Correction proposée par El Amdaoui
École Royale de l'Air-Marrakech.Maroc

Problème 1

Partie I: Théorème de Weierstrass

1. (a) On fait appel à la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = 1$$

   (b) Il est clair que pour tout $x \in [0,1]$, $B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \geqslant 0$. D'autre part, d'après la question précédente, $B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = 1$

2. • On utilise la formule $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} &= \sum_{k=1}^{n} kB_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} nC_{n-1}^{k} X^{k+1} (1-X)^{n-1-k} \\
&= nX(X+(1-X))^{n-1} = nX
\end{aligned}$$

   • Pour $n=1$, on a bien $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} = 0$. Si $n \geqslant 2$, on utilise la formule $k(-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)B_{n,k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)C_{n-2}^{k-2} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1)C_{n-2}^{k} X^{k+2} (1-X)^{n-2-k} \\
&= n(n-1)X^2 (X+(1-X))^{n-2} = n(n-1)X^2
\end{aligned}$$

   Donc

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} = n(n-1)X^2$$

   Cette égalité est valable aussi pour $n=1$

   • Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$ est la somme de deux précédents

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k} = n(n-1)X^2 + nX$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$. On distingue trois cas

   • Si $k=0$, on a $B_{n,0} = (1-X)^n$, donc $B'_{n,0} = -n(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$

- Si $k=n$, on a $B_{n,n}=X^n$, donc $B'_{n,n}=nX^{n-1}=nB_{n-1,n-1}$
- Si $k\neq 0$ et $k\neq n$, on a

$$\begin{aligned} B'_{n,k} &= kC_n^kX^{k-1}(1-X)^{n-k}-(n-k)C_n^kX^k(1-X)^{n-k-1} \\ &= nC_{n-1}^{k-1}X^{k-1}(1-X)^{n-k}-nC_{n-1}^kX^k(1-X)^{n-k-1} \\ &= n\left(B_{n-1,k-1}-B_{n-1,k}\right) \end{aligned}$$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} (P_n(f))' &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B'_{n,k} \\ &= f(0)\,B'_{n,0}+f(1)\,B'_{n,n}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B'_{n,k} \\ &= -nf(0)B_{n-1,0}+nf(1)\,B_{n-1,n-1}+n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(B_{n-1,k-1}-B_{n-1,k}\right) \\ &= -nf(0)B_{n-1,0}+nf(1)\,B_{n-1,n-1}+n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k-1}-n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k} \\ &= -nf(0)B_{n-1,0}+nf(1)\,B_{n-1,n-1}+n\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right)B_{n-1,k}-n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k} \\ &= nf(1)\,B_{n-1,n-1}+n\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right)B_{n-1,k}-n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k}-nf(0)B_{n-1,0} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)B_{n-1,k}-n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k} \end{aligned}$$

Ainsi l'égalité souhaitée, pour tout $x\in[0,1]$, $(P_n(f))'(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k}(x)$

(c) Si f est croissante sur $[0,1]$, alors pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on a $\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\in[0,1]$ et $\frac{k}{n}<\frac{k+1}{n}$, alors par croissance de f, on a $f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\geqslant 0$. En outre, d'après la question **??**, pour tout $x\in[0,1]$, on a $B_{n-1,k}(x)\geqslant 0$ et, par suite, $(P_n(f))'(x)\geqslant 0$. Ceci montre que $P_n(f)$ est croissante sur $[0,1]$

4. On fixe $\varepsilon>0$

(a) Soit $x\in[0,1]$, par un calcul direct

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(x^2-2x\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)B_{n,k}(x) \\ &= x^2\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)-2\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}(x)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}(x) \\ &= x^2-2\frac{x}{n}.nx+\frac{1}{n^2}\left(n(n-1)x^2+nx\right) \\ &= \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

(b) Par absurde supposons que pour tout $\alpha>0$, il existe $x,y\in[0,1]$ tel que $|x-y|\leqslant\alpha$ et $|f(x)-f(y)|>\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n,y_n\in[0,1]$ tels que $|x_n-y_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ et $|f(x_n)-f(y_n)|>\frac{\varepsilon}{2}$.

