

CNC - Corrigé de Mathématiques II - Filière MP

Session 2022

Par M.TARQI

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées¹.

•••••

Exercice

Construction d'une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

0.1 Structure de H

0.1.1 Il est clair que l'application ψ est linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, de plus $\varphi(1, 0, \dots, 0) = 1 \neq 0$. Donc il s'agit bien d'une forme linéaire non nulle.

0.1.2 On remarque que $H = \ker \psi$, donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément H le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et par conséquent $\dim H = n - 1$.

0.2 On vérifie facilement que $\psi(v_k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc les vecteurs v_k sont des vecteurs de H .

Soit maintenant $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k v_k = 0$, donc:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k - \sum_{k=2}^n \lambda_{k-1} e_k = \lambda_1 e_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) e_k - \lambda_{n-1} e_n = 0.$$

Comme la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre, alors $\lambda_1 = \lambda_{n-1} = 0$ et $\forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$, $\lambda_k - \lambda_{k-1} = 0$, ce qui donne finalement $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

Comme le sous-espace H est de dimension $n - 1$, la famille $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ est alors une base de H .

0.3 Construction d'une base orthogonale de H

0.3.1 Soit $(j, k) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2$, on a:

$$(v_j | v_k) = (e_j - e_{j+1} | e_k - e_{k+1}) = (e_j | e_k) - (e_j | e_{k+1}) - (e_{j+1} | e_k) + (e_{j+1} | e_{k+1}).$$

- Si $k = j$, alors $j \neq k+1$ et $k \neq j+1$, donc $(v_j | v_k) = 2$.
- Si $k \notin \{j-1, j, j+1\}$, alors $(v_j | v_k) = 0$.
- Si $k \in \{j-1, j, j+1\}$, on trouve $(v_j | v_k) = -1$.

0.3.2 Formules de cours

0.3.3 Détermination de ε_k pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$

¹medtarqi@yahoo.fr

(i) Soit $k \in \{2, \dots, n-1\}$ fixé. Pour tout $l \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, on a :

$$0 = (\varepsilon_k | v_l) = (v_k | v_l) - \sum_{j=1}^{k-1} (v_j | v_l) \alpha_j$$

Ceci est équivalent au système $A_k X = B_k$ où $A_k = ((v_j | v_l))_{1 \leq j, l \leq k-1}$, $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$ et

$$B_k = \begin{pmatrix} (v_1 | v_k) \\ \vdots \\ (v_{k-1} | v_k) \end{pmatrix}.$$

(ii) D'après les calculs de la question [0.3.1], on obtient

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) On remarque que $x_2 = 2x_1$ et la deuxième équation donne $x_3 = 2x_2 - x_1 = 4x_1 - x_1 = 3x_1$. Montrons donc par récurrence que $x_i = ix_1$ pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, c'est trivialement vérifié pour $i = 1$. Supposons que $x_i = ix_1$ pour $i \leq j$, on écrit alors la j -ème équation, on obtient :

$$-(j-1)x_1 + 2jx_1 - x_{j+1} = 0 \Leftrightarrow x_{j+1} = (j+1)x_1.$$

Ce qui démontre le résultat.

La dernière équation nous donne $-(k-2)x_1 + 2(k-1)x_1 = -1$, donc $x_1 = \frac{-1}{k}$. D'où la solution générale de $AX_k = B_k$:

$$X = \frac{-1}{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ k-2 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

En reportant dans l'expression de ε_k , on obtient:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{-1}{k} \right) v_j \\
&= e_k - e_{k+1} + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j(e_j - e_{j+1}) \\
&= e_k - e_{k+1} + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j e_j - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j e_{j+1} \\
&= e_k - e_{k+1} + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j e_j - \frac{1}{k} \sum_{j=2}^k (j-1) e_j \\
&= e_k - e_{k+1} + \frac{e_1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{j=2}^{k-1} (j-j+1) e_j - \frac{k-1}{k} e_k \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e_j - e_{k+1} \\
&= \left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, -1, \dots, 0 \right)
\end{aligned}$$

0.4 La famille $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|}, \dots, \frac{\varepsilon_{n-1}}{\|\varepsilon_{n-1}\|} \right)$ avec $\|\varepsilon_k\|^2 = \underbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^2}}_{k \text{ fois}} + 1 = \frac{1}{k} + 1$ est une base orthonormée de H .

