CONCOURS NATIONAL COMMUN
Session 2024
Épreuve de Mathématique II

Un corrigé

Exercice

1. (a) On a :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3.$$

(b) L'égalité $PQ = 4I_3$ montre que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{4}Q$.

2. (a) On a :

$$Au = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = u.$$

Donc u est un vecteur propre de A et $\alpha = 1$ la valeur propre associée.

(b) De même, on a :

$$Av = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v \text{ et } Av = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2w.$$

Donc v et w sot des vecteurs propres de A associés à la valeur propre $\beta = 2$.

(c) Notons $E_1(A)$ et $E_2(A)$ les deux sous-espaces propres de A. On a $\mathbb{R}^3 = E_1(A) \oplus E_2(A)$, donc A est diagonalisable. Donc il est semblable à une matrice diagonale, plus précisément il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(1, 2, 2)$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = PDP^{-1}.$$

3. (a) La propriété est vrai pour $n = 0$ puisque $A^0 = PD^0P^{-1} = I_3$. Si on suppose $A^n = PD^nP^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $A^{n+1} = AA^n = \left(PDP^{-1}\right)\left(PD^nP^{-1}\right) = PD^{n+1}P^{-1}$. On conclut par le principe de récurrence.

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = (\operatorname{diag}(1, 2, 2))^n = \operatorname{diag}(1, 2^n, 2^n)$.

(c) $A^n = \dfrac{1}{4}PD^nQ = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2^n}{2} & \dfrac{1-2^n}{2} & \dfrac{-1+2^n}{2} \\ 1-2^n & 1 & -1+2^n \\ \dfrac{1-2^n}{2} & \dfrac{1-2^n}{2} & \dfrac{-1+32^n}{2} \end{pmatrix}.$

Problème

Partie 1 : Noyaux itérés

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $x \in N_k$ alors $f^k(x) = 0$ et donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$, donc $x \in N_{k-1}$ et par conséquent $N_k \subset N_{k+1}$.
Soit $y \in I_{k+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \in I_k$, donc $I_{k+1} \subset I_k$.
Ainsi la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. On a $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset ... \subset N_k \subset N_{k+1} \subset ...E$. Donc

$$0 = \dim N_0 \leq \dim N_1 \leq ... \leq \dim N_k \leq \dim N_{k+1} \leq ... \leq \dim E = n$$

ce qui montre que la suite $(\dim N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels croissante et bornée par $\dim E$, donc stationnaire.

3. D'après la question précédente, l'ensemble $\{ k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1} \}$ est non vide. $q = \min \{ k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1} \}$ répond à la question.

4. On a $I_{q+1} \subset I_q$ et par le théorème du rang, $\dim I_{q+1} = \dim E - \dim N_{q+1} = \dim E - \dim N_q = \dim I_q$, d'où $I_{q+1} = I_q$.

5. Par le théorème du rang, il suffit de montrer que $I_q \cap I_q = \{0\}$. Soit $y \in I_q \cap I_q$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f^q(x)$ et $f^q(y) = 0$, d'où $f^q(f^q(x) = f^{2q}(x) = 0$ ce qui implique $x \in \mathbb{N}_{2q} \subset N_q$ et $y = f^q(x) = 0$.

6. (a) Posons $d_k = \dim(I_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a $\begin{array}{cccc} \varphi_k : & I_k & \to & E \\ & x & \mapsto & \varphi_k(x) = f(x) \end{array}$. Par le théorème du rang, $d_k = \dim \mathrm{Im}(\varphi_k) + \dim \ker \varphi_k$. Mais $\mathrm{Im}\, \varphi_k = \varphi_k(I_k) = f(\mathrm{Im}\, f^k) = \mathrm{Im}\, f^{k+1}$, d'où :

$$d_k = d_{k+1} + \dim \ker \varphi_k.$$

Comme $\varphi_k = f_{|I_k}$ alors $\ker \varphi_k = \ker f \cap I_k$. Finalement, on obtient :

$$d_k - d_{k+1} = \dim\left(\ker f \cap I_k\right).$$

(b) D'après la question précédente, la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et comme $\dim(N_k) = \dim E - d_k$, alors la suite $(\dim(N_k))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

1. (a) L'application linéaire v est défini de $\mathrm{Im}(u^r)$ dans E par $v(x) = u^s(x)$. Donc

$$\mathrm{Im}(v) = v(\mathrm{Im}(u^r)) = u^s(\mathrm{Im}(u^r)) = \mathrm{Im}\, u^{r+s}.$$

(b) Soit $x \in E$ tel que $v(x) = 0$, alors $x \in \mathrm{Im}\, u^r$ et $u^s(x) = 0$, donc $x \in \ker u^s$. D'où $\ker v \subset \ker u^s$.

