Concours National Commun - Session 2012

Corrigé de l'épreuve de mathématiques I
Filière MP

Fonctions de Bessel[1] *et l'équation du temps de Kepler*[2]

Corrigé par M.TARQI

Parie I. Une fonction définie par une intégrale

1.1 Si $\lambda \geq 0$, la fonction $\theta \longmapsto e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta$ est continue sur $[0,\pi]$, donc elle est intégrable sur $]0,\pi[$.
Si $\lambda < 0$, on a

$$\left|e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\right| = \sin^{2\lambda}\theta$$

Donc il suffit de montrer que la fonction $\theta \longmapsto \sin^{2\lambda}\theta$ est intégrable sur $]0,\pi[$, en effet, tout fonction absolument intégrable est intégrable. La fonction $\theta \longmapsto \sin^{2\lambda}\theta$ est continue sur $]0,\pi[$, au voisinage de 0, $\sin^{2\lambda}\theta \sim \dfrac{1}{\theta^{-2\lambda}}$ et au voisinage de π

$$(\pi-\theta)^{-2\lambda}\sin^{2\lambda}\theta = (\pi-\theta)^{-2\lambda}\sin^{2\lambda}(\pi-\theta) = \left(\frac{\sin(\theta-\pi)}{(\theta-\pi)}\right)^{2\lambda} \sim 1,$$

et comme $0 < -2\lambda < 1$, la fonction $\theta \longmapsto \sin^{2\lambda}\theta$ est intégrable sur $]0,\pi[$.

1.2 D'après la relation de Chasles, on a :

$$f_\lambda(x) = \int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta d\theta$$

Le changement de variable $t = \pi - \theta$ montre que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{ix\cos t}\sin^{2\lambda} tdt$$

D'où

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= \int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{ix\cos t}\sin^{2\lambda} tdt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\mathrm{Re}(e^{ix\cos t})\sin^{2\lambda} tdt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos t)\sin^{2\lambda} tdt \end{aligned}$$

1. Bessel, Friedrich Wilhelm (1784-1846), astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation. Il introduit, dans la résolution des problèmes de mécanique céleste faisant intervenir la théorie des perturbations, les fonctions mathématiques dites de Bessel, solutions d'équations différentielles particulières. Ces fonctions jouent un rôle important dans l'analyse de la répartition et de la conduction de la chaleur ou de l'électricité à travers un cylindre.

2. Johannes Kepler (1571-1630), est un astronome allemand célèbre pour avoir étudié l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic, et surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournent pas en cercle parfait autour du Soleil mais en suivant des ellipses.

1.3 Posons $f_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^\pi g_\lambda(x,\theta)d\theta$ avec $g_\lambda(x,\theta) = e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta$. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, que f_λ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.
Pour $p = 0$, la fonction $x \longmapsto e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $\theta \in]0,\pi[$, de plus $|g_\lambda(x,\theta)| \le \theta\sin^{2\lambda}\theta$ et $\theta \longmapsto \sin^{2\lambda}\theta$ est intégrable, donc d'après le théorème du cours $x \longmapsto f_\lambda(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. Supposons maintenant f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda^{(p)}(x) = (-i)^p \int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\cos^p\theta\sin^{2\lambda}\theta d\theta.$$

La fonction $(x,\theta) \longmapsto (-i)^p e^{-ix\cos\theta}\cos^p\theta\sin^{2\lambda}\theta$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,\pi[$ et admet une dérivée partielle continue par rapport à x,

$$(x,\theta) \longmapsto (-i)^{p+1}e^{-ix\cos\theta}\cos^{p+1}\theta\sin^{2\lambda}\theta$$

qui est dominée par la fonction intégrable :

$$\varphi_\lambda : \theta \longmapsto |\sin^{2\lambda}\theta|.$$

Donc, toujours d'après le théorème de cours, $f_\lambda^{(p)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est à diref_λ est $\mathscr{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi f_λ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda^{(p)}(x) = (-i)^p \int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\cos^p\theta\sin^{2\lambda}\theta d\theta.$$

1.4 **Une équation différentielle**

1.4.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_{\lambda+1}(x) - f_\lambda(x) = \int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\theta(\sin^{2\lambda+2}\theta - \sin^{2\lambda})d\theta = -\int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\cos^2\theta\sin^{2\lambda}\theta d\theta.$$

Donc $f_\lambda'' = f_{\lambda+1} - f_\lambda$.

1.4.2 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
-xf_{\lambda+1}(x) &= i\int_0^\pi (e^{-ix\cos\theta})'\sin^{2\lambda+1}\theta d\theta \\
&= i\left(\left[e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda+1}\theta\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin^{2\lambda+1}\theta)d\theta\right) \\
&= i(2\lambda+1)\int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\cos\theta d\theta = (2\lambda+1)f_\lambda'(x).
\end{aligned}$$

D'où l'égalité demandée.

