Mr : HAMANI Ahmed

Partie I
Étude de quelques normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**,** $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$
   Pour tous i, j, $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$, donc $|(AB)_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \leq n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$
   et la passage au max entraine que $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

2. (a) $N(X) \leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} N(E_i^j) \right) \|X\|_\infty$.
   Soit $X = \sum_{i,j} x_{i,j} E_i^j$, du fait que $\forall i, j$, $|x_{i,j}| \leq \|X\|_\infty$, on obtient,
   $N(X) \leq \sum_{i,j} |x_{i,j}| N(E_i^j) \leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} N(E_i^j) \right) \|X\|_\infty$.
   Posons pour la suite $k = \sum_{1 \leq i,j \leq n} N(E_i^j)$.

   (b) i. $N : (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|.\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ **est continue.**
   Soit $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|N(X) - N(Y)| \leq N(X - Y) \leq k\|X - Y\|_\infty$, donc N est $k-$lipchitzienne et par suite elle est continue.

   ii. **Existence de** X_0 **tel que** $\forall X \in S_\infty$**,** $N(X_0) \leq N(X)$.
   L'application N est continue sur la sphère S_∞ qui est compacte comme fermé borné en dimension finie, donc N est bornée et atteint sa borne inférieure sur S_∞, ce qui assure l'existence de $X_0 \in S_\infty$ tel que $\min_{X \in S_\infty} N(X) = N(X_0)$, et par suite $\forall X \in S_\infty$, $N(X) \geq N(X_0)$.

   iii. **Existence de** $\alpha > 0$ **tel que** $\alpha\|.\|_\infty \leq N$.
   Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nul, alors $\frac{X}{\|X\|_\infty} \in S_\infty$, donc $N\left(\frac{X}{\|X\|_\infty}\right) \geq N(X_0)$ et par suite
   $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $N(X) \geq N(X_0)\|X\|_\infty$ inégalité encore vérifiée pour $X = O_n$.
   $\alpha = N(X_0)$ est strictement positif du fait que $\|X_0\|_\infty = 1$.

   (c) **Toutes les normes sont équivalentes sur** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on vient de montrer que $\alpha\|.\|_\infty \leq N \leq k\|.\|_\infty$, donc toute norme N est équivalente à $\|.\|_\infty$ et par transitivité, toutes les normes seront équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. (a) **Existence de** $\beta > 0$ **tel que** $N(AB) \leq n\beta\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.
   $N \sim \|.\|_\infty$, donc $\exists \beta > 0$ tel que $N \leq \beta\|.\|_\infty$, ce qui donne par l'inégalité de la question 1,
   $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $N(AB) \leq \beta\|AB\|_\infty \leq n\beta\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

   (b) **Existence de** α.
   De la question c, qui précède, on $\alpha\|.\|_\infty \leq N$, donc avec l'inégalité précédente, on aura $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
   $N(AB) \leq n\frac{\beta}{\alpha^2} N(A)N(B)$.

   (c) Existence de $\gamma > 0$ tel qie γNest une norme sous-multiplicative.
   Le réel $\gamma = \frac{n\beta}{\alpha^2}$ répond à la question.

4. (a) i. **Existence de** $\|A\|$.
   L'application $X \longmapsto AX$ est continue comme application linéaire en dimension finie, donc $\exists k > 0$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $N(AX) \leq kN(X)$, donc l'application $X \longmapsto \frac{N(AX)}{N(X)}$ est bornée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, ce qui assure l'existence de $\|A\|$.

   ii. $\|A\| = \sup_{X / N(X) = 1} N(AX)$.
   Notons S_N la sphère unité associée à N.
   L'inclusion $S_N \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ entraine que $\sup_{X \in S_N} N(AX) \leq \|A\|$.