(c) Théorème du rang appliqué à v, donne $\dim \mathrm{Im}\, v + \dim \ker v = \dim \mathrm{Im}\, u^r$. Or $\ker v \subset \ker u^s$, alors

$$\dim \ker v \leq \dim \ker u^s.$$

D'où

$$\dim E - \dim \ker u^{s+r} + \dim \ker v = \dim E - \dim \ker u^r,$$

ce qui donne $\dim \ker v + \dim \ker u^r = \dim \ker u^{r+s}$ ou encore

$$\dim \ker u^{r+s} \leq \dim \ker u^r + \dim \ker u^s.$$

(d) Pour $i = 0$, $\ker u^0 = \ker Id_E = \{0\}$ et donc $\dim \ker u^0 = 0 \leq 0$, la propriété est donc vraie pour $i = 0$. l'inégalité de la question précédente permet de conclure par le principe de récurrence.

2. (a) Comme $u^n = 0$, alors $\dim \ker u^n = n$. Donc la suite $(\dim \ker u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être stationnaire avant le rang n, donc on a :

$$1 = \dim \ker u < \dim \ker u^2 < ... < \dim \ker u^n = 0.$$

Donc nécessairement $\dim \ker u^i = i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

(b) Comme $\dim \ker u^{n-1} = n - 1$, alors $u^{n-1} \neq 0$ et donc u est nilpotent d'indice n.

(c) Il existe $e \in E$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$. Soient $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(e) = 0$. En composant par u^{n-1} on obtient $\alpha_0 u^{n-1}(e) = 0$, donc $\alpha_0 = 0$. Si on suppose $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0$ et si on compose par u^{n-k-1}, on obtient $\alpha_k u^{n-1}(e) = 0$ et donc $\alpha_k = 0$. La famille $(e, u(e), ..., u^{n-1}(e))$ est donc libre et possède $n = \dim E$ éléments, donc c'est une base de E.

(d)

$$N = \mathbf{Mat}(u, \mathscr{B}_e) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Si U et V sont deux matrices nilpotentes alors elles sont semblables à la matrice N de la question précédente, donc par transitivité les deux sont semblables.

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

1. $(f-\lambda_k I)^{m_k}$ est un polynôme en f et donc commute avec f. On sait alors que $F_k = \ker(f-\lambda_k I)^{m_k}$ est stable par f.

2. Les polynômes $(X-\lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\ker(\chi_f(f)) = F_1 \oplus ... \oplus F_p.$$

Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$ et donc $\ker(\chi_f(f)) = E$. D'où,

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p.$$

3. (a) Puisque f laisse stable F_k, φ_k est bien un endomorphisme de F_k. Par définition de F_k, on a pour tout vecteur x élément de F_k, $(f-\varphi_k I)^{m_k}(x) = 0$ ou encore $\varphi_k^{m_k}(x) = 0$. D'où

$$\varphi_k^{m_k} = 0.$$

(b) Notons f_k la restriction de f à F_k (on a donc $f_k = \varphi_k Id_{F_k} + \varphi_k$). Puisque le polynôme $(X-\lambda_k)^{m_k}$ est annulateur de f_k, λ_k est l'unique valeur propre de f_k (f_k admettant au moins une valeur propre puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $F_k \neq \{0\}$). Par suite, le polynôme caractéristique de f_k est $(X-\lambda_k)^{\dim(F_k)}$. On sait alors que ce polynôme divise le polynôme caractéristique de f ce qui montre que $\dim(F_k) = m_k$.

