ROYAUME DU MAROC

المملكة المغربية

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2015
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique

ENSEM

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Édition 2015

ÉPREUVE DES MATHÉMATIQUES II

Filière MP

Durée 4 heures

cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité d,e la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Quelques propriétés du groupe spécial orthogonal
Application à la non continuité de la diagonalisation

On sait que toute matrice M, carrée réelle d'ordre $n \geq 2$, dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, est diagonalisable ; c'est à dire que M est conjuguée à une matrice diagonale. On se demande ici si l'on peut réaliser cette diagonalisation de manière continue ; autrement dit :

Peut-on choisir la matrice réelle coniuguant M à une matrice diagonale de façon à ce qu'elle dépende continûment de M ?

Le but de ce problème est de démontrer que cela n'est pas possible sur tout l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n ayant n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

Notations et rappels

Soit n un entier ≥ 2 ; si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes. Si $p = n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n ; I_n désignera la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{GL}_n, (\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles (groupe linéaire).

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, $\det(A)$ son déterminant et χ_A son polynôme caractéristique ; il est défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \;\; \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle coïncide avec sa transposée. L'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se notera $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se notera $< \, , \, >$ et la norme associée sera noté $\|.\|_2$; il est défini par $(X, Y) \mapsto < X, Y >:=^t XY$.

On note $\mathscr{U}_n$ la partie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices ayant n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

Dans ce problème, l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de l'une de ses normes.

1ère Partie
Résultats préliminaires

1.1. **Étude de l'ensemble $\mathscr{U}_2$**

1.1.1. Montrer que $\mathscr{U}_2 = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\; ; \;\; (\mathrm{Tr}(A))^2 - 4 \det A > 0\}$.

1.1.2. Montrer que les applications $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ et $A \mapsto \det A$, définies sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles, sont continues.

1.1.3. Montrer que $\mathscr{U}_2$ est un ouvert non vide de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.4. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, dessiner le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4}x^2$ puis préciser, en l'hachurant sur le même graphique, la partie de $\mathbb{R}^2$ correspondant à l'ensemble $\{(\mathrm{Tr}(A), \det A) \;\; ; \;\; A \in \mathscr{U}_2\}$.

1.1.5. On pose $\mathscr{V}_2 = \mathscr{U}_2 \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\; ; \;\; b \neq 0 \right\}$.

Justifier que toute matrice de $\mathscr{U}_2$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et construire une application $f : \mathscr{V}_2 \mapsto \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ continue, à valeurs dans $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et telle que, pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $f(M)^{-1}Mf(M)$ soit diagonale.

1.2. **Commutant d'une matrice diagonale**
Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels deux à deux distincts et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux égaux à $\alpha_1, ..., \alpha_n$ respectivement : $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

1.2.1. On pose $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ MA = AM\}$. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2.2. Soient $U, V \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $UAU^{-1} = VAV^{-1}$ si, et seulement si, la matrice $V^{-1}U$ est diagonale.

1.3. **Une CNS de conjugaison à une matrice diagonale**
Soit $(M, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Montrer que $P^{-1}MP = D$ si, et seulement si, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de M et les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de M.

2$^{\text{ème}}$ Partie
Quelques propriétés du groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$

On rappelle que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ {}^tAA = I_n\}$ et $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \det A = 1\}$.

2.1. Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et que $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

2.2. Montrer que $SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ a^2 + b^2 = 1 \right\}$.

2.3. **Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs**
On définit l'application $\Phi : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

2.3.1. Montrer que l'application Φ est continue.

2.3.2. Montrer que $\Phi(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$.

2.3.3. Justifier que $SO_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2.4. **Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs pour $n \geq 3$**

2.4.1. Si $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$; on rappelle qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, des entiers naturels p, q et r vérifiant $p + q + 2r = n$, et, si $r \neq 0$, des réels $\theta_1, ..., \theta_r$, éléments de $]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$, tels que la matrice $P^{-1}UP$ soit diagonale par blocs de la forme

$$P^{-1}UP = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & (0) & \\ & & \Phi(\theta_1) & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \Phi(\theta_r) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Phi(\theta_k) = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Montrer alors que $U \in SO_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, q est paire.