$[0,1]$ est compact donc $[0,1]\times[0,1]$ est compact d'où on peut extraire de (x_n, y_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ d'où les deux suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent. Posons $x = \lim x_{\varphi(n)}$ et $y = \lim y_{\varphi(n)}$. On a $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $x = y$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \to f(x) - f(y) = 0$. Absurde, car $\left|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right| > \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$.

(c) i. Par construction de A, pour tout $k \in A$, on a : $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc

$$\sum_{k\in A}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \frac{\varepsilon}{2}$$

ii. Remarquons que si $k \in B$, alors $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| > \alpha$, on a alors $1 \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2}\left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in B}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) &\leqslant 2M\sum_{k\in B} B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k\in B}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\frac{x(1-x)}{n}\\
&\leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que le maximum de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est atteint en $\dfrac{1}{2}$ et vaut $\dfrac{1}{4}$.

(d) Soit $x \in [0,1]$, remarquons d'abord que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x)B_{n,k}(x)$, $[\![0,n]\!] = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
|P_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x)B_{n,k}(x)\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) B_{n,k}(x)\right|\\
&= \left|\sum_{k\in A}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) B_{n,k}(x) + \sum_{k\in B}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) B_{n,k}(x)\right|\\
&\leqslant \sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x) + \sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

(e) Fixons $\varepsilon > 0$ et soit α le réel strictment positif donné par l'uniforme continuité. On fixe ensuite n_0 suffisamment grand tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{M}{2n\alpha^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - P_n(f)(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci prouve bien la convergence uniforme de la suite $(P_n(f))_{n\geqslant 0}$ vers f.

5. L'application $f : x \in [0,1] \longmapsto g\left(a+(b-a)x\right)$ est continue, par composition, sur $[0,1]$. Posons $Q_n(g)(x) = P_n(f)\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$, pour $x \in [a,b]$, où $(P_n(f))$ la suite de polynômes de Bernstein associée à f converge uniformément vers f sur $[0,1]$. $(Q_n(g))$ est encore une suite de fonctions polynomiales, et pour tout $x \in [a,b]$, on a :
$$|Q_n(g)(x) - g(x)| = \left|P_n(f)\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| \leqslant \| P_n(f) - f \|_\infty^{[0,1]}$$
Donc $(Q_n(g))$ converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

Partie II: Une démonstration probabiliste du théorème de Stone Weierstrass

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$

1. (a) $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$, donc $\mathbb{E}(S_n) = nx$ et $\mathbb{V}(S_n) = nx(1-x)$, en conséquence, l'espérance et la variance de X_n sont respectivement $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n}\mathbb{E}(X_n) = x$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{x(1-x)}{n}$

   (b) Soit $\delta > 0$, l'inégalité de Bienaymé Chebychev nous donne
$$\mathbb{P}(|X_n - x| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

2. (a) On a $X_n(\Omega) = \left\{\dfrac{k}{n} \quad , \quad k \in [\![0,n]\!]\right\}$ et $P\left(X_n = \dfrac{k}{n}\right) = P(S_n = k)$.
   $f(X_n)$ est bient définier car f est continue sur $[0,1]$ et X à valeurs dans $[0,1]$. $X_n(\Omega)$ est fini ; on peut appliquer le théorème de transfert :
$$\begin{aligned} C_n(f)(x) &= \mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k \in S_n(\Omega)} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$
   ce qui montre que $x \longmapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale

   (b) i. Par construction de β, on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| \leqslant \beta$ on a : $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc
$$\begin{aligned} \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \beta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right)\right| &\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \beta} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \beta} \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ii. Remarquons que $[|X_n - x| > \beta] \subset [|X_n - x| \geqslant \beta]$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| &\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\
&\leqslant 2M \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta} \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\
&\leqslant 2M\mathbb{P}\left(|X_n - x| > \beta\right) \\
&\leqslant 2M\frac{\mathbb{V}\left(X_n\right)}{\beta^2} \\
&\leqslant \frac{2M}{\beta^2}\frac{x(1-x)}{n} \\
&\leqslant \frac{M}{2n\beta^2}
\end{aligned}$$

où la quatrième inégalité vient de l'inégalité de Bienyamé Tchebychev, vu que $\mathbb{E}\left(X_n\right) = x$ et la dernière inégalité vient du fait que le maximum de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est atteint en $\dfrac{1}{2}$ et vaut $\dfrac{1}{4}$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\beta > 0$ obtenu du théorème de Heine. Soit $x \in [0,1]$, alors par l'inégalité triangulaire et les inégalités des deux dernières questions, on a :

$$|C_n(f)(x) - f(x)| \quad \leqslant \quad \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\beta^2}$$