Maintenant, si pour un entier $k \in [\![1,p]\!]$ on a $\dim(F_k) < m_k$, alors $\sum_{j=1}^{p} \dim(F_j) < \sum_{j=1}^{n} m_j = n$, ce qui contredit le fait que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$. Finalement,

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ \ \dim(E_k) = m_k.$$

(c) Montrons que $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$. Supposons par l'absurde que $\varphi^{m_k-1} = 0$ et considérons le polynôme $Q = (X-\lambda_k)^{m_k-1}\prod_{j\neq k}(X-\lambda_j)^{m_j}$ si $p = 2$ ou $Q = (X-\lambda_k)^{m_k-1} = (X-\lambda_1)^{n-1}$ si $p = 1$.

Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on a $Q(f_i) = 0$ (des polynômes en f commutent) et donc $Q(f) = 0$. Mais Q est un polynôme non nul de degré $(m_{k-1}) + \sum_{j\neq k} m_j = \sum_{j=1}^{p} m_j - 1 = n-1$. L'égalité $Q(f) = 0$ fournit alors une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de la famille $(I, f, f^2, ..., f^{n-1})$ ce qui contredit la liberté de cette famille. Donc $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$.

4. φ_k est donc un endomorphisme nilpotent de E_k, d'indice $m_k = \dim E_k$. D'après la partie 2, il existe une base $\mathscr{B}_k$ de E_k dans laquelle la matrice de φ_k est la matrice compagnon de format m_k

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou encore dans laquelle la matrice de f_k est

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 ... \cup \mathscr{B}_p$. Comme $E = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$ alors $\mathscr{B}$ est une base de E et la matrice de f dans cette base a la forme désirée.

Partie 4 : Cycles

1. (a) Pour prouver que deux endomorphismes sont égaux il suffit de le prouver pour les vecteurs d'une base de E.
Comme on peut extraire une base de la famille génératrice $f^i(x_0), i = 0, 1, ..., p-1$ il suffit pour montrer $f^p = I$ de montrer $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$ $f^p\left(f^i(x_0)\right) = f^i(x_0)$. Or $f^p\left(f^i(x_0)\right) = f^i\left(f^p(x_0)\right) = f^i(x_0)$ d'après l'hypothèse $f^p(x_0) = x_0$. D'où $f^p = I$.

(b) F_{x_0} est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ ($1 \in F_{x_0}$ car $x_0 \neq 0$) et majorée par n. Donc $\max F_{x_0} = \gamma$ existe.

(c) i. Par définition de γ, $(x_0, f(x_0), ..., f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre et $(x_0, f(x_0), ..., f^{\gamma-1}(x_0), f^{\gamma}(x_0))$ est lié. Il existe donc une combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{i=1}^{\gamma-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ avec la famille $(\lambda_i)_{i=0,1,...,\gamma} \neq (0)$. Si $\lambda_\gamma = 0$ on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{\gamma-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ et donc $\forall i, \lambda_i = 0$ (famille libre) : absurde donc $\lambda_\gamma \neq 0$ et $f^\gamma(x_0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} f^i(x_0)$.
Pour $k = \gamma$ on vient de montrer que $f^\gamma(x_0)$ est combinaison linéaire des $(x_0, f(x_0), ..., f^{\gamma-1}(x_0))$. Supposons alors $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{\gamma-1}(x_0))$, il existe donc des μ_i tels que $f^k(x_0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\gamma-1} \mu_i f^i(x_0)$.
Si on compose par f on a

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x_0) &= \sum_{i=0}^{\gamma-1} \mu_i f^{i+1}(x_0) && (1)\\ &= \sum_{i=1}^{\gamma-1} \mu_{i-1} f^i(x_0) + \mu_{\gamma-1} f^\gamma(x_0) && (2)\\ &= \sum_{i=1}^{\gamma-1} \mu_{i-1} f^i(x_0) + \mu_{\gamma-1}\left(\sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_\gamma} f^i(x_0)\right) && (3) \end{aligned}$$

Donc $f^{k+1} \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{\gamma-1}(x_0))$.
$\forall k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{\gamma-1}(x_0))$.

ii. Si $\gamma > n$ la famille ne peut pas être libre.
Si $\gamma < n$ on a d'après la question précédente et l'hypothèse que $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ engendre E le fait que $(x_0, f(x_0), ..., f^{\gamma-1}(x_0))$ engendre E, ce qui est absurde.
Donc nécessairement $\gamma = n$.

iii. $X^p - 1$ est un polynôme annulateur non nul de f à racines simples dans $\mathbb{C}$. Donc f est diagonalisable et donc l'ordre de multiplicité de chacune des ses valeurs propres est exactement la dimension de sous-espace propre associé. Notons $\mathscr{B}' = (x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ et A la matrice de f dans cette base, on a :

$$A = \mathbf{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque valeur propre de f, an a $\mathrm{rg}(A - \lambda I_p) \geq p - 1$, d'où $\dim\ker(A - \lambda I_p) = 1$, donc le nombre de valeur propre de f est n.

