Épreuve de mathématiques I
Correction

Exercice

Un problème d'extremum

1. Quelques propriétés de la fonction F

(a) F est une fonction polynomiale de deux variables, donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On calcule les dérivées partielles de F :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x+y-3,\ \ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x+2y-6.$$

(b) Si (x,y) est un point critique de F, il vérifie donc le système

$$\begin{cases} 2x+y &= 3\\ x+2y &= 6\end{cases}$$

$(0,3)$ est donc le seul point critique de F.

2. Étude de la nature du point critique (x_0,y_0)

(a) On calcule les dérivées partielles secondes de F :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=2,\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=1,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=2.$$

(b) La matrice Hessienne de F au point $(0,3)$ est donnée par :

$$H=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

H est définie positive (ses valeurs propres sont strictement positives), donc F admet un minimum local au point $(0,3)$.

3. Étude approfondie de l'extremum en question

(a) On a $F(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y=u^2+u(v+3)+(v+3)^2-3u-6(v+3)=u^2+uv+v^2-9$.

(b) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$F(x,y)=u^2+uv+v^2-9=\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3v^2}{4}-9\geq F(0,3)$$

avec égalité si, et seulement si, $(x,y)=(0,3)$. Ainsi, F présente un minimum absolu strict au point $(0,3)$.

Problème

Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

Première partie
Expression intégrale des solutions de l'équation différentielles $\mathscr{L}_f$
Application au cas où f est 2π-périodique

1. D'après le cours Σ_0 est un espace vectoriel de dimension 2. L'équation différentielle $y''+y=0$ admet pour solutions, sur $\mathbb{R}$, la famille des fonctions définies par

$$x\mapsto \alpha\cos(x)+\beta\sin(x)$$

ou α et β appartiennent à $\mathbb{R}$.

2. (a) Les fonctions $t\mapsto f(t)\cos(t)$ et $t\mapsto f(t)\cos(t)$ sont continues sur I donc les fonctions φ_1 et φ_2 sont bien définies et dérivables sur I et $\forall x\in \mathrm{Im}$, on a :

$$\varphi_1'(x)=f(x)\cos(x)\ \text{ et }\ \varphi_2'(x)=f(x)\sin(x).$$

(b) Il suffit de remarquer que $\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$. En particulier, $\varphi_{f,x_0}(x_0) = 0$.

(c) D'après la question précédente et puisque les fonction $\sin, \cos, \varphi_1$ et φ_2 sont dérivables sur I, alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi'_{f,x_0}(x) &= \varphi'_1(x)\sin x + \varphi_1(x)\cos x - \varphi'_2(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x \\ &= f(x)\cos x \sin x - f(x)\sin x \cos + \varphi_1(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x \\ &= \varphi_1(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x. \end{aligned}$$

En particulier, $\varphi'_{f,x_0}(x_0) = 0$

(d) D'après l'expression de φ'_{f,x_0} on voit bien que φ'_{f,x_0} est dérivable sur I, c'est-à-dire φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I. De plus, $\forall x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi''_{f,x_0}(x) &= \varphi'_1(x)\cos x + \varphi_1(x)\sin x + \varphi'_2(x)\sin x + \varphi_2(x)\cos x \\ &= f(x)\cos^2 x - \varphi_1(x)\sin x + f(x)\sin^2 x + \varphi_2(x)\cos x \\ &= -\varphi_{f,x_0}(x) + f(x) \end{aligned}$$

(e) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy linéaire :

$$\mathscr{C}_{f,x_0} = \begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

admet une solution et une seule sur I, et comme φ_{f,x_0} solution de $(\mathscr{L}_f)$ et vérifie $\varphi_{f,x_0}(x_0) = \varphi'_{f,x_0}(x_0) = 0$, alors φ_{f,x_0} est l'unique solution de $\mathscr{C}_{f,x_0}$.

3. Expression intégrale des solutions de $(\mathscr{L}_f)$
La solution homogène de l'équation $y'' + y = f$ sur I est la forme $x \mapsto \alpha\cos x + \beta \sin x$. D'après la question 2, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$ est un solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$, donc la solution générale de $(\mathscr{L}_f)$ est de la forme :

$$x \mapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

où α et β sont des constantes réels.

4. Étude de la périodicité des solutions de $(\mathscr{L}_f)$ dans le cas où f est 2π-périodique

(a) i. On connait déjà les solutions de $(\mathscr{L}_f)$, donc si g est solution d'une telle équation, alors il existe des réels λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \lambda\cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t.$$

ii. g étant 2π-périodique, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x+2\pi) = g(x)$ ou encore $\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$ ce qui entraîne $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$.

iii. Puisque f est 2π-périodique, les primitives des fonctions $t \mapsto f(t)\sin(t)$ et $t \mapsto f(t)\cos(t)$ sont 2π-périodiques et par conséquent $\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{d}t = 0$.

