

Concours National Commun - Session 2011

Corrigé de l'épreuve d'analyse

Étude de la somme de la série de Fourier lacunaire quadratique : $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n^2 x}}{i\pi n^2}$

Corrigé par Mohamed TARQI¹

1^{ère} partie

Formule sommatoire de Poisson

1.1. D'après les hypothèses, il existe $M > 0$ et $A > 0$ tels que $|t| \geq A \implies |g(t)| \leq \frac{M}{t^2}$, ainsi les intégrales $\int_{-\infty}^{-A} |g(t)| dt$ et $\int_A^{+\infty} |g(t)| dt$ existent, il est de même de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(t)e^{-ixt}$ est absolument intégrable sur \mathbb{R} ($|e^{-ixt}| = 1$) et donc elle est intégrable sur \mathbb{R} .

1.2. Soit $t \in [-a, a]$ ($a > 0$). Il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ et supérieure à a tel que :

$$n \geq n_0 \implies |g_n(t)| \leq \frac{M}{(t + 2n\pi)^2} + \frac{M}{(t - 2n\pi)^2} = v_n(t).$$

Il est clair que v_n est paire et décroissante sur $[0, a]$ et donc pour tout $t \in [-a, a]$, $|v_n(t)| \leq v_n(0)$ et comme la série numérique $\sum v_n(0)$ est convergente, alors la série $\sum g_n$ est uniformément convergente sur tout $[-a, a]$ et donc sur tout segment de \mathbb{R} .

1.3.

1.3.1. Les applications g_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et on a :

$$g'_0(t) = g'(t), \quad g'_n(t) = g'(t + 2n\pi) + g'(t - 2n\pi) \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Donc comme la série $\sum g_n$, on montre que la série $\sum g'_n$ est uniformément convergente sur tout segment de \mathbb{R} , ceci permet de conclure par un théorème du cours que \tilde{g} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

1.3.2. Notons $S_n(t) = \sum_{p=-n}^n g(t + 2p\pi)$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(t + 2\pi) &= \sum_{p=-n}^n g(t + 2(p+1)\pi) \\ &= \sum_{p=-n+1}^{n+1} g(t + 2p\pi) \\ &= \sum_{p=-n+1}^{n-1} g(t + 2p\pi) + g(t + 2n\pi) + g(t + 2(n+1)\pi) \end{aligned}$$

Donc

$$S_n(t + 2\pi) = S_{n-1}(t) + g(t + 2n\pi) + g(t + 2(n-1)\pi).$$

Mais $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, alors l'égalité précédente entraîne, quand n tend vers l'infini,

$$\tilde{g}(t + 2\pi) = \tilde{g}(t)$$

¹Si vous avez des critiques ou des encouragements à formuler sur le contenu, n'hésitez pas à nous en faire part, et surtout n'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

donc \tilde{g} est 2π périodique.

La série définissant \tilde{g} peut être intégrée terme à terme sur $[0, 2\pi]$ grâce à la convergence uniforme et donc

$$\begin{aligned} c_k(\tilde{g}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(t) e^{-ikt} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-n}^n \int_0^{2\pi} g(t + 2p\pi) e^{-ikt} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-n}^n \int_{-2p\pi}^{2(p+1)\pi} g(u) e^{-iku} du, \quad u = t + 2p\pi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-2n\pi}^{2(n+1)\pi} g(u) e^{-iku} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-iku} du = \frac{1}{2\pi} \hat{g}(k). \end{aligned}$$

1.3.3. L'égalité $|g(2n\pi)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, montre que la famille $(g(2n\pi))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$(*) \quad \tilde{g}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=-n}^{p=n} g(2p\pi).$$

Puisque \tilde{g} est 2π périodique et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , alors, d'après le théorème de Dirichlet, la famille $(c_n(\tilde{g}))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et

$$(**) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) = c_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(g) e^{-inx}$$

et comme $\hat{g}(k) = 2\pi c_n(\tilde{g})$, alors la famille $(\hat{g}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

L'égalité $(**)$ entraîne pour $x = 0$, l'égalité $\tilde{g}(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n)$ et en tenant compte de la relation $(*)$, on obtient l'égalité demandée :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n).$$

2^{ème} partie

Application de la formule sommatoire de Poisson

2.1. Il est clair que la fonction h_α est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^2 h_\alpha(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} t^2 h'_\alpha(t) = 0$, donc les fonctions $t \mapsto t^2 h_\alpha(t)$ et $t \mapsto t^2 h'_\alpha(t)$ sont bornées à l'infini.