Réciproquement si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $Y = \dfrac{X}{N(X)} \in S_N$, donc $\dfrac{N(AX)}{N(X)} = N(AY) \leq \sup\limits_{X \in S_N} N(AX)$, ce quin donne par passage au sup, $\|A\| \leq \sup\limits_{X \in S_N} N(AX)$.

iii. **$\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.**
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\|A\| = 0$, alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = 0$, en particulier $Ae_i = 0$ pour tout vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc les colonnes de A sont nulles, et par suite $A = O_n$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\|\lambda A\| = \sup\limits_{X \in S_N} \{N(\lambda AX)\} = \sup\limits_{X \in S_N} \{|\lambda| N(X)\} = |\lambda| \sup\limits_{X \in S_N} \{N(AX)\} = |\lambda| \|A\|$.
- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\forall X \in S_N$, $N((A+B)X) = N(AX + BX) \leq N(AX) + N(BX) \leq \|A\| + \|B\|$ et par passage au sup, on obtient $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(b) i. **$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(AX) \leq \|A\| N(X)$.**
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, alors $Y = \dfrac{X}{N(X)} \in S_N$, donc $\dfrac{N(AX)}{N(X)} = N(Y) \leq \|A\|$ et par suite $N(AX) \leq \|A\| N(X)$, inégalité encore vraie pour $X = 0$, on conclut que $N(AX) \leq \|A\| N(X)$.

ii. **Déduire que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.**
Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(ABX) \leq \|A\| N(BX) \leq \|A\| \|B\| N(X)$, donc
$\|AB\| = \sup\limits_{X \neq 0} \dfrac{N(ABX)}{N(X)} \leq \|A\| \|B\|$.

Partie II
Suites de matrices

1. **$(A_m)_m$ converge vers A ssi, $(a_{i,j}^{(m)})_m$ converge vers $a_{i,j}$ pour tous i, j.**
$\lim A_m = A$ ssi, $\|A_m - A\|_\infty \longrightarrow 0$ ssi, $\max\limits_{i,j} |a_{i,j}^{(m)} - a_{i,j}| \longrightarrow 0$ ssi, $\forall i, j$, $|a_{i,j}^{(m)} - a_{i,j}| \longrightarrow 0$ ssi, $\forall i, j$, $a_{i,j}^{(m)} \longrightarrow a_{i,j}$.

2. (a) **Existence de C_m et θ_m.**
On pose $C_m = \sqrt{1 + \dfrac{\alpha^2}{m^2}}$, on a $\dfrac{1}{C_m^2} + \dfrac{\alpha^2/m^2}{C_m^2} = 1$, donc $\exists \theta_m \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ tel que $\dfrac{1}{C_m} = cos(\theta_m)$ et $\dfrac{\alpha/m}{C_m} = sin(\theta_m)$, d'où $A_m = C_m \begin{pmatrix} cos(\theta_m) & -sin(\theta_m) \\ sin(\theta_m) & cos(\theta_m) \end{pmatrix} = C_m R(\theta_m)$
où on a posé pour $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$

(b) **La limite de $(A_m^m)_m$.**
$A_m^m = C_m^m R(m\theta_m)$, or $C_m^m = exp\left(\dfrac{m}{2} ln(1 + \dfrac{\alpha^2}{m^2})\right) = exp(\dfrac{\alpha^2}{2m} + o(\dfrac{1}{m})) \longrightarrow 1$ et $\theta_m = arcsin\left(\dfrac{\alpha}{mC_m}\right) \sim \dfrac{\alpha}{C_m} \sim \alpha$, donc par continuité des fonctions cosinus et sinus, on obtient $A_m^m \longrightarrow R(\alpha)$.

Partie III
Séries de matrices

1. **$\sum A_m$ converge ssi, $\forall i, j$, $\sum a_{i,j}^{(m)}$ converge.**
$S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} A_k$, donc $\forall i, j$, $(S_m)_{i,j} = \sum\limits_{k=0}^{m} a_{i,j}^{(m)}$ et la question 1 de la partie II assure l'équivalence $\sum\limits_m A_m$ converge ssi, $\sum\limits_m a_{i,j}^{(m)}$ pour tous i, j.

2. **Toute série absolument convergente est convergente.**
$\forall i, j$, $|a_{i,j}^{(m)}| \leq \|A_m\|_\infty$ et $\sum\limits_m \|A_m\|_\infty$ converge, donc par comparaison, $\forall i, j$, $\sum\limits_m |a_{i,j}^{(m)}|$ converge et puisque $\mathbb{K}$ est complet $\forall i, j$, $\sum\limits_m a_{i,j}^{(m)}$ converge, c'est à dire $\sum\limits_m A_m$ converge.