1.4.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$xf_\lambda''(x) + (2\lambda+1)f_\lambda'(x) + xf_\lambda(x) = x(f_{\lambda+1}(x) - f_\lambda(x)) + (2\lambda+1)f_\lambda'(x) + xf_\lambda(x) = 0$$

Donc f_λ est solution de l'équation différentielle (F_λ) sur $\mathbb{R}$.

Parie II. Une formule d'Euler

2.1

2.1.1 A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt = \left[\frac{1}{p}t^p e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}dt = \frac{1}{p}\Gamma(p+1).$$

2.1.2 On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, donc la formule précédente entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = n!$

2.1.3 La fonction $t \longmapsto t^{p-1}e^{-t}$ étant positive sur $]0,+\infty[$ donc $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t} \geq 0$. Supposons qu'il existe $p > 0$ tel que $\Gamma(p) = 0$, alors on aura pour tout $a > 0$, $\int_0^a t^{p-1}e^{-t} = 0$ et la continuité de $t \longmapsto t^{p-1}e^{-t}$ implique $t^{p-1}e^{-t} = 0$ pour tout $t > 0$ ce qui est absurde.

2.1.4 Il suffit d'utiliser le changement de variable $t = s^2$.

2.2

2.2.1 La fonction de deux variables : $(x, y) \longmapsto x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}$ est une fonction à variables séparables, donc par le théorème de Fubini, on peut écrire :

$$\int\int_{[0,a]^2} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^a x^{2p-1}e^{-x^2}dx \int_0^a y^{2q-1}e^{-y^2}dy = I_p(a)I_a(q)$$

2.2.2 Utilisons les coordonnées polaires :$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Quand (x, y) décrit $D(a)$, r décrit l'intervale $[0, a]$ et θ décrit l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La formule de changement de variables s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\int\int_{[0,a]^2} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}drd\theta \\ &= \int_0^a r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta \\ &= I_{p+q}(a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta.\end{aligned}$$

2.2.3 Il est clair que $\Gamma(p) = \lim\limits_{a\to\infty} I_p(a)$, donc

$$\lim_{a\to\infty}\int\int_{[0,a]^2} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

D'autre part, vues les inclusions entre les domaines d'intégrations $D(a)$, $[0, a]^2$, $D(a\sqrt{2})$ et vu le fait que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2+, x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2} > 0$, on a :

$$\int\int_{D(a)} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy \leq I_p(a)I_q(a) \leq \int\int_{D(a\sqrt{2})} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

Or

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\int\int_{D(a)} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy &= \lim_{a\to\infty}\int\int_{D(a\sqrt{2})} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy \\ &= \Gamma(p+p)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta.\end{aligned}$$

alors par comparaison des limites il vient :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta.$$

2.3 Posons $u=\sqrt{t}$, alors :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$$

D'autre part, la relation précédente donne :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) I_{2n-1}$$

avec $I_p = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx$. Pour tout $p \geq 2$, on écrit à l'aide d'une intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \sin x dx \\ &= \left[-\cos x \sin^{p-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^2 x dx \\ &= (p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x(1-\sin^2 x)dx = (p-1)(I_{p-2}-I_p) \end{aligned}$$

d'où $I_p = \dfrac{p-1}{p} I_{p-2}$. En tenant compte de $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on a alors

$$I_{2n-1} = \frac{(2n-2)(2n-4)...4.2}{(2n-1)(2n-3)...3} = \frac{2^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

Ainsi

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}.$$

Parie III. Fonction de Bessel

3.1 On a, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{1}{ix}\left[e^{-ix\cos\theta}\right]_0^{\pi} = \dfrac{2\sin x}{x}$, d'où :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}\sqrt{\frac{x}{2}} f_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Donc $J_{\frac{1}{2}}(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sqrt{x}$ au voisinage de 0^+ ($\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$).

3.2 En tenant compte de la relation $-xf_{\lambda+1}(x) = (2\lambda+1)f'_\lambda(x)$, on a, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{x}J_\lambda - J'_\lambda &= \frac{\lambda}{x}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f_\lambda(x) - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-1} f_\lambda(x) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \frac{xf_{\lambda+1}(x)}{(2\lambda+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \frac{xf_{\lambda+1}(x)}{(2\lambda+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+1} \frac{f_{\lambda+1}(x)}{(\lambda+\frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+1} f_{\lambda+1}(x), \quad \text{car } \Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right) = \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \\ &= J_{\lambda+1}(x). \end{aligned}$$