Avec $M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On fixe ensuite n_0 suffisamment grand tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{M}{2n\beta^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in [0,1], |C_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci prouve bien la convergence uniforme de la suite $\left(C_n(f)\right)_{n\geqslant 1}$ vers f.

Partie III: Application

1. (a) Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\int_a^b P\left(x\right) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

D'après théorème de Weierstrass, il existe une suite $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$, en écrivant

$$\left|f(x)^2 - f(x)P_n(x)\right| = \left|f(x)\left(f(x) - P_n(x)\right)\right| \leqslant \| f \|_\infty^{[a,b]} \| f - P_n \|_\infty^{[a,b]}$$

et il en résulte que la suite $\left(fP_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[a,b]$. D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors :

$$\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc

$$\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$$

La fonction f^2 étant continue positive sur le segment $[a,b]$ d'intégrale nulle, donc $f^2 = 0$, ainsi la nullité de f

(b) • **Convergence :** Soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \longmapsto x^n e^{-(1-i)x}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc I_n est impropre en $+\infty$, mais $x^n e^{-(1-i)x} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc I_n converge.

• **Calcul :** Les deux fonctions $x \longmapsto x^{n+1}$ et $x \longmapsto e^{-(1-i)x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telles que $x^{n+1}e^{-(1-i)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} x^{n+1}\left(\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \left[x^{n+1}\left(\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{1-i}\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n+1}{1-i} I_n
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^n} I_0$, avec $I_0 = \dfrac{1}{1-i}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} = \frac{n!}{\sqrt{2}^{n+1}} e^{\frac{(n+1)\pi}{4}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, remarquons que $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$, en conséquence

$$\int_0^{+\infty} x^{4n+3}e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

L'application $t \longmapsto \sqrt[4]{t}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ vers lui même, donc par intégration par changement de variable, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{4n+3}e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} t^n e^{-\sqrt[4]{t}}\sin\left(\sqrt[4]{t}\right)\mathrm{d}t$$

Posons alors $\phi : x \in [0,+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{4}e^{-\sqrt[4]{x}}\sin(\sqrt[4]{x})$, une telle fonction répond aux contraintes demandées

2. D'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(Q_n)_n$ qui converge uniformément vers g sur I.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n : x \longmapsto Q_n(x) - \displaystyle\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t$. La suite de polynômes (P_n) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$. D'autre part pour tout $x \in I$, on a

$$|P_n(x) - g(x)| \leqslant |Q_n(x) - g(x)| + \left|\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \| Q_n - g \|_\infty + \left|\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Or $Q_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} g$, donc $\| Q_n - g \|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\displaystyle\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi $P_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} g$

3. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, en particulier φ' est continue sur I, d'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(Q_n)_n$ qui converge uniformément vers φ' sur I. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n : x \longmapsto \varphi(a) + \displaystyle\int_a^x Q_n(t)\,\mathrm{d}t$. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(a) + \displaystyle\int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et on a :

$$|P_n(x) - \varphi(x)| = \left|\int_a^x Q_n(t) - \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a) \| Q_n - \varphi' \|_\infty$$

Ceci montre $P_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} \varphi$, et comme $P_n' = Q_n$, alors on a aussi $P_n' \xrightarrow[I]{\text{cvu}} \varphi'$

4. On peut se ramener au cas $I=[0,1]$, la construction des polynômes de Bernstein donnée auparavant $P_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\psi\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}$, montre que $\forall t\in[0,1]$, $P_n(t)\geqslant 0$, car ψ est positive sur I, et $P_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} \psi$