3. **Si la série $\sum\limits_m A^m$ converge, sa somme est inversible d'inverse $I_n - A$.**
Soit $B = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} A^m$, alors par continuité de l'application $M \longmapsto AM$, comme application linéaire en dimension finie, on obtient $AB = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} A^{m+1} = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} A^m = B - I_n$, donc
$(I_n - A)B = I_n$, donc B est inversible d'inverse $I_n - A$.

4. (a) **Convergence de $\sum_m B^m$ est valeur de sa somme.**

$\chi_B = (X-1/2)(X+1/3)$, de plus $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, donc $B = P.diag(1/2,-1/3).P^{-1}$ et par suite $B^m = P.diag\left((\frac{1}{2})^m, (-\frac{1}{3})^m\right).P^{-1}$ et par continuité de l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$, la série $\sum_m B^m$ converge de somme $P.diag(2, \frac{3}{4}).P^{-1} = \begin{pmatrix} 13/4 & -5/4 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(b) **Inverse de la série $\sum_{m=0}^{+\infty} B^m$.**

Son inverse est $I_n - B = \begin{pmatrix} -9/4 & 5/4 \\ -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Partie IV
Exponentielle d'une matrice

1. **La série $\sum_m \frac{1}{m!}A^m$ est convergente.**

$\|.\|$ est sous-multiplicative, donc $\forall m \geq 1$, $\|\frac{1}{m!}A^m\| \leq \frac{1}{m!}\|A\|^m$ et lasérie $\sum_m \frac{1}{m!}\|A\|^m$ converge vers $e^{\|A\|}$, donc par comparaison la série $\sum_m \frac{1}{m!}A^m$ est convergente comme série absolument convergente.

2. **Calcul de $exp(S)$ en fonction de I_n et de S.**

$$exp(S) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m)!}S^{2m} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!}S^{2m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m)!}I_n + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!}S = ch(1)I_n + sh(1)S.$$

3. (a) **Si $AB = BA$, alors $exp(A+B) = exp(A)exp(B)$.**

Notons $S_m(A) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}A^k$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $S_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$ pour sa somme.
La condition $AB = BA$ nous permet d'utiliser la formule du binôme et on le calcul suivant :

$$S_m(A)S_m(B) - S_m(A+B) = \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}A^j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}B^k\right) - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j A^j B^{k-j} =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}A^j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}B^k\right) - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=j}^{m} \frac{1}{j!}A^j \frac{1}{(k-j)!}B^{k-j} = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}A^j\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}B^k - \sum_{k=j}^{m} \frac{1}{(k-j)!}B^{k-j}\right) =$$

$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m-j} \frac{1}{j!}A^j \frac{1}{k!}B^k$, donc $\|S_m(A)S_m(B) - S_m(A+B)\| \leq S_m(\|A\|)S_m(\|B\|) - S_m(\|A\| + \|B\|) \longrightarrow$
$\longrightarrow e^{\|A\|}e^{\|B\|} - e^{\|A\|+\|B\|} = 0$ et par suite $S_\infty(A+B) = S_\infty(A)S_\infty(B)$, c'est à dire $exp(A+B) = exp(A)exp(B)$.

(b) **$exp(A)$ est inversible d'inverse $exp(-A)$.**
la formule précédente entraine que $exp(-A)exp(A) = exp(O_n) = I_n$, donc $exp(A)$ est inversible d'inverse $exp(-A)$.

4. (a) **Exponetielle d'une matrice diagonale.**
$\frac{1}{m!}(diag(\alpha_1, ..., \alpha_n))^m = diag\left(\frac{1}{m!}\alpha_1^m, ..., \frac{1}{m!}\alpha_n^m\right)$, les séries composantes sont convergentes, donc $exp(diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)) = diag(e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n})$.

(b) $exp(P^{-1}AP) = P^{-1}exp(A)P$.
$exp(P^{-1}AP) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}(P^{-1}AP)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} P^{-1}A^mP$ et par continuité de l'application $M \longmapsto P^{-1}MP$, on aura $exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}A^m)P = P^{-1}exp(A)P$.