3.3 Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et tout $x > 0$:

$$[H^{n-1}(f)]'(x) = xH^n(f)(x).$$

La propriété est vraie pour $n = 1$, puisque $[H^0(f)]'(x) = f'(x) = x\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right](f)(x) = xH(f)(x)$. Si $f \in \mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, $\;H(f) \in \mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et donc

$$\forall x > 0, \quad [H^n(f)]'(x) = [H^{n-1}H(f)]'(x) = xH^n(H(f))(x) = xH^{n+1}(f)(x).$$

Ainsi, par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall f \in \mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R}), \;\; \forall x > 0, [H^{n-1}(f)]'(x) = xH^n(f)(x).$$

La propriété $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ est vraie pour $n = 0$, d'après la question 3.1. Supposons qu'elle vraie à l'ordre n et montrons la pour $n+1$. On a, grâce de la relation $[H^{n-1}(f)]'(x) = xH^n(f)(x)$:

$$\begin{aligned}
J_{n+\frac{3}{2}} &= \frac{n+\frac{1}{2}}{x}J_{n+\frac{1}{2}}(x) - J'_{n+\frac{1}{2}}(x) \\
&= \frac{n+\frac{1}{2}}{x}(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right) - \left((-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)' \\
&= \frac{n+\frac{1}{2}}{x}(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right) - (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right) \\
&\quad -(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}x\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \\
&= (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\left(\frac{\sin x}{x}\right).
\end{aligned}$$

D'où l'égalité demandée.

3.4 Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a, en notant $A = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
A\left(x^2J''_\lambda(x) + xJ'_\lambda(x) + (x^2-\lambda^2)J_\lambda(x)\right) &= x^2\frac{\lambda(\lambda-1)}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-2}f_\lambda(x) + 2x^2\frac{\lambda}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-1}f'_\lambda(x) \\
&\quad +x^2\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f''_\lambda(x) + x\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-1}f_\lambda(x) + x\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f'_\lambda(x) \\
&\quad +(x^2-\lambda^2)f_\lambda(x) \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda[\lambda(\lambda-1)f_\lambda(x) + 2x\lambda f'_\lambda(x) \\
&\quad +x^2f''_\lambda(x) + \lambda f_\lambda(x) + xf'_\lambda(x) + (x^2-\lambda^2)f_\lambda(x)] \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda\left[x^2f''_\lambda(x) + (2\lambda+1)xf'_\lambda(x)x^2f_\lambda(x)\right] \\
&= x\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda\left[xf''_\lambda(x) + (2\lambda+1)f'_\lambda(x)xf_\lambda(x)\right],
\end{aligned}$$

et comme f_λ est solution de l'équation différentielle F_λ, alors

$$\forall x > 0, \;\; x^2J''_\lambda(x) + xJ'_\lambda(x) + (x^2-\lambda^2)J_\lambda(x) = 0,$$

donc J_λ est solution de l'equation différentielle E_λ sur $]0,+\infty[$.

3.5 On a tout réel t, $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, d'où :

$$\forall x > 0, \forall \theta \in], \pi[, \quad \cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sin^{2\lambda}\theta \frac{(x\cos\theta)^{2n}}{(2n)!}.$$

Posons $u_n(\theta) = (-1)^n \sin^{2\lambda}\theta \frac{(x\cos\theta)^{2n}}{(2n)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les u_n sont intégrables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puisque $|u_n(\theta)| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}|\sin^{2\lambda}\theta|$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin^{2\lambda}\theta| d\theta$ existe (la question 1.1). La dernière inégalité montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |u_n(\theta)| d\theta$ est convergente.

D'où, par le théorème du cours et en tenant compte de la relation (1) de la question 2.2.3 :

$$\begin{aligned}
f_\lambda(x) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta d\theta \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \sin^{2\lambda}\theta d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\lambda+1)} \qquad (*)
\end{aligned}$$

et par conséquent, en utilisant l'égalité $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f_\lambda(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(n+\lambda+1)} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}
\end{aligned}$$

D'où l'égalité demandée.

3.6 D'après la relation $(*)$ f_λ apparaît comme une fonction définie à droite de 0 par une série entière, donc

$$\lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{J_\lambda(x)\Gamma(\lambda+1)}{(\frac{x}{2})^\lambda} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\Gamma(\lambda+1)f_\lambda(x)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} = 1$$

donc $J_\lambda(x)$ est équivalente à $\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$ au voisinage de 0^+.