Problème

Étude des morphismes de $\mathbb{C}$ -algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Première partie:

Résultats préliminaires sur les matrices C_n et D_n

1.1 Étude des matrices C_3 et D_3

$$1.1.1 \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

$$1.1.2 \quad \text{On a } C_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$D_3^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & j^3 & 0 \\ 0 & 0 & (j^2)^3 \end{pmatrix} = I_3 \quad (j \text{ est une racine 3-ème de l'unité}).$$

$$D_3 C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ j & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_3 D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & j^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } D_3 C_3 = j C_3 D_3.$$

1.1.3 Soient α, β et γ des scalaires tels que $\alpha I_3 + \beta D_3 = \gamma D_3^2 = 0$, on obtient donc le système:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta j + \gamma j^2 = 0 \\ \alpha + \beta j^2 + \gamma j^4 = 0 \end{cases}.$$

C'est un système de Vandermonde, puisque la matrice associée s'écrit: $V(1, j, j^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix}$ qui est inversible, donc nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et par conséquent la famille (I_3, D_3, D_3^2) est libre.

Si F_3 désigne l'espace vectoriel de matrices diagonales, alors on sait que $F_3 = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{33})$ où $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ désigne la base canonique $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donc $\dim F_3 = 3$ et comme $\text{Vect}(I_3, D_3, D_3^2)$ est sous-espace de F_3 , alors il y a égalité:

$$F_3 = \text{Vect}(I_3, D_3, D_3^2).$$

1.1.4

$$\begin{aligned} \chi_D(x) &= \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} \quad (\text{définition de } \chi_D) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ x-1 & x & 0 \\ x-1 & -1 & x \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3) \\ &= (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} \quad (\text{linéarité par rapport à la 1ère colonne}) \\ &= (x-1)(x^2 + 1 + x) \quad (\text{règle de Sarrus}) \\ &= x^3 - 1 \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique étant scindé à racines simples, donc C_3 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1.2 Étude préliminaire sur les matrices C_n et D_n dans le cas général

1.2.1 $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ sont exactement les racines n -ème de l'unité, donc $w^{kn} = 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc $D_n^n = \text{diag}(1^n, w^n, \dots, w^{n(n-1)}) = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = I_n$.

1.2.2 Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on confond matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé.

On a, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $D_n C_n(e_k) = D_n(e_{k+1}) = w^k e_{k+1}$ et $D_n C_n(e_n) = D_n(e_1) = e_1$.

D'autre part, $C_n D_n(e_k) = C_n(w^{k-1} e_k) = w^{k-1} e_{k+1}$ et $C_n D_n(e_n) = C_n(w^{n-1} e_n) = w^{n-1} e_1$.

Ainsi, $D_n C_n = w C_n D_n$.

1.2.3 Soit $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k D_n^k = 0$. On obtient un système de n équations:

$$\forall l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k w^{kl} = 0$$

C'est un système de Vandermonde, puisque la matrice associée s'écrit:

$$V(1, w, \dots, w^{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & \dots & w^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

qui est inversible, donc nécessairement $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ et par conséquent la famille $(I_n, D_n, \dots, D_n^{n-1})$ est libre. Si F_n désigne le sous-espace vectoriel de matrices diagonales, alors on sait que $F_n = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$ où $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ désigne la base canonique $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $\dim F_n = n$ et comme $\text{Vect}(I_n, D_n, \dots, D_n^{n-1}) \subset F_n$, alors il y a égalité:

$$F_n = \text{Vect}(I_n, D_n, \dots, D_n^{n-1}).$$

1.2.4 Par définition

$$\chi_{C_n}(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

Ajoutons à la première ligne la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^n x^{k-1} L_k$, où L_k représente la k -ème ligne.