(c) **Exponentielle d'une matrice triangulaire.**

Soit $T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & & (*) \\ & \ddots & \\ O & & t_{n,n} \end{pmatrix}$, alors $\frac{1}{m!}T^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{m!}t_{1,1}^m & & (**) \\ & \ddots & \\ O & & \frac{1}{m!}t_{n,n}^m \end{pmatrix}$, donc $exp(T) = \begin{pmatrix} e^{t_{1,1}} & & (\diamond) \\ & \ddots & \\ O & & e^{t_{n,n}} \end{pmatrix}$.

(d) $det(exp(A)) = e^{tr(A)}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ et par suite $\exists T = (t_{i,j})_{i,j}$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PTP^{-1}$, donc $exp(A) = Pexp(T)P^{-1}$ d'où $det(exp(A)) = det(exp(T)) = \prod_{i=1}^{n} e^{t_{i,j}} = e^{\sum_{i=1}^{n} t_{i,i}} = e^{tr(T)} = e^{tr(A)}$.

5. **Calcul de** $exp(tA)$.
$\chi_A = (X-2)^3$, donc par Cayley-Hamilton $A - 2I_3$est nilpotente.
$$exp(tA) = exp(2tI_3).exp(t(A-2I_3)) = e^{2t}(I_3+t(A-2I_3)+\frac{t^2}{2!}(A-2I_3)^2) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+2t & t & t \\ 6t+2t^2 & 1+2t+t^2 & 2t+t^2 \\ -10t-2t^2 & -4t-t^2 & 1-4t-t^2 \end{pmatrix}.$$

Partie V
Application aux systèmes différentiels linéaires

1. f **est de classe** C^1 **et** $f'(t) = Mf(t) = f(t)M$.
$\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m}{m!} M^m$.
- $\forall m \in \mathbb{N}$, $t \longmapsto \frac{t^m}{m!} M^m$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme fonction à composantes polynômiales.
- La série $\sum_m \frac{t^m}{m!} M^m$converge siplement vers $exp(tM)$ sur R.
- Soit K un compact inclu dans I, alors $K \subset [-a,a]$, donc $\forall t \in K$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\|\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} M^m\| \leq \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\|M\|^m$,
et par suite la série $\sum_m \left(\frac{t^m}{m!} M^m\right)'$ converge normalement sur tout compact inclu dans I.
On conclut par le théorème de dérivation terme à terme que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = Mexp(tM) = exp(tM)M$.

2. (a) **Changement de variable convenable**.
Le changement $z(t) = exp(-tA)Y(t)$ donne l'équivalence.

(b) **Solutions du système** (S).
$Y' = AY + B$ ssi, $z'(t) = exp(-tA)B(t)$ ssi, $z(t) = \int_0^t exp(-uA)B(u)du + v$ ssi,
$Y(t) = \int_0^t exp((t-u)A)du + exp(tA)v$.

3. **Solution générale du système** $Y' = AY$ **où** A **diagonalisable**.
$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$, donc en prennant $B = 0$ dans la formule précédente, on obtient
$Y(t) = exp(tA)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i exp(tA)V_i$, or $A^m V_i = \lambda_i^m V_i$, donc $exp(tA)V_i = e^{t\lambda_i} V_i$,
ce qui donne $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i exp(t\lambda_i)V_i$.

4. **Résolution du système**.
Notre système est équivalent $Y'(t) = AY(t)$, donc de solution
$$Y(t) = exp(tA)Y(0) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+2t & t & t \\ 6t+2t^2 & 1+2t+t^2 & 2t+t^2 \\ -10t-2t^2 & -4t-t^2 & 1-4t-t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+7t \\ 2+16t+7t^2 \\ 3-30t-7t^2 \end{pmatrix}$$

Partie VI
Toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

1. (a) $(I_n, N, ..., N^{s-1})$ **est libre**.
Si $(I_n, N, ..., N^{s-1})$ est liée, alors $deg(\Pi_N) \leq s-1$, ce qui contredit $\Pi_N = X^s$.