3.7 **Une autre expression intégrale de J_n, $n \in \mathbb{N}$.**

3.7.1 On a, par la formule de binome : $(e^{i\theta}-e^{-i\theta})e^{-in\theta}=\sum_{k=0}^{n+2m}\complement_{n+2m}^{k}(-1)^k e^{(2m-2k)i\theta}$, d'où :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})e^{-in\theta}d\theta=\sum_{k=0}^{n+2m}\complement_{n+2m}^{k}(-1)^k\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(2m-2k)\theta}d\theta=(-1)^m\complement_{n+2m}^{m}.$$

3.7.2 On a pour tout nombre complexe z, $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, d'où $\forall x>0$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$:

$$e^{ix\sin\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix\sin\alpha)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})^n$$

La fonction $\theta\longmapsto e^{ix\sin\theta-in\theta}$ est définie par la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^n e^{-in\theta},$$

qui converge normalement par rapport à θ sur $[-\pi,\pi]$, donc on peut intégrer terme à terme :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})e^{-in\theta}d\theta \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^k e^{-in\theta}d\theta$$

Mais

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^k e^{-in\theta}d\theta=\sum_{m=0}^{p}\complement_{k}^{m}(-1)^m\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-2m-n)\theta}d\theta=\begin{cases}1, & \text{si } k=n+2m\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\theta-in\theta}d\theta &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}(-1)^{n+2m}\complement_{n+2m}^{m}\\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}(-1)^m\frac{1}{m!(n+m)!}\\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\\ &= J_n(x)\end{aligned}$$

3.7.3 D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\theta-in\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{0}e^{ix\sin\theta-in\theta}d\theta+\int_{0}^{\pi}e^{ix\sin\theta-in\theta}d\theta$$

Le changement de variable $t=-\theta$ montre que

$$\int_{-\pi}^{0}e^{ix\sin\theta-in\theta}d\theta=\int_{0}^{\pi}e^{-ix\sin t+int}dt$$

D'où

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2\,\mathrm{Re}(e^{ix\sin\theta - in\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Parie IV. Application à l'étude de l'équation de Kepler

4.1

4.1.1 La fonction φ_ε est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'_\varepsilon(x) = 1 - \varepsilon\cos(x) > 0$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_\varepsilon(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_\varepsilon(x) = -\infty$, donc φ_ε définit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4.1.2 Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in]-1,1[$, alors il existe un seul élément de $\mathbb{R}$, noté $v(t,\varepsilon)$ tel que $t = \varphi_\varepsilon(v(t,\varepsilon)$, donc on a bien :

$$v(t,\varepsilon) = t + \varepsilon\sin(v(t,\varepsilon)).$$

4.2 **Premières propriétés de la fonction v.**

4.2.1 On a pour tout $\varepsilon \in]-1,1[$, $0 = 0 + \varepsilon\sin(0)$ et $\pi = \pi + \varepsilon\sin(\pi)$, donc par unicité, $v(0,\varepsilon) = 0$ et $v(\pi,\varepsilon) = \pi$.

4.2.2 Les fonctions φ_ε et $t \longmapsto v(t,\varepsilon)$ sont de même parité, donc $t \longmapsto v(t,\varepsilon)$ est impaire.

4.2.3 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $v(t,\varepsilon)+2\pi = t+2\pi+\varepsilon\sin(v(t,\varepsilon)) = t+2\pi+\varepsilon\sin(v(t,\varepsilon)+2\pi) = v(t+2\pi,\varepsilon)$. Notons $\phi(t) = v(t,\varepsilon) - t$, donc $\phi(t+2\pi) = v(t+2\pi,\varepsilon) - t - 2\pi = v(t,\varepsilon) - t = \phi(t)$, donc la fonction $t \longmapsto v(t,\varepsilon) - t$ est 2π-périodique.

4.3 **Régularité de la fonction v**

4.3.1 La fonction g admet des dérivées partielles par rapport à x, ε, t à tout ordre et qui sont continues sur $\mathscr{U}$, donc ceci est suffisant pour dire que g est $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $\mathscr{U}$.
Pour tout $(x,\varepsilon,t) \in \mathscr{U}$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,\varepsilon,t) = 1 - \varepsilon\cos(x) > 0$$

4.3.2 Le théorème des fonctions implicites montre qu'on peut résoudre l'équation $g(t,\varepsilon,x) = 0$ en x, cette solution qu'est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme g n'est autre que la fonction v de la question 4.1.2.

4.4 **Expression de v à l'aide d'une série entière de la variable ε**

4.4.1 D'après théorème des fonctions implicites on a :

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(t,x) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x,\varepsilon,t)}{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\varepsilon,t)} = \frac{\sin x}{1 - \varepsilon\cos x}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,\varepsilon,t)}{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\varepsilon,t)} = \frac{1}{1 - \varepsilon\cos x}$$

Donc

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial t}\sin v.$$

4.4.2 D'après le théorème Schwarz (v étant de classe $\mathscr{C}^\infty$) et la relation de la question 4.4.1, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\sin^n v\right) &= \frac{\partial^2 v}{\partial\varepsilon\partial t}\sin^n v + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\sin^n v)\\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial\varepsilon}\sin^n v + n\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial t}\sin^{n-1} v\cos v\\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial\varepsilon}\sin^n v + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\sin^n v)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\sin^n v\right)
\end{aligned}$$