2.2. On a $\widehat{h}_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-ixt} dt$. On peut dériver la fonction sous signe intégrale, en effet,

- La fonction $f : (x, t) \mapsto e^{-t^2} e^{-ixt}$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) : (x, t) \mapsto -ite^{-t^2} e^{-ixt}$ qui est intégrable sur \mathbb{R} .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = | -itf(x, t) | \leq |t| e^{-t^2} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur \mathbb{R} .

Donc \widehat{h}_1 est dérivable sur \mathbb{R} et $\widehat{h}_1'(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} e^{-ixt} dt$ et une intégration par parties donne

$$\widehat{h}_1'(x) = -\frac{x}{2} \widehat{h}_1(x).$$

Ainsi \widehat{h}_1 est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{x}{2}y = 0$.

2.3. La solution générale de (1) s'écrit $y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$. Mais \widehat{h}_1 étant l'unique solution de (1) vérifiant $\widehat{h}_1(0) = \sqrt{\pi}$, donc $\widehat{h}_1(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

2.4. On a, grâce au changement de variable, $u = \alpha t$,

$$\widehat{h}_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-ix \frac{u}{\alpha}} \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \widehat{h}_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}.$$

2.5. Posons $\alpha = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}$, alors pour tout entier n , on a $\widehat{h}_\alpha(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}$ et $h_\alpha(2n\pi) = e^{-\pi n^2 a}$. La formule de Poisson appliquée à h_α , donne :

$$2\pi \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} h_\alpha(2n\pi) \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{h}_\alpha(n)$$

égalité qui s'écrit encore sous la forme demandée :

$$\sqrt{a} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 a} \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

3^{ème} partie

Un résultat général sur les fonctions holomorphes

3.1. Ω est un ouvert de \mathbb{C} comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$, par l'application continue $z \mapsto \text{Im}(z)$.

Soit a et b dans Ω , alors pour tout $t \in]0, 1[$, $\text{Im}((1-t)a + tb) = (1-t)\text{Im}(a) + t\text{Im}(b) > 0$, donc $(1-t)a + tb \in \Omega$ et donc $[a, b] \subset \Omega$. Ceci montre aussi que Ω est connexe par arcs de \mathbb{C} .

3.2. Soit $a \in \Omega$ fixé. Pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)a + tb \in \Omega$, et donc l'application $b \mapsto f((1-t)a + tb)$ est bien définie et continue sur Ω , donc l'application Φ_a est continue sur Ω comme produit de deux fonctions continues.

3.3. Soit $c \in \Omega$ tel que $\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z) dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z) dz = \int_{\gamma_{a,b}} \psi(z) dz$ alors cette relation s'écrit encore, après simplification, sous la forme

$$(\bar{a} - \bar{b})c - (a - b)\bar{c} = b\bar{a} - a\bar{b}$$

Donc $\text{Im}((\bar{a} - \bar{b})c) = \text{Im}(b\bar{a})$, donc $c \in \Omega$ décrit une droite parallèle à l'axe des x , où une demi-droite dans le cas contraire.

3.4.

3.4.1. La fonction $f = P + iQ$ étant holomorphe sur Ω , donc elle vérifie les conditions Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \end{cases}$$

pour tout $(x, y) \in \Omega^2$.