(b) **Expression de** $exp(t(\lambda I_n + N))$ **en fonction de** λ, t **et** $\sum_{k=0}^{s-1} \frac{t^k}{k!} N^k$.
$$exp(t(\lambda I_n + N)) = exp(t\lambda I_n).exp(tN) = exp(t\lambda).\sum_{k=0}^{s-1} \frac{t^k}{k!} N^k.$$

2. (a) $N = A - \lambda I_n$ **est nilpotente.**
$\chi_A = (X-\lambda)^n$, donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $(A-\lambda I_n)^n = 0$ et par suite $A - \lambda I_n$ est nilpotente.

   (b) **Les solution de** $X' = AX$ **sont bornées ssi,** $\lambda \in i\mathbb{R}$ **et** $A = \lambda I_n$.
Les solutions de $X' = AX$ sont $X(t) = exp(tA)X(0)$ où $X(0) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
$\diamond$ Si $A = \lambda I_n$ et $\lambda \in i\mathbb{R}$, alors la solution est $X(t) = e^{\lambda t}X(0)$ et donc pour n'importe qu'elle norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $\|X(t)\| = \|X(0)\|$, donc $t \longmapsto X(t)$ est bornée.
$\diamond$ Si $t \longmapsto X(t)$ est bornée pour tout $X(0)$, alors le choix de $X(0) \in Ker(N)\setminus\{0\}$, donne $X(t) = e^{\lambda t}X(0)$ est bornée, ce qui exige $\lambda \in i\mathbb{R}$.
Choisissons maintenant $X(0) \notin Ker(N^{s-1})$, alors
$\|X(t)\| = |exp(\lambda t)|\|\sum_{k=0}^{s-1}\frac{t^k}{k!}N^k(X(0))\| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|t|^{s-1}}{(s-1)!}\|N^{s-1}(X(0))\|$ est bornée, ce qui exige $s = 1$, c'est à dire $N = 0$ et par suite $A = \lambda I_n$.
On conclut que X est bornée sur $\mathbb{R}$ ssi, $Re(\lambda) = 0$ et $A = \lambda I_n$.

3. (a) **Existence d'une base dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.**
Le lemme des noyaux entraine que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{q} Ker((f-\lambda_i id)^{n_i})$.
Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{q}\mathcal{B}_i$ une base adaptée à cette somme directe, alors la matrice de f dans cette base est de la forme : $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_q \end{pmatrix}$ où $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ admmettant λ_i comme seule valeur propre.

   (b) **Condition nécessaire et suffisante de la bornitude des solutions de** $X' = AX$.
Les solutions de $X' = AX$ sont $X(t) = exp(tA)v$ où $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, or $exp(tA) = \begin{pmatrix} exp(tA_1) & & \\ & \ddots & \\ & & exp(tA_q) \end{pmatrix}$.
et$A_i - \lambda_i I_{n_i}$ est nilpotente , donc d'après la question 2, $t \longmapsto exp(tA_i)$ est bornée ssi, λ_i est imaginaire pure et $A_i = \lambda_i I_{n_i}$.
On conclut que $t \longmapsto exp(tA)$ est bornée ssi, $\forall i \in \{1,...,q\}$, $Re(\lambda_i) = 0$ et $A_i = \lambda_i I_{n_i}$ ssi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_q I_{n_q} \end{pmatrix}$ ssi, $\forall i \in \{1,...,q\}$, $Re(\lambda_i) = 0$ et A est diagonalisable.

4. **Toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ de spectre dans $i\mathbb{R}$.**
- L'antisymétrie de A entraine que ${}^T(exp(tA)) = exp(t^TA) = exp(-tA) = (exp(tA))^{-1}$, donc $exp(tA)$ est orthogonale.
On choisit une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ par exemple celle associée au produit scalaire usuel $(X|Y) = {}^T\overline{X}Y$, donc $exp(tA)$ conserve la norme, c'est à dire $\|X(t)\|_2 = \|exp(tA)X(0)\|_2 = \|X(0)\|_2$, ce qui assure la bornitude de $t \longmapsto exp(tA)$ et par la question précédente, A est diagonalisable et $Sp(A) \subset i\mathbb{R}$.

