Corrigé du devoir libre $n°10$
M.Tarqi

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, pour tout $t \in]0,+\infty[$, $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\text{Re}(z)-1}e^{-t}$. Donc la fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ continue sur $]0,+\infty[$ est intégarble sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $\text{Re}(z) > 0$. Ainsi Γ est bien définie sur $\mathscr{D}$.

Fixons $y \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $\Gamma_y : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x+iy-1}e^{-t}dt$.

Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, tels que $0 < a < 1 < b < +\infty$. La fonction $f : (x,t) \longmapsto t^{x+iy-1}e^{-t}$ est continue sur $[a,b]\times]0,+\infty[\longmapsto \mathbb{C}$ et admet une dérivée partielle par rapport à x, $(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)e^{-t}t^{x+iy-1}$, continue sur $[a,b]\times]0,+\infty[$.

La fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ étant continue, décroissante si $t \in]0,1]$ et croissante si $t \in [1,+\infty[$, donc on peut écrire :

$$0 \leq t^{x-1} \leq \sup_{x\in[a,b]} t^{x-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1}) = \begin{cases} t^{a-1}, & \text{si } t \in]0,1] \\ t^{b-1}, & \text{si } t \in [1,+\infty[\end{cases}.$$

Soit

$$\varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1}, & \text{si } t \in]0,1] \\ (\ln t)e^{-t}t^{b-1}, & \text{si } t \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Alors φ est continue par morceaux, intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

D'après le théorème de dérivation des intégrales dependant d'un paramètre, Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et comme a et b sont quelconques, le résultat reste vraie sur la réunion des intervalles $[a,b]$, donc Γ_y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma_y'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x+iy-1}dt.$$

Ce qui justifierait l'existence de $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial x}$ et que pour tout $\forall z \in \mathscr{D}$, $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial x}(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$.

Et de la même façon, on démontre l'existence sur $\mathscr{D}$ de $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial x}$ avec cette fois, pour tout $z \in \mathscr{D}$, $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial y}(z) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$.

On démontre ensuite en utilisant le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que la fonction $z \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$ est continue sur toute partie de la forme $[a,+\infty[+i\mathbb{R}$ de $\mathscr{D}$ et donc sur $\mathscr{D}$.

Γ serait alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$ et vérifierait la condition de Cauchy-Riemann. On en conclurait que Γ est holomorphe sur $\mathscr{D}$ et que $\Gamma'(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$.

2. Une une intégartion par parties nous donne, pour tout $a > 0$:

$$\int_0^a t^{z-1}e^{-t}dt = \left[\frac{1}{z}t^z e^{-t}\right]_0^a + \frac{1}{z}\int_0^a t^z e^{-t}dt,$$

d'où, en faisant tendre a vers $+\infty$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1).$$

D'où $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, en particulier $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$, on a :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

D'autre part, la formule de Taylor, avec reste intégrale, à l'ordre n appliquée à la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ sur $[0,t]$ s'écrit :

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}t^k + \int_0^t (-1)^{n+1}e^{-u}\frac{(t-u)^n}{n!}du.$$

En effectuant dans l'intégrale le changement de variable $u = t(1-v)$, on obtient

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}t^k + (-1)^{n+1}e^{-t}\frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 v^n e^{vt}dv.$$

D'où :

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 t^{z+k-1} + r_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} + r_n(z)$$

avec

$$r_n(z) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-t}t^{n+z}\left(\int_0^1 v^n e^{vt}dv\right)dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$,

$$0 \leq |e^{-t}t^{n+z}| = e^{-t}t^{n+x} < 1,\ \ 0 < \int_0^1 v^n e^{vt}dv < \int_0^1 edt.$$

On en déduit

$$|r_n(z)| < \frac{e}{n!},$$

et par conséquent :

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

4. Si z est un entier négatif ou nul la fonction considérée n'est pas définie. Dans le cas contraire, la fonction est la somme d'une série numérique absolument convergente d'après le règle de d'Alembert. Donc la fonction est définie sur $\mathbb{C}$ privé de l'ensemble des entiers négatifs ou nuls.
Montrons que la convergence de la série est uniforme sur tout disque fermé D inclus dans $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\}$, soit $[a,b]$ la projection de D sur l'axe des réels, cela se traduit par $0 < a < b$ ou $-(k+1) < a < b < -k$.
En effet, pour $z \in D$, on a $x = \text{Re}(z) \in [a,b]$ et suivant le cas, pour tout n naturel ou pour tout n supérieur à k, nous avons

$$\left|(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{z+n}\right| \leq \frac{1}{n!}\frac{1}{a+n}$$

ce qui montre qu'il s'agit d'une convergence normale, et par suite, uniforme. Donc la fonction ainsi définie est continue sur $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\}$.

5. commençons par effectuer le changement de variable $\frac{t}{n} \longmapsto u$.

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} = n^z\int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}du.$$

Posons $I_n(z) = \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du$, et intégrons par parties :

$$I_n(z) = \left[(1-u)^n \frac{u^z}{z}\right]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du = \frac{n}{z} I_{n-1}(z).$$

Donc par récurrence,

$$I_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)...(z+n-1)} I_0(z+n).$$

Or

$$I_0(z+n) = \int_0^1 t^{z+n+1} dt = \left[\frac{t^{z+n}}{z+n}\right] = \frac{1}{z+n}.$$

Au bilan,

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = n^z I_n(z) = \frac{n^Z n!}{z(z+1)....(z+n)}.$$

6. Pour tout $u \in [0,1]$, $1-u \leq e^{-u}$. Donc pour tout $t \in [0,n]$, $1-\frac{t}{n} \leq e^{\frac{-t}{n}}$, soit $\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq e^{-t}$. Pour tout $t \in [0,+\infty[$, et pour tout $z \in \mathscr{D}$,

$$\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \chi_{[0,n]}\right| \leq t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t},$$

où $\chi_{[0,n]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,n]$. La fonction majorante est indépendante de n, et elle est intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout $t \in [0,+\infty[$ et pour tout $z \in \mathscr{D}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} = t^{z-1} e^{-t}.$$

D'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} = \Gamma(z).$$

D'où le résultat.

•••••••••••