2. (a) D'après la question précédente $\mathscr{B}_{x_0}$ est une base de E.

(b)

$$G = \mathbf{Mat}_{\mathscr{B}_{x_0}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$GU_k = \begin{pmatrix} \overline{w}^{nk} \\ \overline{w}^{k} \\ \vdots \\ \overline{w}^{k(n-1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{w}^k} \begin{pmatrix} \overline{w}^{nk} \\ \overline{w}^{k} \\ \vdots \\ \overline{w}^{k(n-1)} \end{pmatrix} = w^k U_k.$$

Donc U_k est vecteur propre de G est $\alpha_k = w^k$ la valeur propre associée.

3. (a) Le coefficient ligne k, colonne l de la matrice $M\overline{M}$ vaut

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{w}^{kj} w^{jl} = \sum_{j=1}^{n} w^{-kj} w^{jl} = \sum_{j=1}^{n} \left(w^{(l-k)}\right)^j$$

Maintenant, $w^{l-k} = 1 \Leftrightarrow l - k \in n\mathbb{Z}$. Mais, puisque $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq n$, on a $-(n-1) \leq l - k \leq n - 1$. Mais alors, le seul multiple de n compris entre $-(n-1)$ et $n-1$ étant 0, $w^{l-k} = 1 \Leftrightarrow k = l$. On a donc deux cas :

• Premier cas. Si $k = l$,

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{w}^{kj} w^{jl} = n.$$

• Deuxième cas. Si $k \neq l$,

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{w}^{kj} w^{jl} = 0$$

Ainsi, le coefficient ligne k, colonne l de la matrice $M\overline{M}$ vaut $n\delta_{k,l}$. On en déduit que $M\overline{M} = nI_n$.

(b) D'après la question précédente M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{n}\overline{M}$$

4. (a) On vérifie facilement que $A = a_0 I_n + a_1 G + a_2 G^2 + ... + a_{n-1} G^{n-1} = P(C)$ où $P = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1}$. D'après les questions précédentes G a n valeurs propres deux à deux distinctes à savoir les w^k, $1 \leq k \leq n$, une base de vecteurs propres associée étant $(U_1, ..., U_n)$ et est donc diagonalisable. La matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de la famille $(U_1, ..., U_n)$ étant M, on a plus précisément $G = MDM^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(1, w, w^2, ..., w^{n-1})$. Mais alors,

$$H = P(G) = MP(D)M^{-1} = M\,\mathrm{diag}(P(1), P(w), P(w^2), ..., P(w^{n-1}))M^{-1}.$$

Ainsi, H est semblable à une matrice diagonale, donc est diagonalisable.

(b) D'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(H) = \left\{ P(1), P(w), P(w^2), ..., P(w^{n-1}) \right\}$ où $P = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1}$ et une base de vecteurs propres de A est $(U_1, U_2, ..., U_n)$.

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

1. Chaque matrice T de $\mathscr{T}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$T = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij}$$

où $(E_{ij})_{1 \leq i, \leq j \leq n}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'où :

$$\dim \mathscr{T} = 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Si N est une matrice nilpotente, alors $\chi_N = X^n$. Donc N est trigonalisable et semblable à une matrice $T \in \mathscr{T}$.

3. Comme $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, il suffit de montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{T} = \{0\}$. Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{T}$, alors $a_{ij} = a_{ji}$ et $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$, donc $A = 0$ et par conséquent $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{T}$.
4. D'après ce qui précède $F \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, en effet si $A \in F \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème spectral il existe une matrice orthogonale P et D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$ et donc $D^n = P^{-1}A^nP = 0$, donc $D = 0$ et par conséquent $A = 0$. Donc la somme $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + F$ est directe, puis $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \dim F \leq \dim \mathscr{M}_n(_R)$ ou encore

$$\dim F \leq n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

5. On a $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{T}) = 0$ et par la question précédente $\dim \mathscr{T} \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.