2.4.2. Soit $U \in SO_n(\mathbb{R}) \setminus \{I_n\}$.

(i) Montrer qu'il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, des entiers naturels p et s vérifiant $p + 2s = n$, et des réels $\theta_1, ..., \theta_r$ éléments de $]0, 2\pi[$, tels que la matrice $P^{-1}UP$ soit diagonale par blocs de la forme

$$P^{-1}UP = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & \Phi(\theta_1) & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \Phi(\theta_r) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Phi(\theta_k) = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq s.$$

(ii) Les notations étant celles de la question (i), on définit l'application $\Gamma : [0,1] \mapsto \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall t \in [0,1], \;\; \Gamma(t) = P \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & \Phi(\theta_1) & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \Phi(\theta_r) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Montrer que Γ est continue, à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$ puis que $\Gamma(0) = I_n$ et $\Gamma(1) = U$.

2.4.3. En utilisant ce qui précède, montrer soigneusement que $SO_n(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour connecter deux matrices U_1 et U_2 dans $SO_n(\mathbb{R})$, on pourra d'abord commencer par connecter chacune d'elles à la matrice I_n,

2.6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque.

2.5.1. Montrer que l'application $M \mapsto^t M$, définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, est continue.

2.5.2. Justifier que l'application $U \mapsto U^{-1}$, définie sur $SO_n(l\mathbb{R})$, est continue.

2.5.3. En déduire que $\{UAU^{-1} \;\; ; \;\; U \in SO_n(\mathbb{R})\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3$^{\text{ème}}$ partie
Non continuité de la diagonalisation dans tout l'ouvert $\mathscr{U}_2$

On suppose qu'il existe une application $f_2 : \mathscr{U}_2 \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ continue, à valeurs dans $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et telle que, pour tout $M \in \mathscr{U}_2$, la matrice $f_2(M)^{-1} M f_2(M)$ soit diagonale.

3.1. On considère $M \in \mathscr{U}_2 \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et on note $C_1(M)$ (resp. $C_2(M)$) la première (resp. la deuxième) colonne de la matrice $f_2(M)$.

3.1.1. Montrer que $C_1(M)$ et $C_2(M)$ sont des vecteurs propres de M associés à des valeurs propres distinctes et prouver qu'ils sont orthogonaux dans $(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}), <,>)$.

3.1.2. Justifier que la matrice dont la première (resp. la deuxième) colonne est $\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}$ (resp. $\dfrac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2}$) est orthogonale.
On note $\alpha(M)$ le déterminant de la matrice décrite ci-dessus et $g_2(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice dont première(resp. la deuxième) colonne est $\alpha(M)\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}$ (resp. $\dfrac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2}$)

3.1.3. Vérifier que $g_2(M) \in SO_2(\mathbb{R})$.
On dispose ainsi d'une application $g_2 : \mathscr{U}_2 \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $SO_2(\mathbb{R})$.

3.1.4. Montrer que g_2 est continue et que, pour tout $M \in \mathscr{U}_2 \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, la matrice $g_2(M)^{-1} M g_2(M)$ est diagonale.

3.2. On considère une matrice diagonale $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, avec $\alpha \neq \beta$.

3.2.1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_B = \{UAU^{-1} \;\; ; \;\; U \in SO_2(\mathbb{R})\}$ est une partie de $\mathscr{U}_2 \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.
Dans la suite de cette partie, on note h_2 la restriction de g_2 à $\mathscr{S}_B = \{UBU^{-1} \;\; ; \;\; U \in SO_2(\mathbb{R})\}$.

3.2.2. Montrer que, pour tout $M \in \mathscr{S}_B$, la matrice $h_2(M)^{-1} M h_2(M)$ est diagonale et est semblable à B. Quelles en sont les valeurs possibles ?

3.2.3. En déduire que l'application $M \mapsto h_2(M)^{-1} M h_2(M)$ est constante sur $\mathscr{S}_B$.

3.2.4. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $h_2(M)^{-1} M h_2(M) = B$, pour tout $M \in \mathscr{S}_B$.

3.3. On reprend les notations de la questions 3.2. précédente et on suppose désormais que, pour toute matrice $M \in \mathscr{S}_B$, $h_2(M)^{-1} M h_2(M) = B$.

3.3.1. Montrer que, pour tout $U \in SO_2(\mathbb{R})$, la matrice $h_2(UBU^{-1})^{-1} U$ est diagonale puis justifier qu'elle est égale à $\pm I_2$.

