$l^\infty = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty\}$ **muni de la norme infini est complet.**

Remarque : On note une suite d'éléments de l^∞ avec des indices supérieurs, soit $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ avec des indices inférieurs, soit $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = ((u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration : Soit $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(l^\infty, \|.\|_\infty)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p, q \geq p_0 \Longrightarrow \|u^{(p)} - u^{(q)}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{C}, |.|)$, donc elle converge puisque $\mathbb{C}$ est complet. Posons alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lim_{p\to\infty} u_n^{(p)}.$$

Ceci permet de construire une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans l^∞ : Comme $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(l^\infty, \|.\|_\infty)$, alors elle est bornée, soit donc $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u^{(n)}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k^{(n)}| \leq M$$

Considérons $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $p \geq p_1 \Longrightarrow |u_n - u_n^{(p)}| \leq 1$, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^{(p_1)}| + |u_n^{(p_1)}| \leq 1 + M.$$

D'où la suite, ainsi construite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans l^∞.

La suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l^∞ : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $q > p > p_0$, l'inégalité $|u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| \leq \varepsilon$, et on peut tendre q vers l'infini, ce qui montre que $|u_n^{(p)} - u_n| \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien montré $\|u^{(p)} - u\| \leq \varepsilon$. □

•••••••••••