4.4.3 Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$\frac{\partial^n v}{\partial\varepsilon^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\sin^n v)\right).$$

Pour $n = 1$ on trouve le résultat démontré dans la question 4.4.1, supposons l'égalité est vraie à l'ordre n et montrons la à l'ordre $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+1} v}{\partial\varepsilon^{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial^n v}{\partial\varepsilon^n}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\sin^n v\right)\right) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\sin^n v\right)\right)\\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}\sin^n v\right)\right) \quad \text{d'après la question } 4.4.2\\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}\sin^n v\right)\\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\sin v.\sin^n v\right) \quad \text{d'après la question } 4.4.1\\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\sin^{n+1} v\right)
\end{aligned}$$

4.4.4 Écrivons $\sin t$ sous la forme $\left(\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)$, donc

$$(2i\sin t)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathtt{C}_{n+1}^k (-1)^k e^{i(n+1-2k)t}$$

et donc

$$(2i)^{n+1}\frac{d^n}{dt^n}(\sin^{n+1} t) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathtt{C}_{n+1}^k (-1)^k (i(n+1-k))^n e^{i(n+1-2k)t}$$

et comme pour tout $k \in [0, n+1]$, $0 \le n+1-2k \le n+1$, alors

$$2^{n+1}\left|\frac{d^n}{dt^n}(\sin^{n+1} t)\right| \le \sum_{k=0}^{n+1} \mathtt{C}_{n+1}^k (n+1)^n = (n+1)^n 2^{n+1},$$

d'où :

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}(\sin^{n+1} t)\right| \leq (n+1)^n.$$

L'inégalité précédente entraîne, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\sin^n t)\frac{1}{n!}\right| \leq \frac{n^{n-1}}{n!}$.

La règle de D'Alembert montre que le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n$ est $\frac{1}{e}$, donc, par comparaison, le rayon de convergence de la série en question est supérieure ou égale à $\frac{1}{e}$.

4.5 **Expression de v faisant intervenir une série de FOURIER de la variable t**

4.5.1 $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car v_ε est impaire.

4.5.2 Puisque v_ε est impaire, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (v(t,\varepsilon) - t)\sin(nt)dt$. Utilisons le changement de variable $t = x - \varepsilon \sin x$, alors $dt = (1 - \varepsilon\cos x)dx$ et b_n devient :

$$\begin{aligned}
b_n(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varepsilon \sin x \sin(nx - n\varepsilon \sin x)(1-\varepsilon\cos x)dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \varepsilon \sin x(-\cos(nx - n\varepsilon\sin x))'dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left([-\varepsilon \sin x \cos(nx - n\varepsilon \sin x)]_0^\pi + \int_0^\pi \varepsilon \cos x \cos(nx - n\varepsilon\sin x)dx\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (\varepsilon\cos x - 1)\cos(nx - n\varepsilon\sin x)dx + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nx - n\varepsilon \sin x)dx \\
&= \frac{2}{n\pi}[-\sin(nx - n\varepsilon\sin x)]_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nx - n\varepsilon\sin x)dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nx - n\varepsilon\sin x)dx.
\end{aligned}$$

4.5.3 Le théorème de Dirichlet montre que la série de Fourier de v_ε converge en tout t de $\mathbb{R}$ vers $v_\varepsilon(t)$ puisque v_ε est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc on peut écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$v(t,\varepsilon) - t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

et comme $b_n = \frac{2}{n}J_n(n\varepsilon)$ l'égalité précédente s'écrit encore sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ v(t,\varepsilon) = t + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(n\varepsilon)}{n}\sin(nt).$$

4.5.4 Le théorème de Parseval montre que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(J_n(n\varepsilon))^2}{n^2}$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(J_n(n\varepsilon))^2}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[v_\varepsilon(t)]^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [v_\varepsilon(t)]^2dt.$$

Or (avec le changement de variable $t = x - \varepsilon \sin x$)

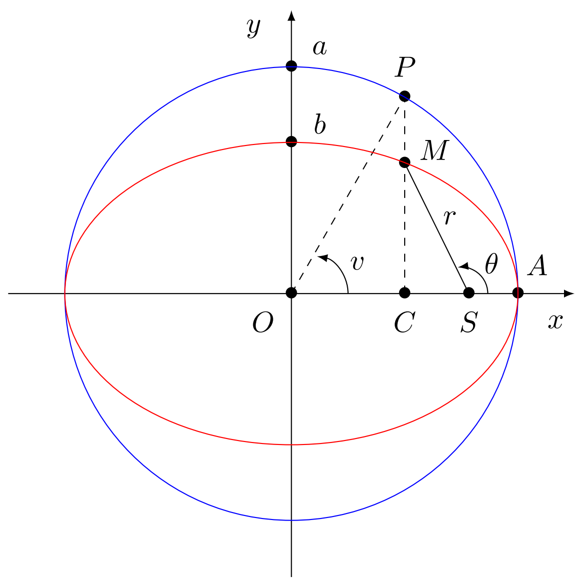
$$\int_0^\pi [v_\varepsilon(t)]^2 dt \quad = \quad \int_0^\pi \varepsilon^2 \sin^2 x(1 - \varepsilon \cos x)dx = \frac{\varepsilon^2 \pi}{2}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(J_n(n\varepsilon))^2}{n^2} = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Fin de corrigé