Problème 2

Partie I: Cas particulier : variables aléatoires discrètes finies

1. $Z\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$, alors e^{tZ} est finie, par le théorème du transfert, pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$M_Z(t)=\mathbb{P}(Z=0)+e^t\mathbb{P}(Z=1)=p\left(e^t-1\right)+1$$

2. X est finie, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$ la variable e^{tZ} est finie, en particulier elle admet une espérance, par le théorème du transfert, pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$M_X(t)=\sum_{i=1}^{r}e^{tx_i}\mathbb{P}(X=x_i)=\sum_{i=1}^{r}p_ie^{tx_i}$$
Donc M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout entier naturel k,
$$M_X^{(k)}(t)=\sum_{i=1}^{r}x_i^ke^{tx_i}\mathbb{P}(X=x_i)$$
En particulier $M_X^{(k)}(0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}x_i^k\mathbb{P}(X=x_i)=\mathbb{E}\left(X^k\right)$

3. (a) La famille $([X=x_i])_{i\in[\![1,r]\!]}$ est un système complet d'événements, en particulier $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}p_i=1$. En outre pour tous $t\in\mathbb{R}$ et $i\in[\![1,r]\!]$, on a $e^{tx_i}>0$, donc $M_X(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}e^{tx_i}\mathbb{P}(X=x_i)>0$. Ainsi φ_X est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Le développement limité à l'ordre 1 en 0 de M_X est donné par
$$M_X(t)=M_X(0)+tM_X'(0)+\circ(t)=1+t\mathbb{E}(X)+\circ(t)$$
Par composition $\varphi_X(t)=\mathbb{E}(X)+\circ(1)$, donc φ_X est prolongeable par continuité en 0.

(b) Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de M_X est donné par
$$M_X(t)=M_X(0)+tM_X'(0)+\frac{M_X''(0)}{2}t^2+\circ(t^2)=1+t\mathbb{E}(X)+\frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{2}t^2+\circ(t^2)$$
Par composition
$$\begin{aligned}\varphi_X(t)&=\frac{1}{t}\ln(M_X(t))\\&=\frac{1}{t}\ln\left(1+t\mathbb{E}(X)+\frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{2}t^2+\circ(t^2)\right)\\&=\frac{1}{t}\left(t\mathbb{E}(X)+\frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{2}t^2-\frac{\left(t\mathbb{E}(X)+\frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{2}t^2\right)^2}{2}+\circ(t^2)\right)\\&=\mathbb{E}(X)+\frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)^2}{2}t+\circ(t)\end{aligned}$$
Donc φ_X est dérivable en 0 et $\varphi_X'(0)=\dfrac{\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)^2}{2}=\dfrac{\mathbb{V}(X)}{2}$

(c) i. Soit $u \leqslant 0$, d'après la formule de Taylor avec reste intégrale, on a

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{2} e^t \, \mathrm{d}t$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{(u-t)^2}{2} e^t$ est continue et positive sur $[u, 0]$, donc $\displaystyle\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2} e^t \, \mathrm{d}t \leqslant 0$, soit $e^u \leqslant 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2$

ii. Soit $t > 0$, comme $\forall i \in [\![1, r]\!]$ on a $x_i \leqslant 0$, alors

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad e^{tx_i} \leqslant 1 + tx_i + \frac{t^2}{2} x_i^2$$

Par le théorème du transfert et par positivité de la probabilité

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) &= \sum_{i=1}^{r} e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} \left(1 + tx_i + \frac{t^2}{2} x_i^2\right) \mathbb{P}(X = x_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_i) + t \sum_{i=1}^{r} x_i \mathbb{P}(X = x_i) + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) \\
&\leqslant 1 + t\mathbb{E}(X) + \frac{t^2}{2} \mathbb{E}\left(X^2\right)
\end{aligned}$$

Finalement, la croissance de ln et l'inégalité de convexité : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$, donnent

$$\varphi_X(t) \leqslant \mathbb{E}(X) + \frac{t}{2} \mathbb{E}\left(X^2\right)$$