(b) i. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale et la relation $\sin(x-t) = \sin x\cos t - \cos x \sin t$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t &= \sin x \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\mathrm{d}t - \cos x \int_0^{2\pi} f(t)\sin t\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

ii.

(c)

Deuxième partie
Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre
et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. Convergence d'intégrales

(a) Convergence de l'intégrale de DIRICHLET

i. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et vérifie $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leq \dfrac{2}{t^2}$ pour tout $t>0$, donc f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

ii. À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x>0$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{(1-\cos t)'}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

iii. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,1]$et se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

D'une part, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x = 1-\cos 1$. De plus, $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ existe. Il en résulte que la fonction $\displaystyle\lim_{x\longmapsto\infty}\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ existe, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

(b) La même méthode montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

2. Étude de solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ lorsque $I=]0,+\infty[$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

(a) Analyse :

i. D'après le première partie, il existe des constantes λ et μ tels que pour tout $x>0$, on a :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t\\ &= \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t\right)\sin x.\end{aligned}$$

ii. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\psi(2n\pi) = \lambda - \displaystyle\int_1^{2n\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ et $\psi\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \mu + \displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0}\psi(x)=0$ et les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ convergent, alors on obtient par passage à l'infini quand n tend vers l'infini :

$$0 = \lambda - \int_1^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\ \ 0 = \mu + \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t.$$

iii. En remplaçant les expressions de λ et μ dans l'expression de ψ, on obtient :

$$\forall x>0,\ \psi(x) = \left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\cos x - \left(\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t\right)\sin x = \int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\mathrm{d}t.$$

(b) Synthèse :

3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre

(a) Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $0 \leq \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge, il est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(b) $h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

(c) On va appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres. La fonction $(x,t)\mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+\times[0,+\infty[$. De plus, nous avons prouvé que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ et tout $t\geq 0$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2},$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(d) On peut remarquer que, pour tout $x \geq 0$ et tout $t \geq 0$, on a
$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}.$$
On en déduit, par intégration de l'inégalité, que
$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$
d'où $\lim_{x\to 0}(x) = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

(e) Posons $g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$. Alors, pour tous $x \geq 0$, la fonction g admet des dérivées partielles par rapport à x d'ordre 1 et 2 qui sont données par
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$
Ces dérivées partielles sont continues comme fonctions des deux variables x et t.
Pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (on peut majorer sa valeur absolue par e^{-xt} qui est intégrable). De plus, fixons $[a,b] \subset [0,+\infty[$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \geq 0$, on a
$$\left|t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq e^{-at}$$
et cette dernière fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on en déduit que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ avec
$$h''(x) = \int_0^{+\infty} t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(f) Pour tout $x \geq 0$, on a
$$h''(x) + h(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

(g) D'après la question 2. de cette partie, l'unique solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ qui vérifie $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ est la forme $x \mapsto \int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\mathrm{d}t$. D'où, par unicité,
$$\forall x > 0,\ \ h(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\mathrm{d}t \overset{t=x+s}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\sin s}{x+s}\mathrm{d}s.$$

4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet

(a) Soit $x > 0$, on a :
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\frac{x}{x+t}\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \left|\int_0^{1}\frac{\sin t}{t}\frac{x}{x+t}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\frac{x}{x+t}\mathrm{d}t\right| \\ &\leq x\int_0^{1}\frac{\sin t}{t}\frac{1}{x+t}\mathrm{d}t + x\left|\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t(x+t)}\mathrm{d}t\right| (\text{ car } \sin t \geq 0 \text{ si } t \in [0,1])\end{aligned}$$

(b) l'intervalle $[0,1]$, $\sin t \leq t$ et sur $[1,+\infty[$, $\left|\frac{\sin t}{t(x+t)}\right| \leq \frac{1}{t(x+t)} \leq \frac{1}{t^2}$ puisque $x >$. D'où, e, utilisant l'inégalité précédente :
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| &\leq x\int_0^{1}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}t}{x+t} + x\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}. \\ &\leq [x\ln(x+t)]_{t=0}^{t=1} + x\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &\leq x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\end{aligned}$$