Annexe : Une démonstration géométrique de l'équation du temps de Kepler



Montrons d'abord qu'il existe une relation entre l'anomalie excentrique v et l'angle θ sous la forme :

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan\frac{v}{2}.$$

On a :

$$CS = OS - OC = a\varepsilon - a\cos v = a(\varepsilon - \cos v)$$

Mais

$$CS = r\cos(\pi - \theta) = -r\cos(\theta)$$

et donc

$$(1) \quad r\cos(\theta) = a(\cos v - \varepsilon).$$

D'autre part, en vertu d'une propriété simple de l'ellipse et de son cercle concentrique,

$$\frac{MC}{PC} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

donc

$$\frac{r\sin(\theta)}{a\sin v} = \sqrt{1-\varepsilon^2} \Longrightarrow r\sin(\theta) = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin v$$

En mettant au carrée et en tenant compte de la relation (1), on trouve :

$$r^2 = a^2(\varepsilon^2 + \cos^2 v - 2\varepsilon\cos v + (1-\varepsilon^2)\sin^2 v) = a^2(\varepsilon^2 + 1 - 2\varepsilon\cos v - \varepsilon^2\sin^2 v).$$

Donc

$$(2) \quad r = a(1 - e\cos v).$$

Par une relation trigonométrique usuel, et en utilisant les relations (1) et (2), on trouve :

$$\begin{aligned} 2r^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= r(1-\cos\theta) = a(1-\varepsilon\cos v) - a(\cos v - \varepsilon) \\ &= a(1+\varepsilon)(1-\cos v) = 2a(1+\varepsilon)\sin^2\frac{v}{2} \end{aligned}$$

De même ,

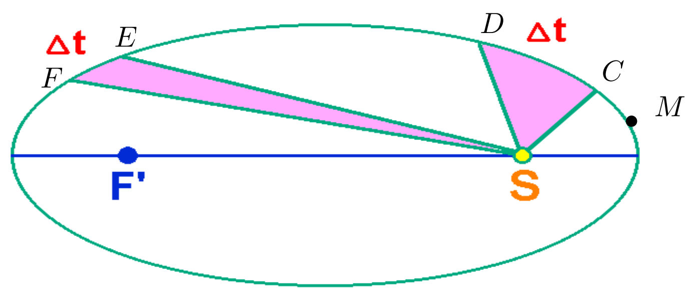
$$\begin{aligned} 2r^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= r(1+\cos\theta) = a(1-\varepsilon\cos v) + a(\cos v - \varepsilon) \\ &= a(1+\varepsilon)(1+\cos v) = 2a(1+\varepsilon)\cos^2\frac{v}{2} \end{aligned}$$

D'où

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{v}{2}.$$

Nous allons maintenant démontrer la *vraie* équation du temps de Kepler. On rappelle la deuxième loi de Kepler (la loi des aires) :

Si S est le Soleil et M une position quelconque d'une planète, l'aire balayée par le segment $[SM]$ entre deux positions C et D est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions E et F si la durée qui sépare les positions C et D est égale la durée qui sépare les positions E et F.
Voir la démonstration ci-après (Annexe2).



L'ellipse étudiée est la transformation affine du cercle par l'homothétie de rapport $\frac{b}{a}$, donc :

$$\text{Aire}(SAM) = \frac{b}{a}\text{Aire}(SAP)$$

Or Aire(SAP) = Aire de secteur(OAP) − Aire du triangle$(OSP) = \frac{1}{2}(a^2v - ea^2\sin v)$.