3.4.2 D'après Formule de Green-Riemann, on a :

$$\int_{\partial T^+} P dx - Q dy = \int \int_T \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

De même

$$\int_{\partial T^+} Qdx + Pdy = \int \int_T \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

D'autre part, $\int_{\partial T^+} f(z)dz = \int_{\partial T^+} Pdx - Qdy + i \int_{\partial T^+} Qdx + Pdy = 0$, or $\partial T^+ = \gamma_{a,c} + \gamma_{c,b} + \gamma_{b,a}$, donc l'égalité $\int_{\partial T^+} f(z)dz = 0$ est équivalent aussi à

$$\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz = - \int_{\gamma_{b,a}} f(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz.$$

3.4.3. Soit $c \in \Omega$ et $c \neq b$, alors $\Phi_a(c) - \Phi_a(b) = \int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz - \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz = - \int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz = \Phi_b(c)$ et donc

$$\frac{\Phi_a(c) - \Phi_a(b)}{c - b} = \Phi_b(c)$$

et comme Φ_b est continue en b , alors

$$\lim_{c \rightarrow b} \frac{\Phi_a(c) - \Phi_a(b)}{c - b} = \lim_{c \rightarrow b} \Phi_b(c) = \int_0^1 f((1-t)b + tb)dt = f(b).$$

Ceci montre que Φ_a est holomorphe sur Ω et que $\Phi'_a = f$.

3.4.4. Pour tout $r > 0$, on peut écrire :

$$\Phi(ir, c) - \Phi(ir, b) = \Phi(b, c)$$

et quand r tend vers 0^+ , on obtient l'égalité :

$$F(c) - F(b) = \Phi(b, c)$$

et comme précédemment,

$$\lim_{c \rightarrow b} \frac{F(c) - F(b)}{c - b} = \lim_{c \rightarrow b} \Phi_b(c) = f(b).$$

Ceci montre que F est holomorphe sur Ω et que $F' = f$ sur Ω .

4^{ème} partie Étude d'un exemple

4.1. La fonction f_λ apparaît comme composée et produit de fonctions holomorphes sur Ω , donc elle holomorphe sur Ω .

4.2. On a pour tout $z = \alpha + i\beta \in \Omega$,

$$|f_\lambda(z)| = |z^\lambda| \left| \exp\left(-\frac{i}{z}\right) \right| = |z|^\lambda \exp\left(\frac{-\beta}{|z|^2}\right) \leq |z|^\lambda.$$

Soit maintenant $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positives de limite nulle, on a :

$$J_{\lambda,b}(r_n) = \int_{\gamma_{ir_n,b}} f_\lambda(z)dz = (b - ir_n) \int_0^1 f_\lambda((1-t)ir_n + tb)dt$$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\lambda((1-t)ir_n + tb) = f_\lambda(tb)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_\lambda((1-t)ir_n + tb)| \leq |(1-t)ir_n + tb|^\lambda \leq \frac{|b|^\lambda}{t^{-\lambda}} = \varphi(t)$$

et comme $0 < -\lambda < 1$, alors φ est intégrable sur $]0, 1]$ et donc le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda,b}(r_n) = b \int_0^1 f_{\lambda}(tb) = t^{\lambda+1} \int_0^1 t^{\lambda} \exp\left(\frac{-i}{tb}\right) dt.$$

4.3.

4.3.1. D'après la 4^{ème} partie, F_{λ} est holomorphe sur Ω et $F'_{\lambda} = f_{\lambda}$. Donc G_{λ} est holomorphe sur Ω comme produit de fonctions holomorphes.

4.3.3. On a, pour tout $z \in \Omega$, en posant $t = \frac{1}{u}$:

$$F_{\lambda}(z) = z^{\lambda+1} \int_{]0,1]} t^{\lambda} \exp\left(\frac{-i}{tz}\right) dt = z^{\lambda+1} \int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{-iu}{z}\right) du.$$

D'où :

$$G_{\lambda}(z) = \frac{1}{z} \exp\left(\frac{i}{z}\right) \int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{-iu}{z}\right) du.$$