Une telle inégalité reste valable si $t = 0$, car $\varphi_X(0) = \mathbb{E}(X)$

(d) i. Quitte à réordonner les x_i, on peut supposer que $x_1 > x_2 > \ldots > x_r$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i = 0$. Cela signifie que, quelque soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(t) = 0$, autrement dit pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e^{tx_i} = 0$. Factorisons par e^{tx_1} : $e^{tx_1} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e^{t(x_i - x_1)} = 0$. Mais $e^{tx_1} \neq 0$ donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e^{t(x_i - x_1)} = 0$. Lorsque $t \to +\infty$ alors $e^{t(x_i - x_1)} \to 0$ (pour tout $i \geqslant 2$, car $x_i - x_1 < 0$). Donc pour $i \geqslant 2$, $\lambda_i e^{t(x_i - x_1)} \to 0$ et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve : $\lambda_1 = 0$.

Le premier coefficients est donc nul. On repart de la combinaison linéaire qui est maintenant $\lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$ et en appliquant le raisonnement ci-dessus on prouve par récurrence $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. Donc la famille $(f_1, \cdots, f_r)$ est libre.

ii. $\Rightarrow$) Si X et Y suivent la même loi, alors $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$. On tire $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et par le théorème du transfert pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(Y = x) = \mathbb{E}\left(e^{tY}\right)$$

Donc les fonctions φ_X et φ_Y sont égales ;

$\Leftarrow$) Posons $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_m\}$ l'ensemble des valeures prises effectivement par X et Y tels que $x_1 > \cdots > x_n$ et $y_1 > \cdots > y_m$. L'hypothèse $\varphi_X = \varphi_Y$ donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} e^{ty_j} \mathbb{P}(X = y_j)$$

Par unicité de l'écriture $n = m$, $x_i = y_i$ et $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(Y = y_i)$

(e) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, les deux variables e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes, car X et Y le sont, donc

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}e^{tY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\mathbb{E}\left(e^{tY}\right)$$

Par définition, on a

$$\varphi_{X+Y}(t) = \frac{1}{t}\ln(M_{X+Y}(t)) = \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\right) + \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{tY}\right)\right) = \varphi_X(t) + \varphi_Y(t)$$

Pour $t = 0$, on a $\varphi(0) = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \varphi_X(0) + \varphi_Y(0)$. Bref

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$$

(f) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(s,p)$, alors $X = \sum_{i=1}^{s} X_i$, où $X_1, \cdots, X_s$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $t \in \mathbb{R}$, les variables $e^{tX_1}, \cdots, e^{tX_s}$ sont indépendantes, donc

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{s} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{s}\mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right) = \left(p\left(e^t - 1\right) + 1\right)^s$$

(g) $\Leftarrow$) Supposons que X est une variable aléatoire réelle symétrique, alors $X(\Omega) = -X(\Omega)$ et pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x)$.
On montre que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$, pour le faire on fixe $t \in \mathbb{R}$, par le théorème du transfert

$$\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{-tx}\mathbb{P}(X = x)$$

l'application $x \longmapsto -x$ est une bijection de $X(\Omega)$ vers lui même, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) &= \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx}\mathbb{P}(X = -x)\\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx}\mathbb{P}(X = x)\\ &= \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\varphi_X(-t) = -\varphi_X(t)$ et pour $t = 0$, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(-X)$, cela entraîne $\mathbb{E}(X) = 0$, c'est-à-dire $\varphi_X(0) = 0$. On conclut alors φ_X est impaire.

$\Rightarrow$) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi_{-X}(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right)\right) = -\varphi_X(-t) = \varphi_X(t)$$

D'autre part $\varphi_X(0) = 0$, car φ_X est impaire, donc $\varphi_{-X}(0) = \mathbb{E}(-X) = -\mathbb{E}(X) = 0$, ceci montre que $\varphi_X = \varphi_{-X}$. D'après la question **??**, X et $-X$ ont la même loi

