L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un problème.

Durée : 4 heures

Problème

Soit $(\mathcal{A},+,\times,.)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, c'est-à-dire $(\mathcal{A},+,\times)$ est un anneau et $(\mathcal{A},+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, tel que $\forall \alpha\in\mathbb{K}$, $\forall (x,y)\in\mathcal{A}^2$, $(\alpha.x)\times y = x\times(\alpha.y) = \alpha.(x\times y)$, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{A}$, $\|.\|$ est appelée une norme sous-multiplicative de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A}$, si pour tout $(x,y)\in\mathcal{A}^2$, $\|x\times y\|\leq \|x\|\|y\|$. Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels non nuls, on rappelle que, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes. Si $n=p$, alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on rappelle aussi que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni de ses opérations usuelles, est une $\mathbb{K}$-algèbre. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^0=I_n$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $A^{n+1}=AA^n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $GL_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I
Etude de quelques normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme notée $\|.\|_\infty$, telle que $\forall A=(a_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}(|a_{i,j}|)$.

1. Montrer que $\forall (A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\|AB\|_\infty\leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.
2. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   a) On pose $(E_i^j)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Soit $X=(x_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $N(X)\leq\left(\sum\limits_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n} N(E_i^j)\right)\|X\|_\infty$.
   b) i) Montrer que N est une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ vers $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.
      ii) On pose $S_\infty=\{X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K});\ \|X\|_\infty=1\}$. Montrer qu'il existe $X_0\in S_\infty$ tel que pour tout $X\in S_\infty$, $N(X_0)\leq N(X)$.
      iii) En déduire qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\alpha\|X\|_\infty\leq N(X)$.
   c) En déduire que toutes les normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.
3. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.
   a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif β tel que $N(AB)\leq n\beta\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.
   b) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $N(AB)\leq n\frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$.
   c) En déduire qu'il existe un réel strictement positif γ tel que γN soit une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose, $\|A\| = \sup\left\{\frac{N(AX)}{N(X)};\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}$.

   a) i) Justifier, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'existence de $\|A\|$.

   ii) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\| = \sup\{N(AX);\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ N(X) = 1\}$.

   iii) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   b) i) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(AX) \leq \|A\|N(X)$.

   ii) En déduire que, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Partie II
Suites de matrices

On rappelle que si $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers A si la suite réelle $(\|A_m - A\|)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, où $\|.\|$ est une norme donnée sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on écrit dans ce cas $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = A$.

1. Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = (a_{i,j}^{(m)})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.
   Montrer que la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers A si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, la suite $(a_{i,j}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.
   En cas de convergence, on écrit $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = \left(\lim\limits_{m\to+\infty} a_{i,j}^{(m)}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.

2. Soit α un réel, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A_m = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_m \in \mathbb{R}$ et $\theta_m \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tels que,
   $A_m = C_m \begin{pmatrix} \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}$

   b) Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m^m$.

Partie III
Séries de matrices

Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour $m \in \mathbb{N}$, $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} A_k$. On dit que la série de terme général A_m converge si la suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge, sinon la série est dite divergente. En cas de convergence, la limite de la suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ se note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.

On dit que la série de terme général A_m est absolument convergente, si la série numérique de terme général $N(A_m)$ converge, avec N une norme définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = (a_{i,j}^{(m)})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.
   Montrer que la série de terme général A_m converge si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, la série de terme général $a_{i,j}^{(m)}$ converge. En cas de convergence, on écrit $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} A_m = \left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{i,j}^{(m)}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.
2. Montrer que toute série absolument convergente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est convergente.
3. Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} A^m$ converge, montrer que $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} A^m$ est inversible et déterminer son inverse.
4. On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} B^m$ est convergente et déterminer sa valeur.

b) En déduire l'inverse de $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} B^m$.

Partie IV
Exponentielle d'une matrice

1. Montrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série de terme général $\frac{1}{m!}A^m$, $m \in \mathbb{N}$, est convergente. Par la suite, on appelle l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice notée $\exp(A)$, telle que $\exp(A) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}A^m$.