D'autre part, par la loi des aires :

$$\frac{\text{Aire}(SAM)}{\text{Aire de lellipse}} = \frac{t}{T}$$

où t est le temps écoulé depuis le passage au périgée (le point A) et T la période de la planète (la durée de révolution), donc

$$\text{Aire}(SAM) = \frac{\pi abt}{T}$$

D'où :

$$\frac{2\pi}{T}t = v - \varepsilon\sin v$$

ou encore

$$v = x + \varepsilon\sin v \qquad \text{(Équation du temps de Kepler)}$$

avec $x = \frac{2\pi}{T}t$, $\frac{2\pi}{T}$ représente la vitesse angulaire moyenne de la planète.
Cette équation nous permet, en fonction de x (donc en fonction du temps t) de calculer l'anomalie excentrique $v(t)$ et ensuite l'angle $\theta(t)$ et le rayon $r(t)$.
L'équation de Kepler est transcendante, c'est à dire ne peut être résolue que numériquement. Dans le cas de petites excentricités, la méthode de recurrence est la plus indiquée.
On procède par approximations successives, en posant comme première solution approchée

$$v_0 = x.$$

Ensuite, on substitue cette solution dans l'équation et on recommence le processus. On obtient ainsi une suite de solutions approchées, qui converge vers la solution exacte :

$$\begin{array}{rcl} v_0 & = & x \\ v_1 & = & v + \varepsilon \sin(v_0) = x + \varepsilon \sin(x) \\ v_2 & = & x + \varepsilon \sin(v_1) = x + \varepsilon \sin(x + \varepsilon \sin x) \end{array}$$

etc.
Cet algorithme, par sa nature iterative, est particulièrement adapte a une solution par ordinateur.

Annexe 2 : lois de KEPLER

Théorème : *Si un objet se déplace dans un champ de force central inversement proportionnel au carré de la distance entre le centre de l'objet et le centre de force, alors la trajectoire suivie par l'objet est une conique.*
DÉMONSTRATION : La démonstration est basée sur la deuxième loi fondamentale de la dynamique de NEWTON : $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{\gamma}$ (inconnue à l'époque de Kepler). On place l'origine du système de référence au centre de force et on utilise les coordonnées polaires.
On note

$$M(t) = r(t) \cos \theta(t) \vec{i} + r(t) \sin \theta(t) \vec{j}$$

le vecteur position de l'objet. Calculons $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ les vecteurs vitesse et accélération, on a :

$$\overrightarrow{v(t)} = [r'(t) \cos \theta(t) - r(t) \sin \theta(t) \theta'(t)]\vec{i} + [r'(t) \sin \theta(t) + r(t) \cos \theta(t) \theta'(t)]\vec{j}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\gamma(t)} & = & [r''(t) \cos \theta(t) - 2r'(t) \sin \theta(t) \theta'(t) - r(t) \cos \theta(t) (\theta'(t))^2 - r(t) \sin \theta(t) \theta''(t)]\vec{i} \\ & & +[r''(t) \sin \theta(t) + 2r'(t) \sin \theta(t) \theta'(t) - r(t) \sin \theta(t) (\theta'(t))^2 + r(t) \cos \theta(t) \theta''(t)]\vec{j} \end{array}$$

relation qui peut s'écrire à l'aide de vecteur radial unitaire : $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et le vecteur normal unitaire : $\vec{n} = \dfrac{d\vec{u}}{dt} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{\gamma(t)} = [r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2]\vec{u} + [2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)]\vec{n}.$$

Comme la seule force en présence est radiale, alors, d'après la loi fondamental de la mécanique :

$$(2) \quad r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2 = \frac{-K}{r^2} \ \text{ et } \ (3) \quad 2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t) = 0$$

La relation (2) s'écrit en multipliant par r : $2rr'(t)\theta'(t) + r^2(t)\theta''(t) = 0$ ou encore $\dfrac{d}{dt}\left[r^2 \dfrac{d\theta}{dt}\right] = 0$. On en déduit que $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = k$ où k est une constante (la deuxième loi de KEPLER, 1609)
La relation (2) devient donc

$$(4) \quad \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{k^2}{r^3} = -\frac{K}{r^2}.$$

Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{1}{r}$. Comme $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{dt}$ et $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{du}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$, et donc

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{k}{r^2}$$

ou encore

$$\frac{dr}{dt} = -k\frac{du}{d\theta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left[-k\frac{du}{d\theta}\right] = \frac{d}{d\theta}\left[-k\frac{du}{d\theta}\right]\frac{d\theta}{dt} \\
&= -k\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{k}{r^2} = -\frac{k^2}{r^2} = -\frac{k^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}.
\end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (4), nous obtenons l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{k^2}.$$

La solution général de telle équation s'écrit :

$$u(\theta) = A\sin\theta + B\cos\theta + \frac{K}{k^2}$$

Si nous plaçons l'axe des coordonnées polaires de telle sorte que $r(\theta)$ soit minimal lorsque $\theta = 0$, $u(\theta)$ devrait être maximal, ce qui donne $A = 0$ et, puis que $u''(\theta) = -B < 0$, donc $B > 0$. Ainsi

$$u(\theta) = B\cos\theta + \frac{k}{k^2}$$

et $r(\theta) = \dfrac{1}{B\cos\theta + \dfrac{K}{k^2}} = \dfrac{r_0}{1 + e\cos\theta}$ ($r_0 = \dfrac{k^2}{K}$, $\;e = B\dfrac{k^2}{K}$). Cela représente l'équation d'une conique en coordonnées polaires, d'excentricité e dont l'un des foyers est l'origine.