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^*$. On a $\mathbb{E}(S_n) = nm$ et $\mathbb{V}(S_n) = n\sigma^2$, d'autre part les variables $t\frac{X_1 - m}{\sqrt{n}\sigma}, \cdots, t\frac{X_n - m}{\sqrt{n}\sigma}$ sont finies et mutullement indépendantes, et par un calcul

direct

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n^*}(t) &= \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{tS_n^*}\right)\right) = \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{n} t\frac{X_i - m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{t}\ln\left(\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{t\frac{X_i-m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) = \frac{1}{t}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i-m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) \quad \text{Par indépendance}\\
&= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i-m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{\frac{-}{\sqrt{n}\sigma}}\mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{t\frac{-m}{\sqrt{n}\sigma}}\right) + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right)\\
&= \frac{-nm}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\\
&= \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad \text{car } \forall i,\ \varphi_{X_i} = \varphi_X
\end{aligned}$$

(b) Le développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ_X donne

$$\begin{aligned}
\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= \varphi_X(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\varphi_X'(0) + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \mathbb{E}(X) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\frac{\mathbb{V}(X)}{2} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= m + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\frac{\sigma^2}{2} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n^*}(t) &= \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\
&= \frac{t}{2} + \circ(1)
\end{aligned}$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_{S_n^*}(t) = \dfrac{t}{2}$.

Partie II: Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

1. (a) On peut écrire $b = \lambda a + (1-\lambda)c$, avec $\lambda \in [0,1]$, et par convexité de la fonction exponentielle

$$e^{bx} = e^{\lambda ax + (1-\lambda)cx} \leqslant \lambda e^{ax} + (1-\lambda)e^{cx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$$

(b)
- $1 \in I_X$, car $\mathbb{E}\left(e^{0X}\right) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X = x) = 1$
- Soit $a, c \in I_X$ tel que $a \leqslant c$. Montrons que $[a,c] \subset I_X$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{bx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$, donc $e^{bX} \leqslant e^{aX} + e^{cX}$, et comme les deux variables positives admettent des espérances, alors la variable positive e^{bX} admet une espérance, donc $b \in I_X$, ainsi l'inclusion $[a,c] \subset I_X$. On déduit I_X est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$, la variable e^{tX} admet une espérance si, et seulement, si la série à termes positifs $\sum\limits_{n \geqslant 0} e^{tn} \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ converge. Or la série exponentielle $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(\lambda e^t)^n}{n!}$ converge de somme $e^{\lambda e^t}$, donc M_Y est définie sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_Y(t) = e^{\lambda e^t - \lambda}$$

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, l'application $u_n : t \in]-\alpha, \alpha[\longmapsto P(X = x_n) e^{tx_n}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et ,
$$u_n^{(k)}(t) = P(X = x_n) x_n^k e^{tx_n}$$
les inégalités $e^{tx_n} \leqslant e^{|t||x_n|} \leqslant e^{\alpha |x_n|}$ donnent
$$\left| u_n^{(k)}(t) \right| \leqslant P(X = x_n) \left| x_n \right|^k e^{\alpha |x_n|}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\psi_k : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^k e^{(\alpha-\rho)x}$ est continue, positive, strictement décroissante sur $\left[\frac{k}{\rho-\alpha}, +\infty\right[$ et strictement croissante sur $\left[0, \frac{k}{\rho-\alpha}\right]$ il existe $M_k = \psi_k\left(\frac{k}{\rho-\alpha}\right) > 0$,

t	0		$\frac{k}{\rho-\alpha}$		$+\infty$
$\psi_k'(t)$		$+$	0	$-$	
ψ_k	0	$\nearrow$	M_k	$\searrow$	0

Pour $k = 0$, la fonction $\psi_k : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{(\alpha-\rho)x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $M_0 = 1$.
Bref pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n^{(k)}(t)| \leqslant P(X = x_n) \left| x_n \right|^k e^{\alpha |x_n|} = P(X = x_n) \psi_k(|x_n|) e^{\rho |x_n|} \leqslant M_k P(X = x_n) |e^{\rho |x_n|}.$$

(c)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$
- Soit $k \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{\rho |x_n|} \leqslant e^{\rho x_n} + e^{-\rho x_n}$ et $-\rho, \rho \in]-\alpha, , [\alpha$, donc la série à termes positifs $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(X = x_n) |e^{\rho |x_n|}$ converge et, par suite, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment $[-a, a]$ inclus dans $]-\alpha, \alpha[$