On obtient alors

$$\chi_{C_n}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^n - 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} = x^n - 1$$

en développant par rapport à la première ligne.

χ_{C_n} étant scindé et à racines simples, on en déduit que C_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1.2.5 D'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_{C_n}(C_n) = 0$, c'est-à-dire $C_n^n = I_n$.

1.3 Une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ construite à partir des matrices C_n et n

1.3.1 $u(e_k)$ est le k -ème vecteur colonne de la matrice C_n , donc $u(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $u(e_n) = e_1$.

1.3.2 On a $u(e_1) = e_2$. Supposons $u^k(e_1) = e_{k+1}$, donc $u^{k+1}(e_1) = u(e_{k+1}) = e_{k+2}$ et ceci pour $k+1 \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. En particulier, $u^{n-1}(e_1) = e_n$ et donc $u^n(e_1) = u(e_n) = e_1$.

1.3.3 Si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ on a $u^n(e_k) = u^n(u^{k-1}(e_1)) = u^{k-1}(u^n(e_1)) = u^{k-1}(e_1) = e_k$, de plus on a $u^n(e_1) = e_1$. D'où $u^n = id_E$ et donc $C_n^n = I_n$.

1.3.4 Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k = 0$, en appliquant cette égalité à e_1 on

obtient $0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(e_1) = \alpha_0 e_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_{k+1}$ et comme la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre alors

$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Donc la famille $(id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre.

Supposons que le polynôme minimal est de degré inférieur ou égal à $n - 1$, alors il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0$ avec

les a_k sont tous non nuls. Mais ceci est en contradiction avec le fait que la famille $(id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre, donc nécessairement $\deg P \geq n$. Comme le polynôme caractéristique est de degré n et annulateur, alors le polynôme minimal vaut $X^n - 1$.

1.3.5 D'après [1.2.2] on a $vu = wuv$. D'autre part, la k -ème colonne de D_n est proportionnelle à e_k , plus précisément, $v(e_k) = w^{k-1}e_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1.3.6 Il s'agit d'une famille de n^2 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc il suffit de montrer que la famille est libre puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = n^2$. Soit donc $(\alpha_{kl})_{0 \leq k, l \leq n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{0 \leq k, l \leq n-1} \alpha_{kl} C_n^k D_n^l =$

0 ce qui équivaut à:

$$\sum_{1 \leq k, l \leq n-1} \alpha_{kl} u^k v^l = 0. \quad (1)$$

Calculons d'abord u^k pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour $k = 2$, on obtient:

$$\begin{aligned} u^2(e_1) &= u(e_2) = e_3 \\ u^2(e_2) &= u(e_3) = e_4 \\ &\vdots \\ u^2(e_{n-2}) &= u(e_{n-1}) = e_n \\ u^2(e_{n-1}) &= u(e_n) = e_1 \\ u^2(e_n) &= u(e_1) = e_2 \end{aligned}$$

Pour $k = 3$, on obtient:

$$\begin{aligned} u^3(e_1) &= u(e_3) = e_4 \\ u^3(e_2) &= u(e_4) = e_5 \\ &\vdots \\ u^3(e_{n-3}) &= u(e_{n-1}) = e_n \\ u^3(e_{n-2}) &= u(e_n) = e_1 \\ u^3(e_{n-1}) &= u(e_1) = e_2 \\ u^3(e_n) &= u(e_2) = e_3 \end{aligned}$$

Montrons donc par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, u^k est définie par:

$$\begin{cases} u^k(e_i) = e_{i+k} & \text{si } 1 \leq i \leq n-k \\ u^k(e_i) = e_{n-i-k} & \text{si } n-k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

On suppose la propriété vraie pour un certain $k \leq n - 2$, alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence et en appliquant u , on a:

- si $1 \leq i \leq n - k - 1$, $u^{k+1}(e_i) = u(e_{i+k}) = e_{i+k+1}$
- si $i = n - k$, $u^{k+1}(e_n - k) = u(e_n) = e_1$
- si $n - k + 1 \leq i \leq n$, $u^{k+1}(e_i) = u(e_{n-i-k+1}) = e_{n-i-k+1}$

On remarque que le cas $i = n - k$ peut être réintégré dans le premier cas, donc on a bien:

$$\begin{cases} u^{k+1}(e_i) = e_{i+k+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n - k - 1 \\ u^{k+1}(e_i) = e_{n-i-k+1} & \text{si } n - k \leq i \leq n \end{cases}.$$

La relation (1) entraîne $\sum_{1 \leq k, l \leq n} \alpha_{kl} u^k v^l(e_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, donc $\sum_{1 \leq k, l \leq n} \alpha_{kl} u^k w^{l(i-1)} e_i = 0$.

Or

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k, l \leq n-1} \alpha_{kl} w^{l(i-1)} u^k(e_i) &= \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{kl} w^{l(i-1)} u^k(e_i) + \sum_{k=n-i+1}^n \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{kl} w^{l(i-1)} u^k(e_i) \\ &= \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{kl} w^{l(i-1)} e_{k+i} + \sum_{k=n-i+1}^n \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{kl} w^{l(i-1)} e_{n-k-i} \end{aligned}$$

Comme les e_i sont libre alors $\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{kl} w^{l(i-1)}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On obtient donc un système qui s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \dots & w^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k0} \\ \alpha_{k1} \\ \alpha_{k2} \\ \vdots \\ \alpha_{k(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque les racines n -ème sont deux à deux distinctes, alors le déterminant de Vandemonde est non nul et donc le système est inversible, par conséquent 0 est l'unique solution, donc nécessairement $\alpha_{kl} = 0$ pour $l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comme k est quelconque alors, on peut déduire les α_{kl} sont tous nuls et par conséquent la famille $(u^k v^k)_{0 \leq k, l \leq n-1}$ est libre, donc il est de même de la famille $(C_n^k D_n^k)_{0 \leq k, l \leq n-1}$.

Deuxième partie

Une question de réduction

- 2.1 On a $f^n = f^{n-1} f = f f^{n-1} = Id_E$, donc f est inversible et $f^{-1} = f^{n-1}$. De même g est inversible et $g^{-1} = g^{n-1}$.
- 2.2 On remarque $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de f et g , donc comme on est dans $\mathbb{C}$, les endomorphismes f et g sont diagonalisables et ses valeurs propres sont des racines n -ème de l'unité.
- 2.3 **Étude des valeurs propres et des sous-espaces propres de l'endomorphisme f**
 - 2.3.1 On a $f(g(x_0)) = wg(f(x_0)) = wg(\lambda x_0) = w\lambda g(x_0)$. x_0 étant non nul et g inversible, donc $g(x_0) \neq 0$ et par conséquent on peut conclure que $w\lambda$ est une valeur propre de f .

- 2.3.2 On reprend le raisonnement précédent en remplaçant λ par $w\lambda$, on peut conclure que $w^2\lambda$ est une valeur propre de f . De proche en proche, on peut dire que les $w^k\lambda$, $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, sont des valeurs propres de f .
- 2.3.3 Puisque λ est une racine n -ème de l'unité, alors $\lambda \neq 0$ et on peut conclure que les valeurs propres $\lambda, w\lambda, \dots, w^{n-1}\lambda$ sont des deux distinctes, donc les valeurs propres de f sont exactement les racines n -ème de l'unité.
- 2.3.4 Dans ces conditions $\chi_f = X^n - 1$, donc les valeurs propres sont simples et par conséquent les sous-espaces propres sont des droites vectoriels.
- 2.4 **Une base de E , convenable pour les endomorphismes f et g**
- 2.4.1 Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a:

$$\begin{aligned} f(g^k(e)) &= wgf(g^{k-1}(e)) \\ &= w^2g^2f(g^{k-2}(e)) = \dots = w^{k-1}g^{k-1}f(g(e)) \\ &= w^{k-1}g^{k-1}(gf(e))w^{k-1}g^{k-1}(g(e)) \\ &= w^kg^k(e). \end{aligned}$$