Première loi de Kepler, 1609 : *Dans le référentiel héliocentrique (le centre est le Soleil), les centres d'inertie des planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.*
En effet, d'après le théorème précédent, les trajectoires sont des coniques et comme les planètes ne peuvent pas s'éloigner indéfiniment du centre de Soleil, donc il y a une forte "probabilité" pour que les trajectoires des planètes qui gravitent autour de notre Soleil soient des ellipses. Autrement dit $0 < e < 1$.
Exemples :

Terre $e = 0,017$. Mercure $e = 0,206$. Neptune $e = 0,009$.

Deuxième loi de Kepler : loi des aires, 1609 On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire balayée par le vecteur position pendant l'intervalle de temps.

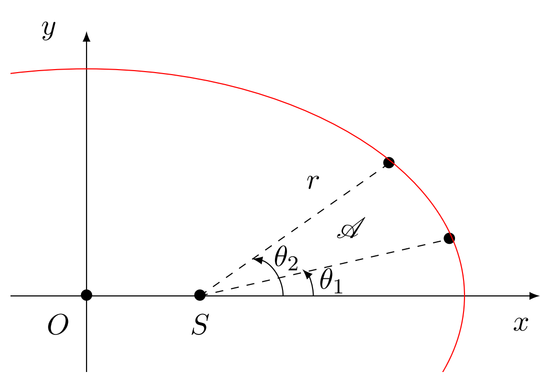
On sait que :

$$\mathscr{A} = \int\int_{\mathscr{R}} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

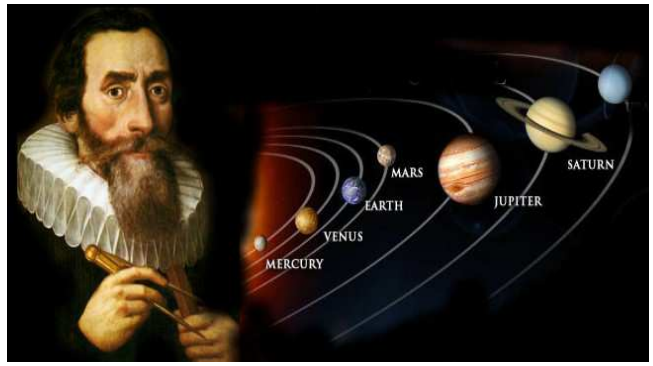
Mais comme $r^2 d\theta = k dt$, alors

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} k dt = \frac{k}{2}(t_2 - t_1).$$

Le vecteur position balaie des aires égales en des temps égaux.



Lois de Kepler : lois mathématiques décrivant le mouvement des planètes autour du Soleil, formulées par l'astronome allemand Johannes Kepler au début du xviie siècle.
Johannes Kepler établit ces lois d'après les coordonnées planétaires mesurées à l'astrolabe par Tycho Brahé, dont il est l'assistant de 1600 à 1601. Il découvre que les orbites planétaires ne sont pas circulaires, comme le suggèrent le système de Ptolémée et le système de Copernic.
Ainsi, d'après la première loi de Kepler (formulée en 1609), les planètes gravitent autour du Soleil en suivant des trajectoires elliptiques, ce dernier occupant l'un des deux foyers de l'ellipse.



Première loi de KEPLER

D'après la seconde loi de Kepler (formulée également en 1609), les aires décrites par le rayon vecteur joignant la planète au Soleil sont égales pour des intervalles de temps égaux.

Selon la troisième loi de Kepler (formulée en 1619), pour toute planète gravitant autour du Soleil, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est constant, a étant le demi-grand axe de l'ellipse correspondant à la trajectoire de l'astre autour du Soleil et T la période orbitale (ou période de révolution) de la planète.
Les lois de Kepler régissent donc le mouvement de la Terre, de la Lune et des planètes, ainsi que celui des satellites d'un astre quelconque. C'est en s'inspirant des lois de Kepler qu'Isaac Newton découvre les lois de la gravitation universelle en 1687.
Encarta 2009.

Références

[1] MÉCANIQUE II, David Sénéchal. Département de physique. Faculté des sciences. Université de Sherbrooke.

[2] http ://fr.wikipedia.org/wiki/Lois de Kepler, démonstration.

[3] http ://florenaud.free.fr/Kepler.php.

[4] http ://www.juggling.ch/physique/KeplerLois/Cours mecanique 3e 4e Annexe II.pdf.

[5] Microsoft Encarta 2009 - Collection.

• • • • • • • • • • •