(c) L'inégalité précédente s'écrit :

$$\forall x > 0, \quad \left| h(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \right| \leq x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ étant convergente, donc le terme à droite dans l'inégalité précédente tend vers 0 quand x tend vers 0, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$. Mais h est bien définie et continue en 0, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0) = \frac{\pi}{2}$, d'où, par unicité de la limite :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Troisième partie
Application à l'étude de la somme d'une série de fonctions

1. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{1}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq \alpha_n$ où $\alpha_n = \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum \alpha_n$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2$), alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $0 \leq nu_n(x) \leq \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2} = nu_n(a)$ et $nu_n(a) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc on peut conclure que la série $\sum nu_n$ converge normalement sur $[a, +8[$. Même raisonnement montre que la série $\sum n^2 u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

3. Quelques propriétés de la fonction u.

(a) Les u_n sont des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ et le convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$ (puisque la convergence est normale su le même intervalle), donc la fonction somme est continue sur $[0, +\infty[$.

(b) On peut utiliser le théorème d'encadrement, en effet, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{e^{-x}}{1+n^2} \leq \dfrac{e^{-x}}{n^2}$, d'où par sommation de ces inégalités :

$$\forall x > 0, \;\; 0 \leq u(x) \leq \frac{\pi^2 e^{-x}}{6} \quad \left(\text{ car } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \;\right).$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$.

(c) Fixons $a > 0$. Alors, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a

$$u_n'(x) = -nu_n(x) \quad \text{et} \quad u_n''(x) = n^2 \frac{e^{-nx}}{1+n^2} = n^2 u_n(x).$$

Or, les séries $\displaystyle\sum_n nu_n$ et $\displaystyle\sum_n n^2 u_n$ convergent normalement sur $[a, +\infty[$. Ceci prouve que u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, +\infty[$. Comme $a > 0$ est arbitraire, la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x]0, +\infty[, \quad u''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 e^{-nx}}{1+n^2}.$$

(d) Soit $x > 0$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} u''(x) + u(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-x}\right) \\ &= \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \text{(somme de termes d'une série géométrique de raison } e^{-x} \text{)} \end{aligned}$$

(e) La fonction u est solution de l'équation différentielle $y'' + y = f$ où $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ pour $x > 0$, de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$. Donc l'étude précédente, il existe des constantes α et β telles que :

$$\forall x > 0,\ \ u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_1^x \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \sin(x-t)\mathrm{d}t = \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{e^t - 1}\mathrm{d}t.$$

4. Une autre expression intégrale de la fonction u

(a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{e^t-1}$ est bien définie et continue sur $[a, +\infty[$, de plus elle est positive et vérifie $\dfrac{1}{e^t-1} \underset{+\infty}{=} 0\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{e^t-1}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.

(b) Les deux fonctions sont absolument intégrables sur $[a, +\infty[$, donc intégrables sur $[a, +\infty[$.

(c) Comme dans la question 3.(f) de la deuxième partie. Pour la deuxième égalité, il suffit de considérer le changement de variable $s = t - x$.

5. Posons $h(t) = \dfrac{\sin t}{e^t - 1}$. h est définie et continue par prolongement sur $[0, +\infty[$. De plus $|h(t)| \underset{+\infty}{=} \left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc h est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Pour $t > 0$, on écrit

$$\frac{1}{e^t-1} = e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)t} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}.$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin t e^{-t}\mathrm{d}t$$

Pour opérer l'intégration terme à terme, introduisons les fonctions h_n définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$h_n(t) = \sin t e^{-nt} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par les calculs qui précèdent, la série des fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} h_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est la fonction intégrée de notre étude.
Les fonctions h_n et la fonction somme h sont continues sur $]0, +\infty[$. Les fonctions h_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$ (par majoration).
Pour pouvoir exploiter le théorème d'intégration terme à terme, il reste à vérifier la convergence de la série de terme général

$$\int_0^{+\infty} |h_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |\sin t|e^{-nt}\mathrm{d}t.$$

Par l'inégalité $|\sin t| \leq t$, on écrit

$$\int_0^{+\infty} h_n(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} te^{-nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

(la dernière égalité s'obtient par une intégration par partie). La série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente et donc, par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer qu'il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues des fonctions h_n. Par le théorème d'intégration terme à terme, on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty} \sin t e^{-nt}\mathrm{d}t\right).$$

Les intégrales en second membre se calculent rapidement en transitant par les nombres complexes

$$\int_0^{+\infty} \sin t e^{-nt}\mathrm{d}t = \mathrm{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-(n-i)t)}\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{n-i}\right) = \frac{1}{1+n^2}$$

et l'on obtient la formule demandée.

• • • • • • • • •