Dans toute la suite du problème, on note $\exp$ **l'application définie sur** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $S^2 = I_n$. Déterminer $\exp(S)$ en fonction de I_n et de S.
3. a) Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
   b) En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ est une matrice inversible et déterminer son inverse en fonction de A.
4. On note, pour tout $(\beta_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^n$, $diag\,(\beta_i)_{1\le i\le n}$, la matrice diagonale $(a_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que pour tout i, $1 \le i \le n$, $a_{i,i} = \beta_i$.
   a) Montrer que $\forall (\alpha_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^n$, $\exp\left(diag(\alpha_i)_{1\le i\le n}\right) = diag\left(e^{\alpha_i}\right)_{1\le i\le n}$
   b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.
   c) Soit $T = (t_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, montrer que $\exp(T) = (t'_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$ est aussi une matrice triangulaire supérieure telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $t'_{i,i} = e^{t_{i,i}}$.
   d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\det(\exp(A)) = e^{Tr(A)}$, où $Tr(A)$ désigne la trace de la matrice A.
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, pour tout réel t, déterminer $\exp(tA)$.

Partie V
Application aux systèmes différentiels linéaires

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $f : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $f(t) = \exp(tM)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que $\forall t \in I,\quad f'(t) = Mf(t) = f(t)M$.
2. Soient $t_0 \in I$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ une fonction continue. On considère le système différentiel suivant (S): $Y' = AY + B$.
   a) Montrer, en utilisant un changement de variable convenable, que:
   $$Y'(t) = AY(t) + B(t) \Leftrightarrow (\exp(tA))z'(t) = B(t)$$
   b) En déduire que les solutions du système différentiel (S) sont exactement les applications de la forme:
   $$\forall t \in I,\quad Y(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\left((t-u)A\right) B(u)du + (\exp(tA))v,$$
   où v est un paramètre arbitraire de $\mathbb{K}^n$.
3. On suppose, dans cette question, que A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes) et soit $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ une base formée de vecteurs propres telle que pour tout i, $1 \le i \le n$, V_i est associé à λ_i.
   Montrer que la solution générale du système différentiel homogène $Y' = AY$ est de la forme $Y(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t)V_1 + \ldots \alpha_n \exp(\lambda_n t)V_n$, où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

4. Résoudre le système différentiel suivant $\begin{cases} 4x(t) + y(t) + z(t) = x'(t) \\ 6x(t) + 4y(t) + 2z(t) = y'(t) \\ -10x(t) - 4y(t) - 2z(t) = z'(t) \end{cases}$, avec la condition initiale suivante $x(0) = 1, y(0) = 2$ et $z(0) = 3$.

Partie VI
Toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose que N est nilpotente d'indice s, où s est un entier naturel non nul.
   a) Montrer que $(I_n, N, \dots, N^{s-1})$ est une famille libre.
   b) Pour tout nombre complexe λ et pour tout réel t, exprimer $\exp(t(\lambda I_n + N))$ en fonction de λ, t et $\sum_{k=0}^{s-1} \frac{t^k}{k!} N^k$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui admet $\lambda \in \mathbb{C}$ comme unique valeur propre.
   a) Montrer que $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.
   b) Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, λ est imaginaire pur et $A = \lambda I_n$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont le polynôme caractéristique est $Q = (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_q)^{n_q}$, les $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont deux à deux distincts, $q \in \mathbb{N}^*$, $n_1, n_2, \dots, n_q$ sont des entiers naturels non nuls. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.
   a) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale en q blocs.
   b) Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont imaginaires purs et A est diagonalisable.
4. Montrer que toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, et que ses valeurs propres sont imaginaires pures.

Partie VII
Quelques transformations induites par l'exponentielle matricielle

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que M est une matrice unipotente si $M = I_n + N$, avec N une matrice nilpotente. On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute matrice N de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$, on défini la fonction notée ln, par $\ln(I_n + N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$.

1. Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'indice de nilpotence $s \geq 2$.
   a) Montrer qu'il existe deux polynômes P et Q de même degré r tels que,
   $\exp(N) = P(N)$ et $\ln(I_n + N) = Q(N)$.
   b) Montrer qu'au voisinage de 0, $P(Q(x)) = 1 + x + \circ(x^r)$ et $Q(P(x) - 1) = x + \circ(x^r)$.
   c) Montrer que exp est une application bijective de l'ensemble $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ vers l'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa bijection réciproque.
2. On pose $V = \{\alpha I_n + N;\ \ \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})\}$ et $W = \{\beta(I_n + N);\ \ \beta \in \mathbb{C}^* \text{ et } N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})\}$.
   a) Montrer que exp est une application surjective de V vers W.
   b) exp est-elle injective de V vers W? Justifier votre réponse.
3. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué par les matrices symétriques et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué par les matrices symétriques définies positives c'est -à- dire les matrices symétriques M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $\forall X \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \setminus \{0\},\ {}^tXMX > 0$.
   Montrer que exp est une application surjective de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE