq \frac{v'_n(0) - v'_n(1)}{4} = \frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4n}.$$

3.1.3 Pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq v_n(t) \leq \alpha_n$ où $\alpha_n = \frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4n} \sim \frac{1}{4n^2}$. Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n$

converge, et par conséquent la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

3.1.4 D'après la question 3.1.3 la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge normalement sur $[0, 1]$, donc elle converge uni-

formément sur $[0, 1]$, ceci est équivalent à la convergence uniforme de la suite de fonctions $(h_n)_{n \geq 2}$ sur $[0, 1]$.

Les h_n sont continues sur $[0, 1]$ et la convergence uniforme conserve la continuité, donc h est continue sur $[0, 1]$.

3.2 Recherche d'un équivalent de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3.2.1 Par définition, on a :

$$b_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1) \dots (t-n+1) dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_0^1 t(1-t) \dots (n-1-t) dt = (-1)^{n-1} |b_n|$$

puisque $t(1-t) \dots (n-1-t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

3.2.2 On a :

$$\begin{aligned}
(n+1)!|b_{n+1}| &= \int_0^1 t(1-t) \prod_{k=2}^n (k-t) dt \\
&= \int_0^1 t(1-t) e^{\ln \prod_{k=2}^n (k-t)} dt \\
&= \int_0^1 t(1-t) e^{\sum_{k=2}^n \ln(k-t)} dt \\
&= \int_0^1 t(1-t) e^{\sum_{k=2}^n \ln k + \ln(1-\frac{t}{k})} dt \\
&= n! \int_0^1 t(1-t) e^{\sum_{k=2}^n \ln(1-\frac{t}{k})} dt \\
&= n! \int_0^1 t(1-t) e^{h_n(t) - t \ln n} dt
\end{aligned}$$

D'où $(n+1)|b_{n+1}| = \int_0^1 t(1-t) e^{-t \ln n} e^{h_n(t)} dt.$

3.2.3 $(v_n)_{n \geq 2}$ est une suite à terme positifs, donc $(h_n)_{n \geq 2}$ aussi, donc sa somme partielle reste inférieure ou égale $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, c'est-à-dire $\forall t \in [0, 1], h_n(t) \leq h(t)$. D'autre part, l'inégalité de la question 3.1.2

montre que $h(t) - h_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k(t) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{4(k-1)} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{4n}.$

3.2.4 L'inégalité précédente s'écrit :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \frac{-1}{4n} + h(t) \leq h_n(t) \leq h(t),$$

donc, en multipliant par la fonction positive $t \mapsto t(1-t)$, on obtient l'encadrement demandé :

$$e^{\frac{-1}{4n}} \int_0^1 t(1-t) e^{-t \ln n} e^{h(t)} dt \leq (n+1)|b_{n+1}| \leq \int_0^1 t(1-t) e^{-t \ln n} e^{h(t)} dt.$$

3.2.5 Il suffit d'utiliser le changement de variable $t = \frac{s}{\ln n}$.

(i) h étant continue sur l'intervalle $[0, 1]$, donc g est continue sur $[0, 1]$ et aussi sur $]1, +\infty[$. De plus $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$, donc g est continue sur $[0, +\infty[$.

(ii) Pour $s \geq 0$, on pose $f_n(s) = s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right)$. Cette suite de fonctions converge simplement vers $s \mapsto s e^{-s}$ sur $[0, +\infty[$, de plus la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}$ par un certain $M > 0$ puisqu'elle nulle sur $]1, +\infty[$; donc

$$\forall s \geq 0, \quad \forall n \geq 2, \quad |f_n(s)| \leq M s e^{-s}.$$

Donc le théorème de convergence dominé s'applique, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds = \int_0^{+\infty} s e^{-s} ds = [-e^{-s}]_0^{+\infty} = 1.$$

(iii) D'après la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\ln n} s e^{-s} \left(1 - \frac{s}{\ln n}\right) e^{h\left(\frac{s}{\ln n}\right)} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} s e^{-s} g\left(\frac{s}{\ln n}\right) ds = 1$$

En utilisant l'encadrement de la question 3.2.4, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln^2(n+1) |b_{n+1}| = 1$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1. \text{ Donc } |b_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln^2 n} \text{ et comme } b_n = (-1)^{n-1} |b_n|, \text{ donc}$$

$$b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n}.$$

3.3 Retour à l'étude de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence

3.3.1 Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $|b_n x^n| \leq |b_n|$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n|$ converge d'après l'équivalence $|b_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln^2 n}$ et le résultat de la question 1.2.2. Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

3.3.2 D'après la question 2.3.2, $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$.

3.3.3 Le résultat de la question 3.3.1, montre que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$, donc sa somme f est une fonction continue sur $[-1, 1]$, en particulier en -1 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\ln(1+x)} = 0.$$

• • • • •