Partie VII
Quelques transformations induites par l'exponentielle matricielle

1. (a) **Existence des polynômes P et Q.**
$\forall k \geq s$, $N^k = 0$, donc $exp(N) = \sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}N^k$ et $ln(I_n + N) = \sum_{k=1}^{s-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}N^k$, donc
$P = \sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}X^k$ et $Q = \sum_{k=1}^{s-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}X^k$.

   (b) **Développement limité en 0 de PoQ et $Qo(P-1)$.**
Au voisinage de 0, $e^x = P(x) + o(x^{s-1})$ et $ln(1+x) = Q(x) + o(x^{s-1}$.
- $\lim_0 Q(x) = 0$, donc $P(Q(x)) = e^{Q(x)} + o((Q(x))^{s-1})$, or $(Q(x))^{s-1} \sim x^{s-1}$, donc $o((Q(x))^{s-1}) = o(x^{s-1})$, de plus $e^{Q(x)} = e^{ln(1+x)+o(x^{s-1})} = 1 + x + o(x^{s-1})$, d'où $P(Q(x)) = 1 + x + o(x^{s-1})$.
- $\lim_0 P(x) = 1$, donc $Q(P(x)-1) = ln(P(x)) + o((P(x)-1)^{s-1})$, or $(P(x)-1)^{s-1} \sim x^{s-1}$ et $ln(P(x)) = ln(e^x + o(x^{s-1})) = x + ln(1 + e^{-x}o(x^{s-1})) = x + o(x^{s-1})$, d'où $Q(P(x)-1) = x + o(x^{s-1})$.'

   (c) **exp est bijective de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.**
- L'application $exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ est bien définie, en effet soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$, alors

$exp(N) = I_n + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{k!} N^k = I_n + N'$ avec N' nilpotente comme somme de matrices nilpotentes qui commutent entre elles.

- La question précédente confirme que $P(Q(X)) = 1 + X + X^{s-1}R(X)$ et $Q(P(X)-1) = X + X^{s-1}S(X)$ avec $R(0) = S(0) = 0$, ce qui donne en remplaçant X par N, $P(Q(N)) = I_n + N$ et $Q(P(N) - I_n) = N$.
- Soit $M = I_n + N \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$, alors $exp(ln(M)) = exp(ln(I_n + N)) = P(Q(N)) = I_n + N = M$.
- Soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$, alors $ln(exp(N)) = ln(exp(N) - I_n + I_n) = Q(P(N) - I_n) = N$.

On conclut donc que exp est une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ de bijection réciproque

$ln : \mathcal{U}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ définie par $\forall M \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$, $ln(M) = \sum_{k=1}^{s-1} \frac{(-1)^k}{k!}(M - I_n)^k$.

2. (a) exp **est une surjection de** V **vers** W.

Soit $M = \beta(I_n + N) \in W$, alors $\frac{1}{\beta} M \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, donc d'après la question précédente, $\exists N' \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ tel que $exp(N') = \frac{1}{\beta} M$ mais $exp : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}^*$ est surjective, d'où l'existence de $\beta' \in \mathbb{C}$ tel que $\beta = e^{\beta'}$ et par suite $exp(\beta' I_n + N') = \beta exp(N') = M$, ce qui montre que $\beta' I_n + N' \in V$ est un antécédent de M dans V.

(b) exp **est-elle injective de** V **vers** W ?

Soit $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $A = i\theta I_n \in V$, alors $exp(A) = I_n = exp(O_n)$ mais $A \neq O_n$, donc exp n'ext pas injective.

3. exp **est une surjection de** $S_n(\mathbb{R})$ **vers** $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

- Montrons d'abord qu'une valeur propre d'une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est dans $\mathbb{R}^{*+}$.

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in Sp(A)$, alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$, donc ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$, d'où $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^XX} > 0$.

- Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la théorème spectral assure l'existence de $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que $M = PDP^{-1}$ avec les λ_i dans $\mathbb{R}^{*+}$.

$exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ étant bijective, donc $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\lambda_i = e^{\mu_i}$ où $\mu_i \in \mathbb{R}$.

On a alors $M = exp(P\Delta P^{-1}) = exp(P\Delta {}^tP)$ avec $\Delta = diag(\mu_1, ..., \mu_n)$. Alors $S = P\Delta {}^tP \in S_n(\mathbb{R})$ et $M = exp(S)$.