3.3.2. Soient $\varphi_2 : SO_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_B \times \{-I_2, I_2\}$ et $\psi_2 : \mathscr{S}_B \times \{-I_2, I_2\} \to SO_2(\mathbb{R})$ les applications définies par : $\varphi_2(U) = (UBU^{-1}, h_2(UBU^{-1})^{-1} U)$ et $\psi_2(M, D) = h_2(M) D$.
Montrer que φ_2 et ψ_2 sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

3.3.3. Montrer que l'application $U \mapsto \mathrm{Tr}(h_2(UBU^{-1})^{-1}U)$, définie sur $SO_2(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles, est continue et a pour ensemble image la paire $\{-2, 2\}$.

3.3.4. Trouver une contradiction et conclure qu'une telle application f_2 n'existe pas.

$4^{\text{ème}}$ Partie
Non continuité de la diagonalisation dans tout l'ouvert $\mathscr{U}_n$ pour $n \geq 3$

Dans cette partie, on admet que $\mathscr{U}_n$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose qu'il existe une application $f_n : \mathscr{U}_n \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ continue, à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et telle que, pour tout $M \in \mathscr{U}_n$, la matrice $f_2(M)^{-1}Mf(M)$ soit diagonale.

4.1 On considère $M \in \mathscr{U}_n \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et on note $C_k(M)$ la k-ième colonne de la matrice $f_n(M)$, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

4.1.1. Montrer que Ia famille $\left(\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, ..., \dfrac{C_n(M)}{\|C_n(M)\|_2}\right)$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), <,>)$.
Dans la suite de cette partie, on note $\alpha(M)$ le déterminant, dans la base canonique, de la famille $\left(\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, ..., \dfrac{C_n(M)}{\|C_n(M)\|_2}\right)$ et on désigne par $g_n(M) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont la k-ième colonne vaut $\alpha(M)\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}$ si $k = 1$ et vaut $\dfrac{C_k(M)}{\|C_k(M)\|_2}$) si $k \in \{2, ..., n\}$.

4.1.2. Justifier que $g_n(M) \in SO_n(\mathbb{R})$.
On dispose ainsi d'une application $g_n : \mathscr{U}_n \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$.

4.1.3. Montrer que g_n est continue et que, pour tout $M \in \mathscr{U}_n \cap S_n(\mathbb{R})$, la matrice $g_n(M)^{-1}Ug_n(M)$ est diagonale.

4.2. On considère des réels $\alpha_1, ..., \alpha_n$ deux à deux distincts et on note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux égaux à $\alpha_1, ..., \alpha_n$ respectivement : $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

4.2.1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_A = \{UAU^{-1}\ ;\ U \in SO_n(\mathbb{R})\}$ est une partie de $\mathscr{U}_n \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Dans la suite de cette partie, on note h_n la restriction de g_n à $\mathscr{S}_A = \{UAU^{-1}\ ;\ U \in SO_n(\mathbb{R})\}$.

4.2.2. Montrer que l'application $M \mapsto h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$, définie sur $\mathscr{S}_A$, ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Combien exactement ?

4.2.3. Justifier alors que l'application $M \mapsto h_n(M)^{-1}Mh_n(M)$, définie sur $\mathscr{S}_A$, est constante.

4.2.4. Montrer qu'on peut se ramener au cas où $h_n(M)^{-1}Mh_n(M) = A$, pour tout $M \in \mathscr{S}_A$.

4.3. On reprend les notations de la questions 4.2. précédente et on suppose désormais que, pour toute matrice $M \in \mathscr{S}_A$, $h_n(M)^{-1}Mh_n(M) = A$.

4.3.1. Montrer que, pour tout $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $h_n(UAU^{-1})^{-1}U$ est une matrice diagonale de $SO_n(\mathbb{R})$.

4.3.2. On note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales de $SO_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{D}_n$ est fini et déterminer son cardinal.

4.3.3. Soient $\varphi_n : SO_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_A \times \mathscr{D}_n$ et $\psi_2 : \mathscr{S}_A \times \mathscr{D}_n \to SO_n(\mathbb{R})$ les applications définies par : $\varphi_n(U) = (UAU^{-1}, h_n(UAU^{-1})^{-1}U)$ et $\psi_n(M, D) = h_n(M)D$.
Montrer que φ_2 et ψ_2 sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

4.3.4. Montrer que l'application $U \mapsto \mathrm{Tr}(h_n(UAU)^{-1})^{-1}U)$ définie sur $SO_n(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles, est continue et a pour ensemble image $\mathrm{Tr}(\mathscr{D}_n)$.

4.3.5. Trouver une contradiction et conclure qu'une telle application f_n n'existe pas.

FIN DE L'ÉPREUVE