Donc, par le théorème de dérivation terme à terme, $M_X = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$, et
$$\forall t \in]-\alpha, \alpha[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k e^{tx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$$
En particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$ la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente, donc X admet un moment d'ordre k. Ainsi
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$$

4. Dans ce cas $M_Y : t \longmapsto e^{\lambda e^t - \lambda}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} M_Y'(t) &= \lambda e^t e^{\lambda e^t - \lambda} \\ M_Y'(0) &= \lambda \\ M_Y''(t) &= \lambda^2 e^t e^{\lambda e^t - \lambda} + \lambda e^{2t} e^{\lambda e^t - \lambda} \\ M_Y''(0) &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$
Alors $\mathbb{E}(Y) = M_Y'(0) = \lambda$ et par la formule de Huygens kœnig
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = M_Y''(0) - M_Y'(0) = \lambda$$

Partie III: Cas des variables aléatoires à densité

1. Soit $t \in I_X \cap I_Y$, les deux variables e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes, car X et Y le sont. Comme e^{tX} et e^{tY} admettent des espérances alors, par indépendance, $e^{t(X+Y)} = e^{tX}e^{tY}$ admet une espérance et
$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}e^{tY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\mathbb{E}\left(e^{tY}\right) = M_X(t)M_Y(t)$$

   Remarque : *Les deux applications ne sont pas forcément égales mais elles coïncident sur* $I_X \cap I_Y$

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$, la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0} \frac{|st|^k}{k!}$ converge de somme $e^{s|t|}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|st|^k}{k!} \leqslant e^{s|t|}$ ou encore $|t^k| \leqslant \frac{k!}{s^k}e^{s|t|}$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |t^k| \leqslant \frac{k!}{s^k}e^{s|t|} \leqslant \frac{k!}{s^k}\left(e^{st} + e^{-st}\right)$$
   Soit
$$|X|^k \leqslant \frac{k!}{s^k}\left(e^{sX} + e^{-sX}\right)$$
   Les deux variables positives e^{sX} et e^{-sX} admettent des espérances car $-s, s \in \,]a, b[$, alors par comparaison, la variable $|X|^k$ admet une espérance.

   Remarque : *On a aussi l'inégalité* $\mathbb{E}\left(|X|^k\right) \leqslant \frac{k!}{s^k}\left(M_X(s) + M_X(-s)\right)$ *qui sera utilisée à la question suivante*

   (c) Soit $-\infty = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = +\infty$ tels que pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$ la fonction f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$. On va appliquer le théorème de convergence dominée sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.
   Fixons $t \in \,]-s, s[$

   - Pour tout $k \in \mathbb{K}$, l'application $f_k : x \longmapsto \frac{t^k x^k}{k!}f(x)$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et intégrable car $\mathbb{E}\left(|X|^k\right)$ est finie
   - La série $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement sur $]a_i, a_{i+1}[$ de somme $x \longmapsto e^{tx}f(x)$ qui est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$
   - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_k(x| \,\mathrm{d}x &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left|\frac{t^k x^k}{k!}f(x)\right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{|t|^k}{k!}\mathbb{E}\left(|X|^k\right) \\ &\leqslant \frac{|t|^k}{k!}\frac{k!}{s^k}\left(M_X(s) + M_X(-s)\right) \\ &\leqslant \left(M_X(s) + M_X(-s)\right)\frac{|t|^k}{s^k}\end{aligned}$$
     et la série géométrique du terme général $\frac{|t|^k}{s^k}$ converge. Bref la série du terme général $\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_k(x| \,\mathrm{d}x$ converge

Donc d'après le théorème de la convergence dominée, on peut intégrer terme à terme, soit

$$\begin{aligned}\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k x^k}{k!} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{a_i}^{a_{i+1}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ceci vrai pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$, alors on conclut par la relation de Chasles que, pour tout $t \in]-s, s[, M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(X^k\right) \frac{t^k}{k!}$

Remarque : *On ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur $\mathbb{R}$, car f n'est pas forcément continue par morceaux sur $\mathbb{R}$*

(d) M_X est développable en série entier en 0, alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-s, s[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\mathbb{E}\left(X^k\right)}{k!}$$