- 2.4.2 D'après la question précédente, les vecteurs $e, g(e), \dots, g^{n-1}(e)$ sont bien des vecteurs propres (non nuls) de f . De plus le sous-espace propre associé à la valeur propre w^k est engendré par $g^k(e)$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Comme f est diagonalisable ces vecteurs engendrent E , donc ils forment une base de E .
- 2.4.3 Puisque $f(g^k(e)) = w^kg^k(e)$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = D_n$. D'autre part, $g(g^k(e)) = g^{k+1}(e)$, donc $\text{Mat}(g, \mathcal{B}) = C_n$.

Troisième partie

Application à la détermination des endomorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- 3.1 La propriété est vraie pour $p = 0$. Supposons qu'elle vraie à l'ordre p . Donc:

$$\Phi(M^{p+1}) = \Phi(M^p M) = \Phi(M^p)\Phi(M) = \Phi(M)^p\Phi(M) = \Phi(M)^{p+1},$$

et on conclut par le principe de récurrence.

- 3.2 Puisque $D_n^n = C_n^n = I_n$, alors $\Phi(D_n)^n = \Phi(D_n^n) = \Phi(I_n) = I_n$ et $\Phi(C_n)^n = \Phi(C_n^n) = \Phi(I_n) = I_n$. De même, $\Phi(D_n)\Phi(C_n) = \Phi(D_n C_n) = \Phi(wD_n C_n) = w\Phi(D_n C_n) = w\Phi(D_n)\Phi(C_n)$.

3.3

- 3.3.1 Les égalités matricielles de la question [3.2] se traduisent par les relations vectoriels:

$$f_1^n = g_1^n = \text{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \text{ et } f_1 g_1 = w g_1 f_1.$$

- 3.3.2 Ceci découle des résultats de la deuxième partie.

- 3.3.3 Soit P la matrice de passage de la base canonique de E à la base de vecteurs propres $\mathcal{B}$. D'après les formules de changement de bases, on a $\Phi(D_n) = P D_n P^{-1}$ et $\Phi(C_n) = P C_n P^{-1}$.

- 3.4 Soit $M = \sum_{0 \leq k, l \leq n-1} \alpha_{kl} C_n^k D_n^l$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ décomposée dans la base $(C_n^k D_n^l)_{0 \leq k, l \leq n-1}$

(d'après la partie préliminaire), alors on a:

$$\begin{aligned}
\Phi(M) &= \Phi \left(\sum_{1 \leq k, l \leq n} \alpha_{kl} C_n^k D_n^l \right) \\
&= \sum_{0 \leq k, l \leq n-1} \alpha_{kl} \Phi \left(C_n^k D_n^l \right) \quad (\Phi \text{ linéaire}) \\
&= \sum_{0 \leq k, l \leq n-1} \alpha_{kl} \Phi(C_n)^k \Phi(D_n)^l \quad (\Phi \text{ morphisme d'algèbre}) \\
&= \sum_{0 \leq k, l \leq n-1} \alpha_{kl} P C_n^k P^{-1} P D_n^l P^{-1} \quad \text{d'après la question [3.3.3]} \\
&= P \left(\sum_{0 \leq k, l \leq n-1} \alpha_{kl} C_n^k D_n^l \right) P^{-1} \\
&= P M P^{-1}
\end{aligned}$$

3.5 Il est clair que les applications $\Psi : M \mapsto P M P^{-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où P est inversible sont des applications linéaires, de plus $\Psi(I_n) = P I_n P^{-1} = I_n$ et $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\Psi(AB) = P A B P^{-1} = (P A P^{-1}) (P B P^{-1}) = \Psi(A) \Psi(B).$$

Donc les applications précédentes sont bien des morphismes de la $\mathbb{C}$ -algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

• • • • •