4.3.3 Une intégration parties donne :

$$\begin{aligned} G_{\lambda}(z) &= \frac{-i^2}{z} \int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{(1-u)i}{z}\right) du \\ &= i \left[u^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{(1-u)i}{z}\right) \right]_1^{+\infty} + i(\lambda+2) \int_1^{+\infty} u^{-\lambda-3} \exp\left(\frac{(1-u)i}{z}\right) du \\ &= i + i(\lambda+2) \int_1^{+\infty} u^{-\lambda-3} \exp\left(\frac{(1-u)i}{z}\right) du \end{aligned}$$

et comme $\left| \exp\left(\frac{(1-u)i}{z}\right) \right| \leq 1$, car $\text{Im}\left(\frac{1-u}{z}\right) < 0$, il vient alors

$$|G_{\lambda}(z)| \leq 1 + (\lambda+2) \int_1^{+\infty} u^{-\lambda-3} du = 2.$$

D'autre part on a, pour tout $z \in \Omega$, $F_{-1/2}(z) = z^{3/2} \exp\left(\frac{-i}{z}\right) G_{-1/2}(z)$ et donc $|F_{-1/2}| \leq 2|z|^{3/2}$ puisque $\left| \exp\left(\frac{-i}{z}\right) \right| \leq 1$.

5^{ème} partie

Démonstration de la propriété proposée

5.1. Posons $z = a + ib$, alors on a :

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = e^{-b\pi((n+1)^2 - n^2)},$$

- si $b > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = 0$ et dans ce cas la série $\sum u_n(z)$ converge ;
- si $b < 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = +\infty$ et la série $\sum u_n(z)$ diverge ;
- si $b = 0$, $|u_n(z)| = 1$ et donc $u_n(z)$ ne tend pas vers 0.

Conclusion, la série $\sum u_n(z)$ converge si et seulement si $z \in \Omega$.

5.2. Si $z \in \Omega$, alors $z + 1 \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n(z + 1) + u_n(z) = e^{i\pi n^2 z} (e^{i\pi n^2} + 1) = \begin{cases} 2u_p(4z), & \sin = 2p \\ 0, & \sin = 2p + 1 \end{cases},$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} u_p(4z)$$

c'est-à-dire $u(z + 1) + u(z) = 2u(4z)$.

5.3.

5.3.1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times [a, +\infty[$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|n^k u_n(x, y)| \leq n^k e^{-y\pi n^2} \leq n^k e^{-a\pi n^2}$ et la série $\sum n^k e^{-a\pi n^2}$ converge, car $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (n^k e^{-a\pi n^2}) = 0$, donc la série $\sum n^k \tilde{u}_n$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$.

5.3.2. Soit $y > 0$ fixé. Les fonctions $v_n : x \mapsto \tilde{u}_n(x, y)$ sont dérivable sur \mathbb{R} et

$$v'_n(x) = \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) = i\pi n^2 u_n(x, y),$$

de plus la série $\sum v'_n = i\pi \sum n^2 u_n$ est normalement convergente donc uniformément convergente, donc on peut conclure que \tilde{u} possède une dérivée partielle en tout point par rapport à x et que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y) = i\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tilde{u}_n(x, y)$$

5.3.3. De la même façon, on montre que $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x, y)$ existe et que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x, y) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tilde{u}_n(x, y) = i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y)$$

5.3.3. La question précédente montre que u vérifie les conditions de Cauchy-Riemann sur Ω , donc u est holomorphe sur Ω .

5.4. La formule (2) s'écrit, à l'aide de u , sous la forme :

$$\left(\frac{ia}{i}\right)^{1/2} (1 + 2u(ia)) = 1 + 2u\left(-\frac{1}{ia}\right),$$

et d'après le principe du prolongement analytique, cette égalité qui est vraie pour les points de Ω de la forme ia , se prolonge à Ω :

$$\forall z \in \Omega, \quad \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2} (1 + 2u(z)) = 1 + 2u\left(-\frac{1}{z}\right)$$

5.5. Pour tout $z \in \Omega$, on a, en tenant compte des questions **5.2.** et **5.4.** :

$$\begin{aligned} \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right) \right) &= \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} u\left[\left(-\frac{1}{4z}\right) - u\left(-\frac{1}{z}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{4z}{i}\right)^{1/2} (1 + 2u(4z)) - \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2} (1 + 2u(z)) \right] \\ &= \frac{1}{2} + u(z + 1) \end{aligned}$$

5.6. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|u_n(z)| = e^{-\text{Im}(z)\pi n^2} \leq 1$ et donc $\left| \frac{u_n(z)}{i\pi n^2} \right| \leq \frac{1}{\pi n^2}$, donc la série $\sum \frac{u_n}{i\pi n^2}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $\{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) \geq 0\}$ et comme les u_n sont continues, il est de même de la somme v .

5.7. On a pour tout $z \in \Omega$, $|F_{-1/2}(z)| \leq 2|z|^{3/2}$ et donc

$$nF_{\frac{-1}{2}}\left(\frac{\alpha z}{\pi n^2}\right) \leq 2\left|\frac{\alpha z}{\pi}\right|^{3/2} \frac{1}{n^2}$$

donc la série $\sum nF_{-1/2}\left(\frac{\alpha z}{\pi n^2}\right)$ est absolument convergente sur Ω , donc convergente sur Ω .

5.8.

5.8.1. Les fonctions u_n sont holomorphes sur Ω et $u'_n(z) = i\pi n^2 u_n(z)$ pour tout $z \in \Omega$, et comme la série $\sum \frac{u_n}{i\pi n^2}$ converge uniformément sur Ω , alors v_1 est holomorphe et sa dérivée s'obtient, en dérivant terme à terme :

$$\forall z \in \Omega, \quad v'_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z).$$

5.8.2. Soit $\forall z \in \Omega$, alors :

$$w'(z)(z) = \frac{(i\pi)^{1/2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi n} F'_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - \frac{2}{\pi n} F'_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right).$$

Mais $F'_{1/2} = f_{-1/2} = z^{-1/2} \exp(-\frac{i}{z})$, il vient alors, après simplification :

$$\begin{aligned} w'(z) &= \frac{(i\pi)^{1/2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi n} f_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - \frac{2}{\pi n} f_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right) \\ &= \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right) \right) \\ &= u(1+z) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5.8.3. On a $v'_1 = u$ et

$$\forall z \in \Omega, \quad w'(z) = u(z+1) + \frac{1}{2} = \left(v_1(z+1) + \frac{z}{2} \right)'$$

et comme Ω est connexe par arcs, alors il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $v'_1(z+1) + \frac{z}{2} = w(z) + k$, mais l'inégalité $z \in \Omega$, $|F_{1/2}(z)| \leq 2|z|^{3/2}$ montre que $\lim_{z \rightarrow 0} w(z) = 0$, donc $k = v(1)$ et par conséquent :

$$\forall z \in \Omega, \quad v_1(z+1) - v(1) = -\frac{z}{2} + w(z).$$

5.9. On a $z \in \Omega$, $|F_{1/2}(z)| \leq 2|z|^{3/2}$, donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \sum_{n=1}^N \left(nF_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right) \right| \leq K|z|^{3/2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2},$$

où $K > 0$ est une constante. D'où $|w(z)| \leq |z|^{3/2} K \frac{\pi^{1/2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, il suffit donc de prendre donc

$$c = K \frac{\pi^{1/2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5.10. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positives de limite nulle, comme v est continue sur $\{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) \geq 0\}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v(x + iy_n) = v(x) = q(x)$, d'autre part on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| v(x + iy_n + 1) - v(1) + \frac{x + iy_n}{2} \right| \leq c|x + iy_n|^{3/2}$$

et on obtient par passage à la limite :

$$\left| q(x + 1) - q(1) + \frac{x}{2} \right| \leq c|x|^{3/2}$$

et donc $q(x + 1) - q(1) + \frac{x}{2} = O(x^{3/2})$, ceci montre que q est dérivable en et que $q'(1) = \frac{-1}{2}$.

•••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr